

2024 学年第一学期八年级数学期中质量检测卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列各式中, 与 $\sqrt{a+b}$ 互为有理化因式的是 ()

- A. $\sqrt{a-b}$ B. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ C. $\sqrt{a+b}$ D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了分母有理化, 熟练掌握两个含二次根式的代数式相乘时, 它们的积不含二次根式, 这样的两个代数式称作互为有理化因式是解题的关键.

根据有理化因式的定义进行判断即可.

【详解】解: 由题意知, 与 $\sqrt{a+b}$ 互为有理化因式的是 $\sqrt{a+b}$,

故选: C.

2. 下列根式中, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt[3]{2}$ C. $\sqrt{8}$ D. $\sqrt{12}$

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查了同类二次根式的定义, 即: 化成最简二次根式后, 被开方数相同, 这样的二次根式叫做同类二次根式.

根据同类二次根式的定义, 先化简, 再判断.

【详解】A、 $\sqrt{6}$ 被开方数不同, 不是同类二次根式, 错误;

B. $\sqrt[3]{2}$ 是立方根, 不是同类二次根式, 错误;

C、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 开方数相同, 是同类二次根式, 正确;

D、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 开方数不同, 不是同类二次根式, 错误.

故选 C.

3. 下列一元二次方程中, 有实数根的是 ()

- A. $x^2 + 2 = 0$ B. $x^2 - x + 2 = 0$ C. $x^2 + x + 2 = 0$ D. $x^2 - x - 2 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，其根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 。当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根。据此逐项分析判断即可。

【详解】解：A、对于方程 $x^2 + 2 = 0$ ，其判别式 $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 2 = -8 < 0$ ，该方程无实数根，不符合题意；
B、对于方程 $x^2 - x + 2 = 0$ ，其判别式 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$ ，该方程无实数根，不符合题意；
C、对于方程 $x^2 + x + 2 = 0$ ，其判别式 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$ ，该方程无实数根，不符合题意；
D、对于方程 $x^2 - x - 2 = 0$ ，其判别式 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ ，该方程有两个不相等的实数根，符合题意。

故选：D。

4. 圆周长公式 $C=2\pi R$ 中，下列说法正确的是（ ）

- A. π 、 R 是变量，2 为常量
B. C 、 R 为变量，2、 π 为常量
C. R 为变量，2、 π 、 C 为常量
D. C 为变量，2、 π 、 R 为常量

【答案】B

【解析】

【分析】根据变量是指在程序的运行过程中随时可以发生变化的量，常量是指在程序的运行过程不发生变化的量，可得答案。

【详解】解：在圆周长公式 $C=2\pi R$ 中，2、 π 是常量， C 、 R 是变量。

故选：B

【点睛】此题考查常量与变量，解题关键在于掌握变量是指在程序的运行过程中随时可以发生变化的量，常量是指在程序的运行过程不发生变化的量，注意 π 是常量。

5. 若正比例函数 $y = mx$ 的图像在第二、四象限，则点 $(m, m-1)$ 在（ ）

- A. 第一象限
B. 第二象限
C. 第三象限
D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了正比例函数的性质和点所在象限的特征，根据正比例函数 $y = mx$ 的图像在第二、四象限， $m < 0$ ，则 $m-1 < 0$ ，根据点所在象限的特征即可得到答案。

【详解】解： $\because$ 正比例函数 $y = mx$ 的图像在第二、四象限，

$$\therefore m < 0,$$

$$\therefore m - 1 < 0,$$

$\therefore$ 点 $(m, m-1)$ 在第三象限,

故选: C

6. 如果一个三角形的三边长分别为 1, k , 4, 那么化简 $|2k-5| - \sqrt{k^2-12k+36}$ 的结果是()

A. $3k-11$

B. $k+1$

C. 1

D. $11-3k$

【答案】 A

【解析】

【分析】 由于三角形的三边长分别为 1、 k 、4, 根据三角形的三边关系, $1+4>k$, 即 $k<5$, $4-1<k$, 所以 $k>3$, 根据 k 的取值范围, 再对代数式进行化简.

$$\text{【详解】 } \therefore \begin{cases} 1+4 > k \\ 4-1 < k \end{cases},$$

解得, $3 < k < 5$,

所以, $2k-5 > 0$, $k-6 < 0$,

$$\therefore |2k-5| - \sqrt{k^2-12k+36}$$

$$= 2k-5 - \sqrt{(k-6)^2}$$

$$= 2k-5 - [-(k-6)]$$

$$= 3k-11.$$

故选 A.

