

2024-2025 年八年级数学上册第一次月考卷 01 (测试范围: 第 16-17 章)

一、单选题

1. 下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{9a}$ B. $\sqrt{3a^3}$ C. $\sqrt{\frac{a+1}{2}}$ D. $\sqrt{a^2-b^2}$

【答案】D

【分析】满足下列条件的二次根式, 叫做最简二次根式: (1) 被开方数的因数是整数, 因式是整式; (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

【解析】解: A. $\sqrt{9a} = 3\sqrt{a}$, 故不符合题意;

B. $\sqrt{3a^3} = a\sqrt{3a}$, 故不符合题意;

C. $\sqrt{\frac{a+1}{2}} = \frac{\sqrt{2a+2}}{2}$, 故不符合题意;

D. $\sqrt{a^2-b^2}$, 最简二次根式, 符合题意.

故选: D.

【点睛】本题考查了最简二次根式的定义, 熟记最简二次根式的定义是解题的关键.

2. 下列方程属于一元二次方程的是 ()

- A. $x^2-4=0$ B. $x-y=5$ C. $ax^2+bx+c=0$ D. $x+1=3$

【答案】A

【分析】本题考查了一元二次方程的定义, 能熟记一元二次方程的定义 (只含有一个未知数, 并且所含未知数的项的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程) 是解此题的关键. 根据一元二次方程的定义逐项判断即可求解.

【解析】解: A. 方程 $x^2-4=0$ 是一元二次方程, 故本选项符合题意;

B. 方程 $x-y=5$ 是二元一次方程, 不是一元二次方程, 故本选项不符合题意;

C. 当 $a=0$ 时, 方程 $ax^2+bx+c=0$ 不是一元二次方程, 故本选项不符合题意;

D. 方程 $x+1=3$ 是一元一次方程, 不是一元二次方程, 故本选项不符合题意.

故选: A

3. 若 $\sqrt{\frac{x-1}{x-4}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-4}}$ 在实数范围内成立, 则 x 的取值范围是 ()

- A. $x \geq 1$ B. $x \geq 4$ C. $1 \leq x \leq 4$ D. $x > 4$

【答案】 D

【分析】 利用二次根式有意义的条件和分式有意义的条件列出一元一次不等式组，并求解即可.

【解析】 解: $\because \sqrt{\frac{x-1}{x-4}} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-4}}$ 有意义,

$$\therefore \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-4 > 0 \end{cases},$$

解得: $x > 4$.

故选: D.

【点睛】 本题考查了二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件, 解一元一次不等式组的解集, 熟练掌握二次根式有意义的条件和分式有意义的条件是解答本题的关键.

4. 在下列各式中, 二次根式 $\sqrt{a-b}$ 的有理化因式是()

- A. $\sqrt{a+b}$ B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ C. $\sqrt{a-b}$ D. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

【答案】 C

【分析】 二次根式 $\sqrt{a-b}$ 的有理化因式就是将原式中的根号化去, 即可得出答案.

【解析】 $\because \sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a-b} = a-b$,

$\therefore$ 二次根式 $\sqrt{a-b}$ 的有理化因式是: $\sqrt{a-b}$.

故选 C.

5. 三角形两边的长分别是 7 和 11, 第三边的长是一元二次方程 $x^2 - 25 = 2(x-5)^2$ 的一个实数根, 则该三角形的周长是 ()

- A. 23 B. 23 或 33 C. 24 D. 24 或 30

【答案】 B

【分析】 先求方程的解, 再根据三角形三边之间的关系判断是否能构成三角形, 即可求解.

【解析】 解: $(x+5)(x-5) - 2(x-5)^2 = 0$,

$$(x-5)[(x+5) - 2(x-5)] = 0,$$

$$(x-5)(-x+15) = 0,$$

$$x_1 = 5, x_2 = 15,$$

$$\because 7-5 < 11 < 7+5,$$

$\therefore 7, 11, 5$ 能组成三角形,

$$\therefore 15-7 < 11 < 15+7,$$

$\therefore 7, 11, 15$ 能组成三角形,

$\therefore$ 该三角形的周长是 $7+11+5=23$ 或 $7+11+15=33$,

故选: B.

