

2024 学年第一学期期中质量调研八年级数学学科试卷

(试卷满分 100 分, 考试时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列关于 x 的方程中一定有实数解的是 ()

A. $x^2 - x + 1 = 0$

B. $x^2 - mx - 1 = 0$

C. $\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$

D. $x^2 - x - m = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据一元二次方程的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时方程有解, 逐个判断即可.

【详解】解: $\because A$ 、 $x^2 - x + 1 = 0$, $\Delta = -3 < 0$, 故此方程无实数解, 不符合题意;

B 、 $\because x^2 - mx - 1 = 0$, $\Delta = m^2 + 4 > 0$, 故此方程有实数解, 符合题意;

C 、 $\because \sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$, $\Delta = 4 - 4\sqrt{2} < 0$, 故此方程无实数解, 不符合题意;

D 、 $\because x^2 - x - m = 0$, $\Delta = 1 + 4m$ (由于 m 的值不确定, 故 $1 + 4m$ 可以 ≥ 0 , 可以 < 0), 故此方程不一定有实数解, 不符合题意.

故选: B.

【点睛】此题考查了一元二次方程解得情况, 解题的关键是熟练掌握一元二次方程判别式和解得关系. 当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 一元二次方程有两个不相等的实数根; 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 一元二次方程有两个相等的实数根; 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 一元二次方程没有实数根.

2. 下列各式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{18}$

B. $\sqrt{\frac{a}{2}}$

C. $\sqrt{a^2 + 4a^4}$

D. $\sqrt{a^2 - b^2}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式的定义, 能熟记最简二次根式的定义是解此题的关键, 满足以下两个条件的二次根式是最简二次根式, ①被开方数中的因数是整数, 因式是整式, ②被开方数中不含有能开得尽方的因数和因式. 根据最简二次根式的定义逐个判断即可.

【详解】解: A. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;

B. $\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;

C. $\sqrt{a^2+4a^4} = |a|\sqrt{1+4a^2}$, 不是最简二次根式, 故本选项不符合题意;

D. $\sqrt{a^2-b^2}$ 是最简二次根式, 故本选项符合题意.

故选: D.

3. 下列从左到右的变形不一定正确的是 ()

A. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$

B. $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}$

C. $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

D. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是二次根式的化简, 二次根式的乘法与除法运算, 熟练掌握二次根式的性质, 二次根式的乘法与除法运算是解题的关键.

根据二次根式的性质和二次根式的乘法与除法运算法则进行判断即可.

【详解】解: $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$, 运算正确, 故 A 不符合题意;

$$\because a^2 > 0, \frac{b}{a^2} \geq 0,$$

$$\therefore b \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}, \text{ 运算正确, 故 B 不符合题意,}$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \text{ 运算正确, 故 C 不符合题意;}$$

当 $a < 0, b < 0$ 时, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 不成立, 故 D 符合题意;

故选: D.

4. $\sqrt{4x-4y}$ 的一个有理化因式是 ()

A. $\sqrt{x+y}$

B. $\sqrt{x-y}$

C. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

D. $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据有理化因式的定义，两个含有根式的代数式相乘，如果它们的积不含有根式，那么这两个代数式相互叫做有理化因式，即可求解.

【详解】解： $\because \sqrt{4x-4y} \times \sqrt{x-y} = 4|x-y|$,

$\therefore \sqrt{4x-4y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x-y}$,

故选 B.

【点睛】本题考查了有理化因式，掌握二次根式的性质是解题的关键.

5. 已知 $x = -1$ 是一元二次方程 $x^2 - k^2x + k - 3 = 0$ 的一个解，则 k 的值是 ()

A. -2 或 1

B. 0

C. 0 或 1

D. 0 或 -1

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解，根据题意可得：把 $x = -1$ 代入方程 $x^2 - k^2x + k - 3 = 0$ 中得：

$1 + k^2 + k - 3 = 0$ ，从而整理得： $k^2 + k - 2 = 0$ ，然后解方程即可.

【详解】解：把 $x = -1$ 代入方程 $x^2 - k^2x + k - 3 = 0$ 中得：

$1 + k^2 + k - 3 = 0$,

整理得： $k^2 + k - 2 = 0$,

$(k+2)(k-1) = 0$,

解得： $k = -2$ 或 $k = 1$,

故选：A.