【点睛】 本题考查二次根式的应用, 三角形三边关系, 解题的关键是根据三角形的三边关系确定 k 的取值范围.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 当 x _____ 时, 二次根式 $\sqrt{2x-3}$ 有意义.

【答案】 $x \geq \frac{3}{2}$

【解析】

【详解】 分析: 根据二次根式的定义, 形如 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 的式子叫二次根式, 列不等式解答.

详解: 由题意得

$$2x-3 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq \frac{3}{2}.$$

故答案为 $x \geq \frac{3}{2}$.

点睛：本题考查了二次根式有意义的条件，明确被开方式大于且等于零是二次根式成立的条件是解答本题的关键.

8. 计算： $\sqrt{20} - \sqrt{\frac{9}{5}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ~~##~~ $\frac{7}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】此题考查了二次根式的加减运算，化简后合并同类二次根式即可.

【详解】解： $\sqrt{20} - \sqrt{\frac{9}{5}} = 2\sqrt{5} - \frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{7\sqrt{5}}{5}$

故答案为： $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

9. 计算 $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 1

【解析】

【分析】根据平方差公式计算，即可求解.

【详解】解： $(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$
 $= (\sqrt{5})^2 - 2^2$
 $= 5 - 4$
 $= 1$

故答案为： 1

【点睛】本题主要考查了二次根式的混合运算，灵活利用平方差公式计算是解题的关键.

10. 计算： $(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})^{2019} \times (\sqrt{2019} - \sqrt{2018})^{2018} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\sqrt{2019} + \sqrt{2018}$

【解析】

【分析】将原式根据同底数幂的乘法的逆用和积的乘方的逆用变形，再结合平方差公式即可求解.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】原式} &= \left[(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})(\sqrt{2019} - \sqrt{2018}) \right]^{2018} \cdot (\sqrt{2019} + \sqrt{2018}) \\
 &= \left[(\sqrt{2019})^2 - (\sqrt{2018})^2 \right]^{2018} \cdot (\sqrt{2019} + \sqrt{2018}) \\
 &= 1^{2018} \cdot (\sqrt{2019} + \sqrt{2018}) \\
 &= \sqrt{2019} + \sqrt{2018}.
 \end{aligned}$$

故答案为: $\sqrt{2019} + \sqrt{2018}$.

【点睛】 本题考查二次根式的混合运算, 同底数幂的乘法的逆用、积的乘方的逆用以及平方差公式. 掌握二次根式的混合运算法则是解题关键.

11. 一元二次方程 $3x^2 - \sqrt{5}x - \sqrt{2} = 0$ 的一次项系数是_____.

【答案】 $-\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 此题考查了一元二次方程的一般形式, 根据一元二次方程一般形式的一次项系数的概念进行解答即可.

【详解】 解: 一元二次方程 $3x^2 - \sqrt{5}x - \sqrt{2} = 0$ 的一次项系数是 $-\sqrt{5}$,

故答案为: $-\sqrt{5}$

12. 如果关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + mx + 1 = 0$ 的两根为 1 和 $\frac{1}{2}$, 那么多项式 $2x^2 + mx + 1$ 可分解为_____.

【答案】 $(2x-1)(x-1)$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解及因式分解, 将 $x=1$ 代入原方程, 求出 m 的值, 然后再进行因式分解是解决问题的关键.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 + mx + 1 = 0$ 有一个根是 1,

$\therefore$ 把 $x=1$ 代入, 得 $2+m+1=0$,

解得: $m=-3$.

则 $2x^2 + mx + 1 = 2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)(x-1)$

故答案为: $(2x-1)(x-1)$.

13. 如果两个数的差为 3, 并且它们的积为 88, 那么其中较大的一个数为_____.

【答案】 11 或 -8

【解析】

【分析】根据题意设较小的数为 x ，表示出较大的数，列出方程求出解即可.