【点睛】 本题主要考查了解一元二次方程, 三角形三边之间的关系, 解题的关键是掌握解一元二次方程的方法和步骤, 以及三角形三边之间的关系: 两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边.

6. 已知实数 m, n, c 满足 $m^2 - m + \frac{1}{4}c = 0$, $n = 12m^2 - 12m + c^2 + \frac{1}{4}$, 则 n 的取值范围是 ()

- A. $n \geq -\frac{7}{4}$ B. $n > -\frac{7}{4}$ C. $n \geq -2$ D. $n > -2$

【答案】 A

【分析】 由 $m^2 - m + \frac{1}{4}c = 0$ 变形得 $m^2 - m = -\frac{1}{4}c$, 代入 $n = 12m^2 - 12m + c^2 + \frac{1}{4}$ 中得到 $n = c^2 - 3c + \frac{1}{4}$, 再进行配方, 根据非负数的性质即可得到答案.

$$\text{【解析】} \because m^2 - m + \frac{1}{4}c = 0$$

$$\therefore m^2 - m = -\frac{1}{4}c$$

$$\therefore m^2 - m = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$$

$$\therefore c \leq 1$$

$$\therefore n = 12m^2 - 12m + c^2 + \frac{1}{4} = 12(m^2 - m) + c^2 + \frac{1}{4} = 12 \times \left(-\frac{1}{4}c\right) + c^2 + \frac{1}{4} = c^2 - 3c + \frac{1}{4}$$

$$\therefore n = \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 - 2$$

$$\therefore \left(c - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$$

$$\therefore n \geq -\frac{7}{4}$$

故选: A.

【点睛】 本题主要考查了配方法的应用, 涉及非负数的性质、偶次方, 熟练运用上述知识是解题的关键.

二、填空题

7. 比较下列实数的大小: $3\sqrt{6}$ _____ $2\sqrt{13}$.

【答案】 $>$

【分析】 本题考查了实数的大小比较和二次根式的性质等知识点. 把根号外的因式平方后移入根号内, 比

较结果的大小，即可求出答案.

【解析】解: $3\sqrt{6} = \sqrt{3^2 \times 6} = \sqrt{54}$, $2\sqrt{13} = \sqrt{2^2 \times 13} = \sqrt{52}$,

$$\therefore \sqrt{54} > \sqrt{52},$$

$$\therefore 3\sqrt{6} > 2\sqrt{13},$$

故答案为: $>$.

8. 等式 $\sqrt{2x+1}$ 有意义的条件是_____.

【答案】 $x \geq -\frac{1}{2}$

【分析】 本题考查二次根式成立的条件以及解不等式，根据二次根式成立的条件进行解答即可.

【解析】 解: 由题意可得,

$$2x+1 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -\frac{1}{2},$$

故答案为: $x \geq -\frac{1}{2}$.

9. 计算: $\sqrt{32} - \sqrt{2} =$ __.

【答案】 $3\sqrt{2}$

【分析】 先将二次根式化为最简，然后合并同类二次根式即可得出答案.

【解析】 $\sqrt{32} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

【点睛】 此题考查了二次根式的加减运算，属于基础题，掌握二次根式的化简及同类二次根式的合并是关键.

10. 已知 $\sqrt{2x-1} = 1$ ，则 $x =$ _____.

【答案】 1

【分析】 本题主要考查了二次根式有意义的条件，掌握二次根式中的被开方数是非负数是解题的关键. 由二次根式被开方数大于 0 可知 $2x-1 > 0$ ，则可得出 $2x-1=1$ ，求出 x 即可.

【解析】 解: 根据题意可知: $2x-1 > 0$,

$$\therefore 2x-1=1,$$

解得: $x=1$,

故答案为: 1.

11. 在实数范围内分解因式: $x^2 - 4x - 2 =$ _____.