6. 某超市一月份的营业额为 200 万元，第一季度的营业额共 1000 万元，如果平均每月增长率为 x ，则由题意列方程应为 ()

A. $200(1+x)^2 = 1000$

B. $200 + 200 \times 2 \cdot x = 1000$

C. $200 + 200 \times 3 \cdot x = 1000$

D. $200[1 + (1+x) + (1+x)^2] = 1000$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，设平均每月增长率为 x ，则二月份的营业额为

$200(1+x)$ 万元，三月份的营业额为 $200(1+x)^2$ 万元，由第一季度的营业额共 1000 万元，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解.

【详解】解：设平均每月增长率为 x ，则二月份的营业额为 $200(1+x)$ 万元，三月份的营业额为 $200(1+x)^2$ 万元，

根据题意得： $200[1+(1+x)+(1+x)^2]=1000$.

故选： D .

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 2 分，满分 24 分）

7. 若二次根式 $\sqrt{1+3x}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件得到 $1+3x \geq 0$ ，解不等式即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 二次根式 $\sqrt{1+3x}$ 有意义，

$\therefore 1+3x \geq 0$ ，

解得 $x \geq -\frac{1}{3}$ ，

故答案为： $x \geq -\frac{1}{3}$

【点睛】此题考查了二次根式有意义的条件，熟知被开方式为非负数是解题的关键.

8. 分母有理化： $\frac{2}{\sqrt{3}-2} =$ _____；

【答案】 $-2\sqrt{3}-4$

【解析】

【分析】本题考查二次根式的分母有理化. 利用了平方差公式分母有理化即可.

【详解】解： $\frac{2}{\sqrt{3}-2} = \frac{2(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = \frac{2\sqrt{3}+4}{3-4} = -2\sqrt{3}-4$ ，

故答案为： $-2\sqrt{3}-4$.

9. 设 a 、 b 、 c 分别是三角形三边的长，则 $\sqrt{(a-b-c)^2} + \sqrt{(b-c-a)^2} =$ _____.

【答案】 $2c$

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形三边关系的应用，利用二次根式的性质化简，整式加减的应用等知识点，

由三角形三边之间的关系得出 $a-b-c<0$, $b-c-a<0$ 是解题的关键.

首先由三角形三边之间的关系得出 $a-b-c<0$, $b-c-a<0$, 然后化简二次根式, 再进行整式的加减运算即可得出答案.

【详解】解: $\because a, b, c$ 分别是三角形三边的长,

$$\therefore b+c>a, a+c>b,$$

$$\therefore a-b-c<0, b-c-a<0,$$

$$\therefore \sqrt{(a-b-c)^2} + \sqrt{(b-c-a)^2}$$

$$= -(a-b-c) - (b-c-a)$$

$$= b+c-a+a+c-b$$

$$= 2c,$$

故答案为: $2c$.

10. 化简: $x\sqrt{-\frac{1}{12x^3}} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $\frac{\sqrt{-3x}}{6x}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简, 利用二次根式的运算公式直接化简即可得出答案, 掌握二次根式的运算性质是解题的关键.

【详解】解: 原式 $= x\sqrt{-\frac{3x}{36x^4}} = x\frac{\sqrt{-3x}}{\sqrt{36x^4}} = x\frac{\sqrt{-3x}}{6x^2} = \frac{\sqrt{-3x}}{6x},$

故答案为: $\frac{\sqrt{-3x}}{6x}.$

11. 若最简二次根式 $\sqrt{2x+3}$ 和 $\sqrt{9-x}$ 是同类二次根式, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据最简二次根式性质得 $2x+3=9-x$, 解出即可.

【详解】解: $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{2x+3}$ 和 $\sqrt{9-x}$ 是同类二次根式;

$$\therefore 2x+3=9-x,$$

解得 $x=2,$

故答案为：2.

【点睛】 本题考查的是最同类二次根式，熟知被开方数相同是解决本题的关键.

12. 方程 $x(x+3)=x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1=0$, $x_2=-2$

【解析】

【分析】 先移项，再将左边利用提公因式法因式分解，继而可得两个关于 x 的一元一次方程，分别求解即可得出答案.