【详解】解：设较小的数为 x ，则较大的数为 $x+3$ ，

根据题意得： $x(x+3) = 88$ ，即 $x^2+3x-88=0$ ，

分解因式得： $(x-8)(x+11) = 0$ ，

解得： $x=8$ 或 $x=-11$ ，

$\therefore x+3=11$ 或 -8 ，

则较大的数为 11 或 -8 ，

故答案为： 11 或 -8 .

【点睛】本题主要考查一元二次方程的应用，弄清题意并根据题意列出方程求出解是解答本题的关键.

14. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+x+1=0$ 有实数根，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq \frac{5}{4}$ 且 $m \neq 1$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义及根的判别式，解题关键是掌握一元二次方程根的判别式与根的关系，根据一元二次方程有实数根得根的判别式大于等于 0，及根据一元二次方程的定义得二次项系数不等于 0，列出不等式，求解即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2+x+1=0$ 有实数根，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(m-1) \times 1 \geq 0$ ，且 $m-1 \neq 0$ ，

解得 $m \leq \frac{5}{4}$ 且 $m \neq 1$ ，

故答案为 $m \leq \frac{5}{4}$ 且 $m \neq 1$.

15. 正比例函数 $y=kx(k \neq 0)$ 的图象 $(-3,2)$ ，则图象经过第_____象限.

【答案】 二、四

【解析】

【分析】此题考查了正比例函数的性质，根据题意求出 $k = -\frac{2}{3} < 0$ ，即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 比例函数 $y=kx(k \neq 0)$ 的图象 $(-3,2)$ ，

$\therefore 2 = -3k$ ，

$$\therefore k = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore k = -\frac{2}{3} < 0$$

$\therefore$ 正比例图象经过第二、四象限.

故答案为: 二、四

16. 某型号的手机连续两次降价, 每个售价由原来的 1200 元降到 588 元, 若每次降价的百分率相同, 则平均每次降价的百分率为_____.

【答案】 30%

【解析】

【分析】 此题考查一元二次方程的应用. 设平均每次降价的百分率为 x , 每个售价由原来的 1200 元降到 588 元, 列出一元二次方程, 解之取符合题意的值即可.

【详解】 解: 设平均每次降价的百分率为 x ,

根据题意得: $1200(1-x)^2 = 588$,

解得: $x_1 = 0.3 = 30\%$, $x_2 = 1.7$ (不合题意, 舍去),

即每次降价的百分率为 30%,

故答案为: 30%.

17. 已知 $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1) = 5$, 则 $\sqrt{x} + \sqrt{y} =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 设 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$, 可得 $(a+3)(a-1) = 5$, 再解方程并结合非负数的性质即可求解.

【详解】 解: 设 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$,

则 $(a+3)(a-1) = 5$,

整理得, $a^2 + 2a = 8$,

配方得, $a^2 + 2a + 1 = 8 + 1$,

即 $(a+1)^2 = 9$,

开平方得, $a+1 = \pm 3$,

$\therefore a_1 = 2$, $a_2 = -4$,

$$\because a = \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2,$$

故答案为: 2.

18. 如果一元二次方程的两根相差 1, 那么该方程为“差 1 方程”. 例如 $x^2 + x = 0$ 是“差 1 方程”. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$ (a 是常数, 且 $a \neq 0$) 是“差 1 方程”, 则 a 的值为_____.

【答案】 $a = -5$ 或 $a = 1$

【解析】

【分析】 根据题意可得 $x_1 - x_2 = 1$, 可得 $(x_1 - x_2)^2 = 1$, 求得 $x_1^2 + x_2^2 = \frac{a+2}{a}$, 再根据一元二次方程的根与系数的关系可得 $x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{a}$, 求得 $x_1^2 + x_2^2 = \frac{5-2a}{a^2}$, 从而可得 $\frac{a+2}{a} = \frac{5-2a}{a^2}$, 再解分式方程即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$ 是“差 1 方程”,

$$\therefore x_1 - x_2 = 1,$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = 1, \text{ 即 } x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 1,$$

$$\because x_1x_2 = \frac{1}{a},$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 1 + \frac{2}{a} = \frac{a+2}{a},$$

$$\text{又 } \because x_1 + x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{a},$$

$$\therefore (x_1 + x_2)^2 = \frac{5}{a^2}, \text{ 即 } x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{5}{a^2},$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 = \frac{5}{a^2} - \frac{2}{a} = \frac{5-2a}{a^2},$$

$$\therefore \frac{a+2}{a} = \frac{5-2a}{a^2}, \text{ 即 } a(a+2) = 5-2a,$$

解得 $a = -5$ 或 $a = 1$,

故答案为: $a = -5$ 或 $a = 1$.