【答案】 $(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$

【分析】 本题主要考查了因式分解，先把原式加上 4 再减去 4 得到 $x^2 - 4x + 4 - 6$ ，由此利用完全平方公式得到 $(x-2)^2 - 6$ ，由此利用平方差公式可得 $(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$ 。

【解析】 解： $x^2 - 4x - 2$
 $= x^2 - 4x + 4 - 6$
 $= (x-2)^2 - 6$
 $= (x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$,

故答案为： $(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$ 。

12. 不等式 $\sqrt{3}x - 1 < \sqrt{2}x$ 的解集是_____。

【答案】 $x < \sqrt{3} + \sqrt{2}$

【分析】 按照解不等式的步骤，先移项，再合并同类项，系数化为 1，最后对结果进行化简即可。

【解析】 $\sqrt{3}x - 1 < \sqrt{2}x$
 $\sqrt{3}x - \sqrt{2}x < 1$
 $(\sqrt{3} - \sqrt{2})x < 1$
 $x < \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
 $\therefore x < \sqrt{3} + \sqrt{2}$
故答案为 $x < \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 。

【点睛】 本题考查了不等式的解法以及二次根式的分母有理化，根据不等式的性质，确定未知系数的有理化因式是解题的关键。

13. 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + x + m^2 - 9 = 0$ 有一个根为零，则 m 的值为_____。

【答案】 ± 3

【分析】 本题考查了一元二次方程的根与系数的关系， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，据此作答即可。

【解析】 解： 因为一元二次方程 $2x^2 + x + m^2 - 9 = 0$ 有一个根为零，
所以 $0 + x_2 = -\frac{1}{2}$ ，
解得 $x_2 = -\frac{1}{2}$ ，
因为 $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，
所以 $0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{m^2 - 9}{2}$ ，

故 $m = \pm 3$,

故答案为: ± 3 .

14. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 8x + 16 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \leq 1$ 且 $k \neq 0$

【分析】 本题考查了根的判别式以及一元二次方程的定义, 牢记“当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程有实数根”是解题的关键. 根据二次项系数非零结合根的判别式 $\Delta \geq 0$, 即可得出关于 k 的一元一次不等式, 解之即可得出结论.

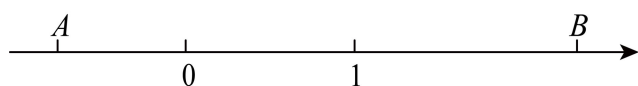
【解析】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 8x + 16 = 0$ 有实数根,

$$\therefore k \neq 0 \text{ 且 } \Delta = (-8)^2 - 64k \geq 0,$$

解得: $k \leq 1$ 且 $k \neq 0$,

故答案为: $k \leq 1$ 且 $k \neq 0$.

15. 如图, 已知数轴上 A, B 两点表示的数分别是 a, b , 化简 $\sqrt{a^2} + (\sqrt{b})^2$ 的结果是_____.



【答案】 $b - a / -a + b$

【分析】 本题考查了二次根式的性质与化简, 数轴. 由数轴得到 $a < 0$, $b > 0$, 再根据二次根式的性质化简即可.

【解析】 解: 由数轴得, $a < 0$, $b > 0$,

$$\therefore \sqrt{a^2} + (\sqrt{b})^2$$

$$= |a| + b$$

$$= -a + b$$

$$= b - a,$$

故答案为: $b - a$.

16. 某型号的手机连续两次降价, 每个售价由原来的 1200 元降到 588 元, 若每次降价的百分率相同, 则平均每次降价的百分率为_____.

【答案】 30%

【分析】 此题考查一元二次方程的应用. 设平均每次降价的百分率为 x , 每个售价由原来的 1200 元降到 588 元, 列出一元二次方程, 解之取符合题意的值即可.

【解析】 解: 设平均每次降价的百分率为 x ,

根据题意得: $1200(1-x)^2 = 588$,

解得: $x_1 = 0.3 = 30\%$, $x_2 = 1.7$ (不合题意, 舍去),

即每次降价的百分率为 30% ,

故答案为: 30% .

17. 我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求面积的公式, 即三角形的三边长为 a 、 b 、 c , 记 $p = \frac{a+b+c}{2}$, 那么其面积 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. 如果某个三角形的三边长分别为 5 , 6 , 7 时, 其面积 S 介于整数 n 和 $n+1$ 之间, 那么 n 的值是_____.

【答案】 14

【分析】 根据题意, 先求出 p , 然后求出 S , 代入公式即可求 S , 再根据二次根式比较大小的方法, 即可求解.