【详解】 解： $\because x(x+3)=x$,

$$\therefore x(x+3)-x=0,$$

$$\therefore x[(x+3)-1]=0, \text{ 即 } x(x+2)=0,$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x+2=0,$$

$$\text{解得: } x_1=0, \quad x_2=-2.$$

故答案为： $x_1=0$, $x_2=-2$.

【点睛】 本题考查解一元二次方程—因式分解法. 因式分解法就是利用因式分解求出方程的解的方法，只有当方程的一边能够分解成两个一次因式，而另一边是0的时候，才能应用因式分解法解一元二次方程. 分解因式时，要根据情况灵活运用学过的因式分解的几种方法. 熟练掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

13. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2-4x+2=0$ 无实数根，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a>2$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义和根的判别式，根据一元二次方程的定义和根的判别式

$\Delta=b^2-4ac<0$ 时方程有无实数根，可求得 a 的取值范围.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2-4x+2=0$ 无实数根，

$$\therefore \Delta=b^2-4ac=16-8a<0 \text{ 且 } a\neq 0,$$

$$\text{解得: } a>2,$$

故答案为： $a>2$.

14. 不等式 $x - 3\sqrt{2} > \sqrt{2}x$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -6 - 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 求得不等式的解集，进一步化简求得答案即可.

【详解】 解： $x - 3\sqrt{2} > \sqrt{2}x$,

$$\sqrt{2}x - x < -3\sqrt{2},$$

$$(\sqrt{2} - 1)x < -3\sqrt{2}$$

$$x < -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1},$$

$$\therefore -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = -\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = -6 - 3\sqrt{2},$$

$$\therefore x < -6 - 3\sqrt{2},$$

故答案为： $x < -6 - 3\sqrt{2}$.

【点睛】 此题考查二次根式的应用，掌握解不等式的方法与步骤是解决本题的关键.

15. 若 x, y 为实数， $(\sqrt{x+y})(\sqrt{x+y}-5) = 6$, 则 $x+y =$ _____.

【答案】 36

【解析】

【分析】 首先设 $\sqrt{x+y} = t (t \geq 0)$, 把原式变形为 $t^2 - 5t - 6 = 0$, 得出 $t = 6$, 再根据算术平方根的性质求解即可.

【详解】 解： 设 $\sqrt{x+y} = t (t \geq 0)$,

$$\text{则 } t(t-5) = 6,$$

$$\text{即 } t^2 - 5t - 6 = 0,$$

$$\text{则 } (t-6)(t+1) = 0,$$

解得： $t_1 = 6$, $t_2 = -1$ (不符合 t 的取值，舍去)，

$$\therefore t = 6,$$

$$\therefore \sqrt{x+y} = 6,$$

$$\therefore x+y = 36,$$

故答案为：36.

【点睛】 本题考查了利用换元法和因式分解法解一元二次方程，掌握利用换元法和因式分解法解一元二次方程和算术平方根的非负性是解题关键.

16. 在实数范围内分解因式： $x^2 - 3xy - 2y^2 =$ _____.

【答案】 $\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{2}y\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{2}y\right)$

【解析】

【分析】 本题考查的是在实数范围内分解因式，一元二次方程的解法，本题令 $x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$ ，用含 y 的代数式表示 x ，再分解因式即可.

【详解】 解： 令 $x^2 - 3xy - 2y^2 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-3y)^2 - 4 \times 1 \times (-2y^2) = 9y^2 + 8y^2 = 17y^2,$$

$$\therefore x = \frac{3y \pm \sqrt{17}y}{2},$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}y, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}y,$$

$$\therefore x^2 - 3xy - 2y^2 = \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{2}y\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{2}y\right);$$

$$\text{故答案为: } \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{2}y\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{2}y\right).$$

17. 某型号的手机原来每台售价 800 元，经过两次降价，且每次降价的百分率相同，现在每台售价为 578 元，则每次降价的百分率是_____.

【答案】 15%

【解析】

【分析】 设每次降价百分率为 x ，根据原来每台售价 800 元，经过两次降价，且每次降价的百分率相同，现在每台售价为 578 元，列方程即可.

【详解】 解： 设每次降价百分率为 x ,

$$\text{由题意得: } 800(1 - x)^2 = 578,$$

$$\text{解得: } x_1 = 0.15 = 15\%, x_2 = 1.85 \text{ (舍)},$$

∴ 每次降价的百分率是15%，

故答案为：15%.