【点睛】 本题考查新定义、一元二次方程的根与系数的关系、解分式方程、完全平方公式, 理解新定义求得 $x_1^2 + x_2^2 = \frac{a+2}{a}$, $x_1^2 + x_2^2 = \frac{5-2a}{a^2}$, 是解题的关键.

三、简答题 (本大题共 5 题, 每题 6 分, 共 30 分)

19. 计算: $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - (\sqrt{3}+1)^2 - \sqrt{\frac{3}{4}}$

【答案】 $-2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，先把 $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - (\sqrt{3}+1)^2 - \sqrt{\frac{3}{4}}$ 进行分母有理化以及运用完全平方公式化简，得 $2 + \sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ，再进行合并同类二次根式，即可作答.

【详解】 解: $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - (\sqrt{3}+1)^2 - \sqrt{\frac{3}{4}}$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - (3+2\sqrt{3}+1) - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= 2 + \sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= -2 - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

20. 计算: $3\sqrt{x^2y} \times \frac{1}{6}\sqrt{\frac{x^2}{y}} \div 2\sqrt{x^3y^2} (x > 0, y > 0)$

【答案】 $\frac{\sqrt{x}}{4y}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的乘除法，根据二次根式的乘除法法则进行计算即可.

【详解】 解: $3\sqrt{x^2y} \times \frac{1}{6}\sqrt{\frac{x^2}{y}} \div 2\sqrt{x^3y^2}$

$$= \left(3 \times \frac{1}{6} \div 2\right) \sqrt{x^2y \cdot \frac{x^2}{y} \div x^3y^2}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{x^2y \cdot \frac{x^2}{y} \cdot \frac{1}{x^3y^2}}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x}{y^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{4y}.$$

21. 解方程: $3x^2 - 16x + 5 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 5$

【解析】

【分析】 本题考查了用公式法解一元二次方程. 先求出 $b^2 - 4ac$ 的值, 再代入求根公式求出答案即可.

【详解】 解: $3x^2 - 16x + 5 = 0$,

这里 $a = 3$, $b = -16$, $c = 5$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 196 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{16 \pm \sqrt{196}}{2 \times 3} = \frac{8 \pm 7}{3}.$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 5$$

22. 用配方法解方程: $2x^2 - 8x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 此题考查了配方法解一元二次方程, 解题关键是理解并掌握配方法解一元二次方程的方法和步骤. 原方程变形为 $(x-2)^2 = \frac{9}{2}$, 利用开平方即可得到答案.

【详解】 解: $2x^2 - 8x - 1 = 0$,

移项得, $2x^2 - 8x = 1$,

$$\therefore x^2 - 4x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x^2 - 4x + 2^2 = \frac{1}{2} + 2^2,$$

则 $(x-2)^2 = \frac{9}{2}$,

$$\therefore x - 2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } x - 2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

解得 $x_1 = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{4-3\sqrt{2}}{2}$.

23. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (2k-1)x + \frac{3}{4}k+1=0$, 其根的判别式的值是 1, 求 k 的值.

【答案】8

【解析】

【分析】本题考查了利用一元二次方程根的情况求参数, 由一元二次方程的 $\Delta = b^2 - 4ac = 1$, 建立 k 的方程, 求出 k 的解即可.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (2k-1)x + \frac{3}{4}k+1=0$, 其根的判别式的值是 1,

$$\therefore (2k-1)^2 - 4k\left(\frac{3}{4}k+1\right) = 1,$$

$$\therefore k^2 - 8k = 0,$$

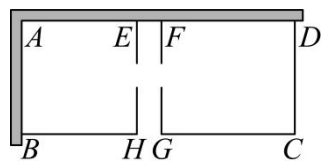
$$\therefore k = 0 \text{ 或 } k = 8,$$

$$\because k \neq 0,$$

$$\therefore k \text{ 的值为 } 8.$$

四、解答题: (本大题共 3 题, 第 24、26 题 8 分, 第 25 题 6 分, 共 22 分)