【解析】 解: $\because$ 三角形的三边长为 a 、 b 、 c , 记 $p = \frac{a+b+c}{2}$, 面积 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$\therefore$ 当三角形的三边长分别为 5 , 6 , 7 时, $p = \frac{5+6+7}{2} = 9$,

$\therefore$ 面积 $s = \sqrt{9 \times (9-5) \times (9-6) \times (9-7)} = \sqrt{216}$,

$\because 14^2 = 196$, $15^2 = 225$,

$\therefore 196 < 216 < 225$,

$\therefore 14 < \sqrt{216} < 15$,

$\therefore S$ 介于整数 n 和 $n+1$ 之间,

$\therefore n = 14$.

故答案为: 14.

【点睛】 本题考查二次根式的应用, 估算二次根式的值, 解题的关键是理解题意, 求出 p , S ; 掌握二次根式比较大小的方法.

18. 定义, 如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 满足 $a + b + c = 0$, 那么我们称这个方程为“龙泉师一”方程. 已知方程 $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 (a \neq 0)$ 是“龙泉师一”方程, 且有两个相等的实数根, 则下列结论:

① $a_1 = b_1$ ② $a_1 = c_1$ ③ $b_1 = c_1$ ④ $a_1 = b_1 = c_1$, 正确的是_____. (填序号)

【答案】 ②

【分析】 此题考查了根的判别式, 以及一元二次方程的解, 由方程有两个相等的实数根得到 $b_1^2 - 4a_1c_1 = 0$, 再由 $a_1 + b_1 + c_1 = 0$, 把表示出 $b_1 = -a_1 - c_1$ 代入根的判别式中, 变形后即可得到 $a_1 = c_1$.

【解析】解：∵方程有两个相等实数根，且 $a_1 + b_1 + c_1 = 0$ ，

$$\therefore b_1^2 - 4a_1c_1 = 0, \quad b_1 = -a_1 - c_1,$$

$$\text{将 } b_1 = -a_1 - c_1 \text{ 代入得： } a_1^2 + 2a_1c_1 + c_1^2 - 4a_1c_1 = (a_1 - c_1)^2 = 0,$$

$$\therefore a_1 = c_1,$$

故答案为：②.

三、解答题

19. 计算： $4\sqrt{5} + \sqrt{45} - \sqrt{8} + 4\sqrt{2}$.

【答案】 $7\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

【分析】 本题考查了二次根式的性质，二次根式的加减法运算，先化为最简二次根式，再合并同类二次根式即可．掌握二次根式的混合运算法则是解题的关键．

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } & 4\sqrt{5} + \sqrt{45} - \sqrt{8} + 4\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \\ &= 7\sqrt{5} + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

20. 计算： $3\sqrt{18} \times \frac{\sqrt{3}}{6} \div 2\sqrt{6}$.

【答案】 $\frac{3}{4}$.

【分析】 根据二次根式的乘除运算法则计算即可．

$$\begin{aligned} \text{【解析】 解：原式} &= \left(3 \times \frac{1}{6} \div 2\right) \sqrt{18 \times 3 \div 6} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{9} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的乘除混合运算，熟练掌握二次根式的乘除运算法则是解题的关键．

21. 计算： $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\frac{7}{2}} \div \sqrt{1\frac{5}{9}} - \sqrt{18}$.

【答案】 $\frac{7}{2} - 4\sqrt{2}$

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算、分母有理化，熟练掌握运算法则是解答本题的关键．先化简，将分母有理化，然后合并同类二次根式得到答案．

【解析】 解: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\frac{7}{2}} \div \sqrt{1\frac{5}{9}} - \sqrt{18}$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{14}}{2} \div \frac{\sqrt{14}}{3} - 3\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + \frac{\sqrt{14}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{14}} - 3\sqrt{2}$$

$$= 2 - \sqrt{2} + \frac{3}{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= \frac{7}{2} - 4\sqrt{2}.$$

22. 计算: $\frac{1}{3-\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{7}-2}$

【答案】 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$

【分析】 此题考查了二次根式的混合运算, 首先分母有理化, 然后化简合并同类二次根式求解即可. 解题的关键是熟练掌握二次根式的混合运算法则.