【点睛】 本题考查理一元二次方程的应用，是个增长率问题，根据两次降价前的结果，和现在的价格，列出方程是关键.

18. 定义：如果两个一元二次方程分别有两个实数根，且至少有一个公共根，那么称这两个方程互为“联根方程”. 已知关于 x 的两个一元二次方程 $x^2 - (2+a)x + 2a = 0$ 和 $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 0$ 互为联根方程，那么 a 的值为 _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解的意义：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解. 也考查了利用因式分解法解方程，先利用因式分解法解方程 $x^2 - (2+a)x + 2a = 0$ ，得到 $x = 2$ 或 $x = a$. 再分别将 $x = 2$ ， $x = a$ 代入 $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 0$ ，求出 a 的值即可. 求出方程 $x^2 - (2+a)x + 2a = 0$ 的两个解是解题的关键.

【详解】 解： $x^2 - (2+a)x + 2a = 0$,

分解因式为 $(x-2)(x-a) = 0$,

解得 $x = 2$ 或 $x = a$

①当 $x = 2$ 时， $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 4(a-1) - 2a^2 - a + 2 = 0$,

整理得 $2a^2 - 3a + 2 = 0$,

∵ $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0$ ， ∴ 方程无解；

②当 $x = a$ 时， $(a-1)a^2 - a^3 - a + 2 = -a^2 - a + 2 = 0$

$(a+2)(a-1) = 0$,

∴ $a = -2$ 或 $a = 1$ (舍去)

故答案为：-2.

三、解答题 (本大题共 9 小题，满分 58 分)

19. 计算： $\frac{1}{3}\sqrt{27} - \frac{1}{2}(\sqrt{12} - \sqrt{48})$.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先把二次根式化为最简二次根式，然后根据二次根式的加减，进行运算，即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & \frac{1}{3}\sqrt{27} - \frac{1}{2}(\sqrt{12} - \sqrt{48}) \\ &= \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查二次根式的知识，解题的关键是掌握二次根式的加减运算.

20. 计算: $\frac{10}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}-1}$.

【答案】 $\sqrt{5}-1$.

【解析】

【分析】 先分母有理化，再合并同类二次根式即可解答.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{10}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}-1} \\ &= 2\sqrt{5} - (1 + \sqrt{5}) \\ &= \sqrt{5} - 1. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查二次根式的加减法，熟练掌握分母有理化是解题的关键.

21. 用公式法解方程: $x^2 - 2\sqrt{2}x - 3 = 0$.

【答案】 $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{5}$.

【解析】

【分析】 先确定 $a=1$, $b=-2\sqrt{2}$, $c=-3$, 然后求 $\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 1\times (-3)=8+12=20$, 代入公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 化简计算即可.

【详解】 解: $\because x^2 - 2\sqrt{2}x - 3 = 0$,

$\therefore a=1$, $b=-2\sqrt{2}$, $c=-3$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 8 + 12 = 20,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{5}}{2 \times 1} = \sqrt{2} \pm \sqrt{5},$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}, \quad x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{5}.$$

【点睛】 本题考查的是解一元二次方程，解答本题的关键是熟练掌握公式法的一般步骤：①一元二次方程化为一般式；② a 、 b 、 c 的值；③计算 Δ ；④代入公式.

22. 用配方法解方程： $2x^2 - 4x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】 根据配方法解一元二次方程的方法步骤求解即可得到答案.

【详解】 解： $2x^2 - 4x - 1 = 0$,

移项得 $2x^2 - 4x = 1$,

系数化为 1 得 $x^2 - 2x = \frac{1}{2}$,

配方得 $x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2} + 1$,

因式分解得 $(x-1)^2 = \frac{3}{2}$,

即 $x-1 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$,

$$\therefore x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

【点睛】 本题考查配方法解一元二次方程的方法步骤，熟练掌握配方法解一元二次方程是解决问题的关键.

23. 当 $a = \frac{2}{3}$ ，化简代数式 $\frac{a-1}{\sqrt{a-1}} + \sqrt{\frac{a^2+1}{a}} - 2$ ，并求值.

【答案】 $\frac{1}{a}\sqrt{a} + 1, \quad \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简求值，首先判断出 $a-1 < 0$ ，然后对二次根式进行化简，代入数值计算

是解题的关键.

