

南模初中 2024 学年第一学期八年级数学作业反馈 1 试卷

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 得分_____

考试时间：90 分钟 满分：100 分

一、选择题（本大题共 6 题，每题 2 分，满分 12 分）

1. 下列二次根式中最简二次根式是（ ）

A. $\sqrt{\frac{9}{x}}$

B. $\sqrt{12x}$

C. $\sqrt{x^2+1}$

D. $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查最简二次根式的定义。根据最简二次根式的定义，最简二次根式必须满足两个条件：(1) 被开方数不含分母；(2) 被开方数不含能开得尽方的因数或因式。根据最简二次根式的定义逐项分析判断即可求解。

【详解】解：A. $\sqrt{\frac{9}{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x}$ ，原式含有分母，不是最简二次根式，故该选项不符合题意；

B. $\sqrt{12x} = 2\sqrt{3x}$ ，原式不是最简二次根式，故该选项不符合题意；

C. $\sqrt{x^2+1}$ 是最简二次根式，故该选项符合题意；

D. $\sqrt{x^2+2xy+y^2} = \sqrt{(x+y)^2} = |x+y|$ ，原式不是最简二次根式，故该选项不符合题意；

故选：C。

2. 下列根式中与 $\sqrt{ab}$ 不是同类二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{\frac{a}{b}}$

B. $\sqrt{\frac{b}{a}}$

C. $3\sqrt{ab}$

D. $\sqrt{ab^2}$

【答案】D

【解析】

【详解】根据同类二次根式定义可得：

A 选项： $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$ ，所以与 $\sqrt{ab}$ 是同类二次根式，故与题意不符；

B 选项： $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$ ，所以与 $\sqrt{ab}$ 是同类二次根式，故与题意不符；

C 选项: $3\sqrt{ab}$ 与 $\sqrt{ab}$ 是同类二次根式, 故与题意不符;

D 选项: $\sqrt{ab^2}$ 与 $\sqrt{ab}$ 是不是同类二次根式, 故与题意相符;

故选 D.

3. 式子 $\sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}}$ 成立的条件是 ()

A. $x \geq 3$

B. $x \leq 1$

C. $1 \leq x \leq 3$

D. $1 < x \leq 3$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式的意义和分母不为零的条件, 列不等式组求解.

【详解】解: 由二次根式的意义可知 $x-1 > 0$, 且 $3-x \geq 0$,

解得 $1 < x \leq 3$.

故选: D.

【点睛】注意: 根号里的数必须为非负数且分母不能为 0.

4. 若 $a = \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{11}}$, $b = \sqrt{10} - \sqrt{11}$, 则 a 与 b 的关系是 ()

A. $a = \frac{1}{b}$

B. $a = -\frac{1}{b}$

C. $a < b$

D. $a > b$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了实数的大小比较及分母有理化, 先根据二次根式的运算法则将 a 分母有理化, 再将 a 与 b 比较即可.

【详解】解: $a = \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{(\sqrt{11} + \sqrt{10})(\sqrt{11} - \sqrt{10})} = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{10}}{11 - 10} = \sqrt{11} - \sqrt{10} > 0$,

$b = \sqrt{10} - \sqrt{11} < 0$,

$\therefore a > b$,

故选: D

5. 当 $x < 0$, $y < 0$ 时, 在下列各式的计算中, 正确的是 ()

$$A. \sqrt{x^2 y^5} = xy^2 \sqrt{xy}$$

$$B. \sqrt{x^5 y^3} = -x^2 y \sqrt{xy}$$

$$C. \sqrt{4x^3 y} = 2x \sqrt{-xy}$$

$$D. \sqrt{-9x^4 y} = -3x^2 \sqrt{y}$$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的性质，二次根式有意义的条件，根据二次根式性质，结合 $x < 0$ ， $y < 0$ ，逐项进行化简，然后得出答案即可.

【详解】 解： A. $\because x < 0$ ， $y < 0$ ，

$$\therefore x^2 y^5 < 0,$$

$\therefore \sqrt{x^2 y^5}$ 无意义，故 A 错误；

B. $\because x < 0$ ， $y < 0$ ，

$$\therefore \sqrt{x^5 y^3} = \sqrt{x^4 y^2 \cdot xy} = |x^2 y| \sqrt{xy} = -x^2 y \sqrt{xy}, \text{ 故 B 正确；}$$

C. $\because x < 0$ ， $y < 0$ ，

$$\therefore \sqrt{4x^3 y} = \sqrt{4x^2 \cdot xy} = |2x| \sqrt{xy} = -2x \sqrt{xy}, \text{ 故 C 错误；}$$

D. $\because x < 0$ ， $y < 0$ ，

$$\therefore \sqrt{-9x^4 y} = \sqrt{9x^4 \cdot (-y)} = |3x^2| \cdot \sqrt{-y} = 3x^2 \sqrt{-y}, \text{ 故 D 错误.}$$

故选： D.