【解析】 $\frac{1}{3-\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{7}-2}$

$$= \frac{3+\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} - \frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$$

$$= \frac{3+\sqrt{7}}{9-7} - \frac{3\sqrt{7}+6}{7-4}$$

$$= \frac{3+\sqrt{7}}{2} - \frac{3\sqrt{7}+6}{3}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} - \sqrt{7} - 2$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

23. (1) 解方程: $(x-1)^2 = 9(2x+5)^2$;

(2) 用配方法解方程: $3x^2 - 6x + 1 = 0$.

【答案】 (1) $x_1 = -\frac{16}{5}$, $x_2 = -2$; (2) $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$

【分析】 本题考查了直接开平方、配方法解一元二次方程. 熟练掌握直接开平方、配方法是解题的关键.

(1) 直接开平方解一元二次方程即可;

(2) 配方法解一元二次方程即可.

【解析】 (1) 解: $(x-1)^2 = 9(2x+5)^2$,

$$x-1=3(2x+5) \text{ 或 } x-1=-3(2x+5),$$

$$\text{解得, } x_1 = -\frac{16}{5}, \quad x_2 = -2;$$

$$(2) \text{ 解: } 3x^2 - 6x + 1 = 0,$$

$$x^2 - 2x = -\frac{1}{3},$$

$$x^2 - 2x + 1 = -\frac{1}{3} + 1,$$

$$(x-1)^2 = \frac{2}{3},$$

$$\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{解得, } x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

24. 解下列方程:

$$(1) x^2 - 6x - 18 = 0$$

$$(2) 3x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$(3) 7x(5x+2) = 6(5x+2)$$

$$(4) (x+5)(x+1) = 12$$

【答案】 (1) $x_1 = 3 + 3\sqrt{3}$, $x_2 = 3 - 3\sqrt{3}$

$$(2) x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -3$$

$$(3) x_1 = -\frac{2}{5}, \quad x_2 = \frac{6}{7}$$

$$(4) x_1 = -7, \quad x_2 = 1$$

【分析】 本题考查一元二次方程的解法, 熟练掌握解一元二次方程的解法是解题的关键;

(1) 用配方法解一元二次方程即可;

(2) 用因式分解法解一元二次方程即可;

(3) 先移项, 再用因式分解法解一元二次方程即可;

(4) 先去括号, 移项合并同类项, 然后用因式分解法解一元二次方程即可;

【解析】 (1) 解: $x^2 - 6x - 18 = 0$

$$(x-3)^2 - 27 = 0$$

$$(x-3)^2 = 27$$

$$x-3 = \pm 3\sqrt{3}$$

$$x_1 = 3+3\sqrt{3}, \quad x_2 = 3-3\sqrt{3}$$

$$(2) \text{ 解: } 3x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$(3x-1)(x+3) = 0$$

$$3x-1=0 \text{ 或 } x+3=0$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -3$$

$$(3) \text{ 解: } 7x(5x+2) = 6(5x+2)$$

$$7x(5x+2) - 6(5x+2) = 0$$

$$(5x+2)(7x-6) = 0$$

$$5x+2=0 \text{ 或 } 7x-6=0$$

$$x_1 = -\frac{2}{5}, \quad x_2 = \frac{6}{7}$$

$$(4) \text{ 解: } (x+5)(x+1) = 12$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$(x+7)(x-1) = 0$$

$$x+7=0 \text{ 或 } x-1=0$$

$$x_1 = -7, \quad x_2 = 1$$

25. 已知 $x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ 求 $x^2 + xy + y^2$ 的值

【答案】 35

【分析】 本题考查了二次根式的化简求值和整式的混合运算，首先利用分母有理化求出 x 和 y 的值，然后求出 $x+y=6$, $xy=1$ ，然后将 $x^2 + xy + y^2$ 利用完全平方公式变形为 $(x+y)^2 - xy$ ，然后代入求解即可。熟练掌握完全平方公式是解题的关键。

$$\text{【解析】} \because x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 3+2\sqrt{2}, \quad y = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 3-2\sqrt{2},$$

$$\therefore x+y = 3+2\sqrt{2} + 3-2\sqrt{2} = 6, \quad xy = (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore x^2 + xy + y^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 - xy \\
&= (x+y)^2 - xy \\
&= 6^2 - 1 \\
&= 35.
\end{aligned}$$

26. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k+1)x^2 - \sqrt{2k-1}x + 3-k = 0$ 的根的判别式为 27, 求 k 的值和方程的根.