24. 某农场要建一个饲养场 (矩形 ABCD) 两面靠现有墙 (AD 位置的墙最大可用长度为 27 米, AB 位置的墙最大可用长度为 15 米), 另两边用木栏围成, 中间也用木栏隔开, 分成两个场地及一处通道, 并在如图所示的三处各留 1 米宽的门 (不用木栏). 建成后木栏总长 45 米. 设饲养场 (矩形 ABCD) 的一边 AB 长为 x 米.



(1) 饲养场另一边 $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ 米 (用含 x 的代数式表示).

(2) 若饲养场的面积为 180 平方米, 求 x 的值.

【答案】(1) $48-3x$; (2) 10.

【解析】

【分析】(1) 用 (总长+3 个 1 米的门的宽度) $-3x$ 即为所求;

(2) 由 (1) 表示饲养场面积计算即可,

【详解】(1) 由题意得: $(48-3x)$ 米.

故答案是: $(48-3x)$;

(2) 由题意得: $x(48-3x) = 180$

解得 $x_1=6$, $x_2=10$

$\because 0 \leq 48-3x \leq 27, 0 \leq x \leq 15$

$\therefore 7 \leq x \leq 15$

$\therefore x=10$

【点睛】此题考查一元二次方程的应用. 解题关键是要读懂题目的意思, 根据题目给出的条件, 找出合适的等量关系, 列出方程, 再求解.

25. 定义: 对于给定的两个函数, 当 $x \geq 0$ 时, 它们对应函数值相等; 当 $x < 0$ 时, 它们对应的函数值互为相反数. 我们称这样的两个函数互为相关函数.

例如: 正比例函数 $y = -x$, 它的相关函数为 $y = \begin{cases} -x & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$

(1) 已知点 $M(-1, m)$ 在正比例函数 $y = -x$ 的相关函数的图象上, 则 m 的值为_____;

(2) 已知正比例函数 $y = 2x$

①这个函数的相关函数为_____;

②若点 $N(n, 3)$ 在这个函数的相关函数的图象上, 求 n 的值.

【答案】(1) -1

(2) ① $y = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases}$; ② $n = \frac{3}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据题意把点 $M(-1, m)$ 代入 $y = x$ 求解即可;

(2) ①根据相关函数的定义求解即可; ②分类讨论: 当 $n \geq 0$ 、 $n < 0$ 时, 分别把点 $N(n, 3)$ 代入相应的函数求解即可.

【小问1详解】

解: $\because$ 点 $M(-1, m)$ 在正比例函数 $y = -x$ 的相关函数的图象上, $-1 < 0$,

$\therefore$ 把点 $M(-1, m)$ 代入 $y = x$ 得, $m = -1$,

故答案为: -1 ;

【小问2详解】

解：①由题意可得，正比例函数 $y = 2x$ 的相关函数为 $y = \begin{cases} 2x (x \geq 0) \\ -2x (x < 0) \end{cases}$,

故答案为： $y = \begin{cases} 2x (x \geq 0) \\ -2x (x < 0) \end{cases}$;

② $\because$ 点 $N(n, 3)$ 在这个函数的相关函数的图象上,

当 $n \geq 0$ 时, 把点 $N(n, 3)$ 代入 $y = 2x$ 得, $2n = 3$,

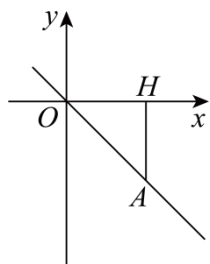
$$\therefore n = \frac{3}{2},$$

当 $n < 0$ 时, 把点 $N(n, 3)$ 代入 $y = -2x$ 得, $-2n = 3$,

$$\therefore n = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore n = \frac{3}{2} \text{ 或 } -\frac{3}{2}.$$

26. 如图, 已知正比例函数 $y = kx$ 的图像经过点 A , 点 A 在第四象限, 过点 A 作 $AH \perp x$ 轴, 垂足为 H , 点 A 的横坐标为 4, 且 $\triangle AOH$ 的面积为 8.