【详解】解: $\because a = \frac{2}{3},$

$$\therefore 0 < a < 1,$$

$$\therefore a-1 < 0,$$

$$\begin{aligned}& \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{a^2+1}{a}} - 2 \\&= \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a}} \\&= \sqrt{a}+1 + \frac{1-a}{a}\sqrt{a} \\&= \sqrt{a}+1 + \frac{1-a}{a}\sqrt{a} \\&= \frac{1}{a}\sqrt{a}+1,\end{aligned}$$

$$\text{当 } a = \frac{2}{3} \text{ 时, 原式} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}+1 = \frac{\sqrt{6}}{2}+1.$$

24. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 方程的其中的一个根为 -1 , 求方程的另一个根.

【答案】(1) $k < \frac{5}{4}$

(2) 方程的另一个根为 0

【解析】

【分析】(1) 依题意, 因为 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 即 $\Delta > 0$, 即可列式作答;

(2) 把 $x = -1$ 代入 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$, 求得 k 的值, 再把 k 的值代入 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$ 中, 即可解出方程的另一个根.

【小问 1 详解】

解: 依题意, 因为 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (2k-1)^2 - 4 \times 1 \times (k^2 - 1) = 4k^2 - 4k + 1 - 4k^2 + 4 = -4k + 5 > 0,$$

解得 $k < \frac{5}{4}$,

【小问2详解】

解：依题意，把 $x = -1$ 代入 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$,

解得 $(-1)^2 + (2k-1) \times (-1) + k^2 - 1 = 1 - 2k + 1 + k^2 - 1 = (k-1)^2 = 0$,

解得 $k = 1$,

把 $k = 1$ 代入 $x^2 + (2k-1)x + k^2 - 1 = 0$,

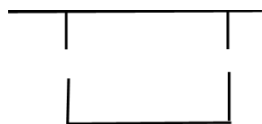
得 $x^2 + x = x(x+1) = 0$,

解得 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$,

所以方程的另一个根为 0.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的根与系数的关系，涉及到根据一元二次方程根的情况求参数，正确掌握当方程有两个不相等的实数根时，即 $\Delta > 0$ 是解题的关键.

25. 某小区居委会为了方便居民的电瓶车充电，准备利用一边靠墙（墙长15米）的空旷场地利用栅栏围城一个面积为80平方米的电瓶车充电区，如图，为了方便进出，在两边空出两个宽各为2.5米的出入口，一共用去栅栏21米，请问长方形的充电区的相邻两边长分别是多少米？



解：设这个长方形电瓶车充电区垂直于墙的一边是 x 米，平行于墙的一边为__米.

根据题意得：（完成填空后继续解题）

【答案】 $(26-2x)$ ；长方形的充电区的相邻两边长分别是8米和10米

【解析】

【分析】 令这个长方形垂直于墙的一边为宽，平行于墙的一边为长；设这个长方形的宽为 x 米，则长为 $(21+2.5+2.5-2x)$ 米，根据工作人员围成的这个长方形等候区的面积为80平方米，可得出关于 x 的一元二次方程，解之即可得出 x 的值，再结合墙长15米，即可确定结论.

【详解】 解：设这个长方形电瓶车充电区垂直于墙的一边是 x 米，平行于墙的一边为 $(26-2x)$ 米，

故答案为： $(26-2x)$ ；

根据题意得： $x(26-2x) = 80$,

解得: $x_1 = 5$, $x_2 = 8$,

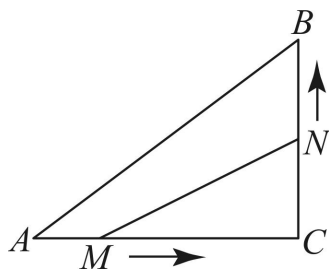
当 $x = 5$ 时, $26 - 2x = 16 > 15$ (不合题意, 舍去);

当 $x = 8$ 时, $26 - 2x = 10$.

答: 长方形的充电区的相邻两边长分别是 8 米和 10 米.

【点睛】 本题考查一元二次方程的应用, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

26. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 16\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, 动点 M 、 N 分别从点 A 和点 C 同时开始移动, 点 M 的速度为 $2\text{cm}/\text{秒}$, 点 N 的速度为 $3\text{cm}/\text{秒}$, 点 M 移动到点 C 后停止, 点 N 移动到点 B 后停止. 问经过几秒钟, $\triangle MCN$ 的面积为 36cm^2 ?