【答案】 k 的值为 4, 方程的根为 $x_1 = \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{10}$, $x_2 = \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{10}$

【分析】 本题考查了一元二次方程的判别式, 二次根式有意义的条件, 公式法解一元二次方程. 熟练掌握一元二次方程的判别式, 公式法解一元二次方程是解题的关键. 由题意知, $k+1 \neq 0$, $2k-1 \geq 0$, 解得, $k \geq \frac{1}{2}$, $\Delta = (-\sqrt{2k-1})^2 - 4(k+1)(3-k) = 27$, 计算求出满足要求的解即可; 一元二次方程为 $5x^2 - \sqrt{7}x - 1 = 0$, 公式法求解即可.

【解析】 解: 由题意知, $k+1 \neq 0$, $2k-1 \geq 0$,

解得, $k \geq \frac{1}{2}$,

$$\Delta = (-\sqrt{2k-1})^2 - 4(k+1)(3-k) = 27,$$

整理得, $2k^2 - 3k - 20 = 0$,

$$(k-4)(2k+5) = 0,$$

$\therefore k-4=0$ 或 $2k+5=0$,

解得, $k=4$ 或 $k=-\frac{5}{2}$ (舍去),

$\therefore 5x^2 - \sqrt{7}x - 1 = 0$,

$$\therefore x_{1,2} = \frac{-(-\sqrt{7}) \pm \sqrt{27}}{2 \times 5} = \frac{\sqrt{7} \pm 3\sqrt{3}}{10},$$

解得, $x_1 = \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{10}$, $x_2 = \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{10}$,

$\therefore k$ 的值为 4, 方程的根为 $x_1 = \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{10}$, $x_2 = \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{10}$.

27. 已知关于 x 的方程 $x^2 - (k+3)x + 2k+2 = 0$.

(1) 求证: 方程总有两个实数根;

(2) 若方程有一个不小于 3 的根, 求实数 k 的取值范围.

【答案】(1)见解析

(2) $k \geq 2$

【分析】 本题考查一元二次方程根的判别式与方程的根之间的关系，熟练掌握相关知识点是解题关键.

(1) 证出根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 即可完成;

(2) 将 k 视为数，求出方程的两个根，即可求出 k 的取值范围.

【解析】 (1) 证明: $a=1, b=-(k+3), c=2k+2$,

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-(k+3)]^2 - 4 \times 1 \times (2k+2) = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0,$$

$\therefore$ 方程总有两个实数根;

(2) 解: $\because x^2 - (k+3)x + 2k+2 = 0$,

$$\therefore x = \frac{k+3 \pm (k-1)}{2}$$

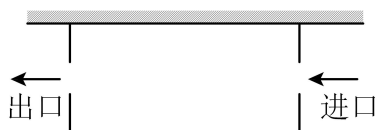
$$\therefore x_1 = k+1, x_2 = 2,$$

$\therefore$ 方程有一个不小于 3 的根,

$$\therefore k+1 \geq 3,$$

解得: $k \geq 2$.

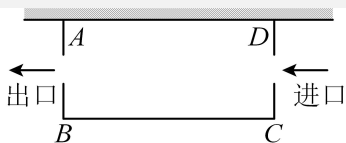
28. 第十五届中国上海国际艺术节期间，瑞士日内瓦大歌剧院芭蕾舞团芭蕾舞剧《吉赛尔》在市内的城市剧院演出，主办方工作人员准备利用一边靠墙（墙 26 米）的空旷场地为提前到场的观众设立面积为 300 平方米的封闭型长方形等候区. 如图，为了方便观众进出，在两边空出两个宽各为 1 米的出入口，共用去栅栏绳 48 米. 请问，工作人员围成的这个长方形的相邻两边长分别是多少米？



【答案】 AB 为 15 米， BC 为 20 米

【分析】 设封闭型长方形等候区的边 AB 为 x 米，根据面积为 300 平方米的封闭型长方形等候区可得 $(48+2-2x)x=300$ ，再解一元二次方程即可.