(1) 求正比例函数的解析式;

(2) 若点 P 是该正比例函数 $y = kx$ 图像上一点, 且使得 $\triangle AHP$ 的面积是 $\triangle AOH$ 面积的两倍, 求点 P 的坐标;

(3) 已知 $OA = 4\sqrt{2}$, 在直线 OA 上 (除 O 点外) 是否存在点 M , 使得 $\triangle AHM$ 为等腰三角形? 若存在, 直接写出 OM 的长; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = -x$

(2) 点 P 的坐标为 $(12, -12)$ 或 $(-4, 4)$

(3) OM 的长为 $4\sqrt{2} - 4$ 或 $4\sqrt{2} + 4$ 或 $2\sqrt{2}$

【解析】

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 A 的横坐标为 4, $S_{\triangle AOH} = 8$,

$\therefore$ 点 A 的纵坐标为 -4 ,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4, -4)$,

$\because$ 正比例函数 $y = kx$ 的图像经过点 A ,

$\therefore -4 = 4k$,

解得 $k = -1$,

$\therefore$ 正比例函数的解析式为 $y = -x$;

【小问 2 详解】

解: 存在,

$\because A(4, -4)$,

$\therefore AH = 4$,

设点 P 的坐标为 $(m, -m)$,

$\because \triangle AHP$ 的面积是 $\triangle AOH$ 面积的两倍,

$\therefore S_{\triangle AHP} = 2 \times 8 = 16$,

$\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times |4 - m| = 16$,

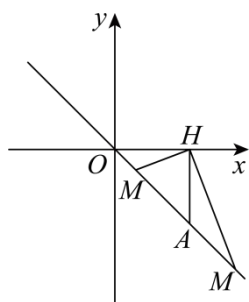
解得: $m = 12$ 或 $m = -4$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(12, -12)$ 或 $(-4, 4)$.

【小问 3 详解】

解: 当 $AM = AH = 4$, 点 M 在点 A 的上方时, $OM = OA - AM = 4\sqrt{2} - 4$;

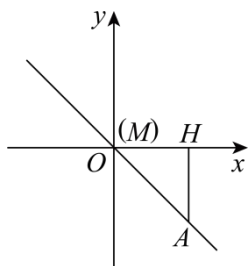
点 M 在点 A 的下方时, $OM = OA + AM = 4\sqrt{2} + 4$;



当 $MH = AH = 4$ 时, $\therefore OH = 4$,

$\therefore$ 点 M 与点 O 重合,

∴ 此时点 M 不符合题意；



当 $AM = MH$ 时，

$$\therefore AH = OH = 4, \quad \angle AHO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAH = \angle AOH = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

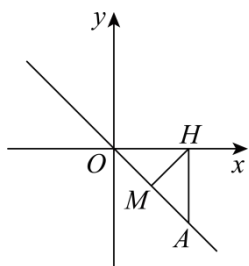
$$\therefore \angle AHM = \angle MAH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AMH = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore MH \perp OA,$$

$$\therefore OH = AH,$$

$$\therefore AM = OM = \frac{1}{2}OA = 2\sqrt{2};$$



综上所述可知， OM 的长为 $4\sqrt{2} - 4$ 或 $4\sqrt{2} + 4$ 或 $2\sqrt{2}$ 。

【分析】 (1) 先利用三角形面积公式得到 A 点坐标，然后利用待定系数法求正比例函数解析式；

(2) 设点 P 的坐标为 $(m, -m)$ ，根据三角形面积公式得出 $\frac{1}{2} \times 4 \times |4 - m| = 16$ ，求出 $m = 12$ 或 $m = -4$ ，即可求出点 P 的坐标；

(3) 分三种情况进行讨论，当 $AM = AH = 4$ 时，当 $MH = AH = 4$ 时，当 $AM = MH$ 时，分别画出图形，求出结果即可。

【点睛】 本题考查了正比例函数图像的性质、待定系数法求正比例函数的解析式，等腰三角形的判定和性质，三角形面积的计算，解题的关键是数形结合，画出图形，注意进行分类讨论。