【答案】 2 秒

【解析】

【分析】 设经过 x 秒钟后, $\triangle MCN$ 的面积为 36cm^2 , 则 $CM = AC - AM = (16 - 2x)\text{cm}$, $CN = 3x\text{cm}$, 据此利用三角形面积公式建立方程求解即可.

【详解】 解: 设经过 x 秒钟后, $\triangle MCN$ 的面积为 36cm^2 ,

由题意得, $\frac{1}{2} \times 3x(16 - 2x) = 36$,

$$\therefore x^2 - 8x + 12 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = 6.$$

$$\because 3x \leq 12, \text{ 即 } x \leq 4,$$

$$\therefore x = 6 \text{ 舍去, 即 } x = 2.$$

答: 经过 2 秒, $\triangle MCN$ 的面积为 36cm^2 .

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程在几何图形中的应用, 正确理解题意找到等量关系建立方程是解题的关键.

27. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根均为整数, 则称方程为“快乐方程”. 通过计算

发现, 任何一个“快乐方程”的判别式 $b^2 - 4ac$ 一定为完全平方数. 现规定 $F(a, b, c) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ 为该“快乐

方程”的“快乐数”. 例如“快乐方程” $x^2 - 3x - 4 = 0$ 的两根均为整数, 其“快乐

数” $F(1, -3, -4) = \frac{4 \times 1 \times (-4) - (-3)^2}{4 \times 1} = -\frac{25}{4}$.

(1) “快乐方程” $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的“快乐数”为_____;

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ (m 为整数, 且 $1 < m < 6$) 是“快乐方程”, 求 m 的值, 并求该方程的“快乐数”.

【答案】(1) -4

(2) $3, -\frac{25}{4}$

【解析】

【分析】(1) 首先确定 a 、 b 、 c 的值, 然后根据“快乐数”的定义即可求出该“快乐方程”的“快乐数”;

(2) 首先确定 a 、 b 、 c 的表达式, 然后求得判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 4m + 13$, 根据 m 的取值范围即可确定判别式的取值范围, 由判别式是完全平方数可进一步确定判别式的取值, 进而求得 m 的值及 a 、 b 、 c 的值, 然后根据“快乐数”的定义即可求出该方程的“快乐数”.

【小问 1 详解】

解: 对于“快乐方程” $x^2 - 2x - 3 = 0$,

$$\therefore a = 1, \quad b = -2, \quad c = -3,$$

$\therefore$ 其“快乐数”为:

$$F(1, -2, -3) = \frac{4 \times 1 \times (-3) - (-2)^2}{4 \times 1} = -\frac{16}{4} = -4,$$

故答案为: -4 ;

【小问 2 详解】

解: 对于关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$,

$$\therefore a = 1, \quad b = -(2m-1), \quad c = m^2 - 2m - 3,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= [-(2m-1)]^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - 2m - 3)$$

$$= 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 8m + 12$$

$$= 4m + 13,$$

$$\because 1 < m < 6,$$

$$\therefore 17 < 4m + 13 < 37,$$

$$\because \Delta = b^2 - 4ac = 4m + 13 \text{ 是完全平方数,}$$

$$\therefore 4m + 13 = 25 \text{ 或 } 36,$$

$$\text{若 } 4m + 13 = 25, \text{ 则 } m = 3,$$

$$\text{若 } 4m + 13 = 36, \text{ 则 } m = \frac{23}{4} \text{ (与 } m \text{ 为整数相矛盾, 故舍去),}$$

$$\therefore m = 3,$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -(2m - 1) = -(2 \times 3 - 1) = -5, \quad c = m^2 - 2m - 3 = 3^2 - 2 \times 3 - 3 = 0,$$

$$\text{该一元二次方程变为: } x^2 - 5x = 0,$$

$\therefore$ 该方程的“快乐数”为:

$$F(1, -5, 0) = \frac{4 \times 1 \times 0 - (-5)^2}{4 \times 1} = -\frac{25}{4}.$$

【点睛】 本题主要考查了代数式求值，有理数的四则混合运算，一元二次方程根的判别式，完全平方公式，计算单项式乘多项式，合并同类项，不等式的性质，完全平方数，解一元一次方程等知识点，熟练掌握相关知识点并能加以综合运用是解题的关键.