【解析】 解: 设封闭型长方形等候区的边 AB 为 x 米,



由题意得: $x(48 - 2x + 2) = 300$,

整理, 得 $x^2 - 25x + 150 = 0$,

解得 $x_1 = 10$, $x_2 = 15$,

当 $x = 10$ 时, $BC = 30 > 26$;

当 $x = 15$ 时, $BC = 20 < 26$,

$\therefore x = 10$ 不合题意, 应舍去.

答: 封闭型长方形等候区的边 AB 为 15 米, BC 为 20 米.

【点睛】 本题考查了栅栏围长方形问题, 一元二次方程的解法, 方程根的意义, 根据题意, 正确列出方程, 并正确判断根的取舍是解题的关键.

29. 阅读下列解题过程:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} = \frac{1 \times (\sqrt{5} - \sqrt{4})}{(\sqrt{5} + \sqrt{4})(\sqrt{5} - \sqrt{4})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{4})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{4};$$

$$\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{1 \times (\sqrt{6} - \sqrt{5})}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{5}.$$

请回答下列问题:

(1) 观察上面的解题过程, 请直接写出式子: $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \underline{\hspace{2cm}} (n \geq 2)$.

(2) 利用上面所提供的解法, 请化简:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{9}}.$$

(3) 模仿上面所提供的解法, 试一试化简:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + 3} + \frac{1}{3 + \sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17} + \sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21} + 5}.$$

【答案】 (1) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(2) $\sqrt{10} - 1$

(3) 1

【分析】 本题主要考查了分母有理化, 二次根式的加减计算:

(1) 仿照题意进行分母有理化即可;

(2) 根据 (1) 所求裂项, 然后根据二次根式的加减计算法则求解即可;

(3) 先分母有理化得到 $\frac{1}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n+1}} = \frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}}{4}$, 据此裂项求解即可.

【解析】 (1) 解: $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n}$$

$$= \sqrt{n+1}-\sqrt{n},$$

故答案为: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

$$(2) \text{ 解: } \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{9}}$$

$$= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \cdots + \sqrt{10}-\sqrt{9}$$

$$= \sqrt{10}-1;$$

$$(3) \text{ 解: } \frac{1}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}}{(\sqrt{4n-3}+\sqrt{4n+1})(\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3})}$$

$$= \frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}}{4n+1-4n+3}$$

$$= \frac{\sqrt{4n+1}-\sqrt{4n-3}}{4},$$

$$\therefore \frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+3} + \frac{1}{3+\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21}+5}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{3-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{13}-3}{4} + \frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{4} + \frac{\sqrt{21}-\sqrt{17}}{4} + \frac{5-\sqrt{21}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{3-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{13}-3}{4} + \frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{4} + \frac{\sqrt{21}-\sqrt{17}}{4} + \frac{5-\sqrt{21}}{4}$$

$$= \frac{5-1}{4}$$

$$= 1.$$

30. 请阅读以下材料:

①若 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 的两个根, 则方程的两个根 x_1, x_2 和系数 a, b, c

有如下关系: $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}$, 把它们称为一元二次方程根与系数关系定理 (韦达定理) .

②定义: 已知 x_1, x_2 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ 的两个实数根, 若 $x_1 < x_2 < 0$, 且 $3 < \frac{x_1}{x_2} < 4$,

则称这个方程为“限根方程”. 如: 一元二次方程 $x^2+13x+30=0$ 的两根为 $x_1=-10$, $x_2=-3$, 因为 $-10<-3<0$, $3<\frac{-10}{-3}<4$, 所以一元二次方程 $x^2+13x+30=0$ 为“限根方程”.

请解决下列问题:

(1)判断一元二次方程 $x^2+9x+14=0$ 是否为“限根方程”, 并说明理由;

(2)若关于 x 的一元二次方程 $2x^2+(k+7)x+k^2+3=0$ 是“限根方程”, 且方程的两根 x_1 、 x_2 满足 $x_1+x_2+x_1x_2=-1$, 求 k 的值;

(3)若关于 x 的一元二次方程 $x^2+(1-m)x-m=0$ 是“限根方程”, 则 m 的取值范围为_. (此小问直接填空, 不写过程)

【答案】 (1)是, 理由见解析

(2)2

(3) $-\frac{1}{3}<m<-\frac{1}{4}$ 或 $-4<m<-3$

【分析】 本题考查解一元二次方程, 一元二次方程根与系数的关系, 一元二次方程根的判别式. 读懂题意, 理解“限根方程”的定义是解题关键.

(1) 解该一元二次方程, 得出 $x_1=-7$, $x_2=-2$, 再根据“限根方程”的定义判断即可;

(2) 由一元二次方程根与系数的关系可得出 $x_1+x_2=-\frac{k+7}{2}$, $x_1x_2=\frac{k^2+3}{2}$, 代入 $x_1+x_2+x_1x_2=-1$, 即可求出 $k_1=2$, $k_2=-1$. 再结合“限根方程”的定义分类讨论舍去不合题意的值即可;

(3) 解该一元二次方程, 得出 $x_1=-1$, $x_2=m$ 或 $x_1=m$, $x_2=-1$. 再根据此方程为“限根方程”, 即得出此方程有两个不相等的实数根, 结合一元二次方程根的判别式即可得出 $\Delta>0$, $m<0$ 且 $m\neq-1$, 可求出 m 的取值范围. 最后分类讨论即可求解.

【解析】 (1) 解: $x^2+9x+14=0$,

$$(x+2)(x+7)=0,$$

$$\therefore x+2=0 \text{ 或 } x+7=0,$$

$$\therefore x_1=-7, x_2=-2.$$

$$\because -7<-2, 3<\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}<4,$$

$\therefore$ 此方程为“限根方程”;

(2) 解: $\because$ 方程 $2x^2+(k+7)x+k^2+3=0$ 的两个根分别为 x_1 、 x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{k+7}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{k^2+3}{2}.$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -1,$$

$$\therefore -\frac{k+7}{2} + \frac{k^2+3}{2} = -1,$$

$$\text{解得: } k_1 = 2, \quad k_2 = -1.$$

分类讨论: ①当 $k = 2$ 时, 原方程为 $2x^2 + 9x + 7 = 0$,

$$\therefore x_1 = -\frac{7}{2}, \quad x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1 < x_2 < 0, \quad 3 < \frac{x_1}{x_2} = \frac{7}{2} < 4,$$

$\therefore$ 此时方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 是“限根方程”,

$\therefore k = 2$ 符合题意;

②当 $k = -1$ 时, 原方程为 $2x^2 + 6x + 4 = 0$,

$$\therefore x_1 = -2, \quad x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1 < x_2 < 0, \quad \frac{x_1}{x_2} = 2 < 3,$$

$\therefore$ 此时方程 $2x^2 + (k+7)x + k^2 + 3 = 0$ 不是“限根方程”,

$\therefore k = -1$ 不符合题意.

综上可知 k 的值为 2;

$$(3) \text{ 解: } x^2 + (1-m)x - m = 0,$$

$$(x+1)(x-m) = 0,$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x-m=0,$$

$$\therefore x_1 = -1, \quad x_2 = m \text{ 或 } x_1 = m, \quad x_2 = -1.$$

$\therefore$ 此方程为“限根方程”,

$\therefore$ 此方程有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta > 0, \quad m < 0 \text{ 且 } m \neq -1,$$

$$\therefore (1-m)^2 + 4m > 0, \quad \text{即 } (1+m)^2 > 0,$$

$$\therefore m < 0 \text{ 且 } m \neq -1.$$

分类讨论: ①当 $-1 < m < 0$ 时,

$$\therefore x_1 = -1, \quad x_2 = m,$$

$$\therefore 3 < \frac{x_1}{x_2} < 4,$$

$$\therefore 3 < \frac{-1}{m} < 4,$$

$$\text{解得: } -\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{4};$$

②当 $m < -1$ 时,

$$\therefore x_1 = m, \quad x_2 = -1,$$

$$\therefore 3 < \frac{x_1}{x_2} < 4,$$

$$\therefore 3 < \frac{m}{-1} < 4,$$

$$\text{解得: } -4 < m < -3.$$

综上所述, m 的取值范围为 $-\frac{1}{3} < m < -\frac{1}{4}$ 或 $-4 < m < -3$.