6. 在下列式子中等号能成立的式子共有 ()

$$\textcircled{1} \sqrt{0.9x^2} = 0.3x; \textcircled{2} \sqrt{3^2 + 2^2} = 3 + 2 = 5; \textcircled{3} \sqrt{(-5)^2} = \pm 5; \textcircled{4} \sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5}; \textcircled{5} \sqrt{9x^2 + 3} = 3\sqrt{x+3}.$$

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的乘法法则，二次根式的性质. 根据二次根式的乘法法则，二次根式的性质化简，逐项判断即可.

【详解】 解： $\textcircled{1} \sqrt{0.9x^2} = 0.3|x| \sqrt{10} \neq 0.3x$ ，不成立；

$$\textcircled{2} \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \neq 5, \text{ 不成立；}$$

③ $\sqrt{(-5)^2} = 5$ ，不成立；

④ $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{2}$ 不能合并，不成立；

⑤ $\sqrt{9x^2+3}$ 是最简二次根式，不能化简，不成立；

故成立的个数为 0 个，

故选：A.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 代数式 $\sqrt{\frac{2}{1-x}}$ 中，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x < 1$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件和分式有意义的条件，根据二次根式的被开方数大于等于零，分式的分母不等于零，列出不等式，解不等式即可.

【详解】 解： $\because$ 代数式 $\sqrt{\frac{2}{1-x}}$ 有意义，

$$\therefore \begin{cases} \frac{2}{1-x} \geq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases},$$

解得： $x < 1$.

故答案为： $x < 1$.

8. $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ 的倒数是_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m-n}$

【解析】

【分析】 此题考查了分母有理化及倒数的定义，熟练掌握运算是解本题的关键. 利用倒数定义及分母有理化求出所求即可.

【详解】 解： $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ 的倒数是 $\frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{(\sqrt{m} - \sqrt{n})(\sqrt{m} + \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{m - n}$,

故答案为： $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m-n}$.

9. 化简: $\sqrt{\frac{5x}{12y^3}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{\sqrt{15xy}}{6y^2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质和二次根式有意义的条件，掌握以上知识是解题的关键。根据二次根式有意义的条件得出 $x > 0$ ， $y > 0$ 或 $x < 0$ ， $y < 0$ ，然后分两种情况，根据二次根式性质进行化简即可。

【详解】 解: $\because \sqrt{\frac{5x}{12y^3}}$ 有意义,

$$\therefore \frac{5x}{12y^3} > 0,$$

$$\therefore x > 0, y > 0 \text{ 或 } x < 0, y < 0,$$

$$\text{当 } x > 0, y > 0 \text{ 时, } \sqrt{\frac{5x}{12y^3}} = \sqrt{\frac{5 \times 3xy}{36y^4}} = \frac{\sqrt{15xy}}{|6y^2|} = \frac{\sqrt{15xy}}{6y^2};$$

$$\text{当 } x < 0, y < 0 \text{ 时, } \sqrt{\frac{5x}{12y^3}} = \sqrt{\frac{5 \times 3xy}{36y^4}} = \frac{\sqrt{15xy}}{|6y^2|} = \frac{\sqrt{15xy}}{6y^2};$$

故答案为: $\frac{\sqrt{15xy}}{6y^2}.$

10. 化简: $\sqrt{3p^2 + 6pq + 3q^2} \quad (p \geq 0, q \geq 0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\sqrt{3}(p+q)$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，解决本题的关键是熟练掌握二次根式的性质，利用二次根式的性质进行化简即可。

【详解】 解: $\sqrt{3p^2 + 6pq + 3q^2},$

$$= \sqrt{3(p^2 + 2pq + q^2)},$$

$$= \sqrt{3(p+q)^2},$$

$$\because p \geq 0, q \geq 0,$$

$$\therefore p+q \geq 0,$$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{3}(p+q),$$

故答案为: $\sqrt{3}(p+q)$.

11. 分母有理化: $\frac{1}{4-2\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

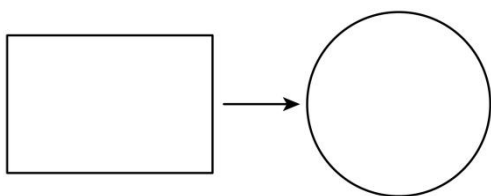
【解析】

【分析】 本题主要考查了分母有理化, 分子分母同时乘以 $4+2\sqrt{3}$, 然后化简即可.

【详解】 解: $\frac{1}{4-2\sqrt{3}} = \frac{4+2\sqrt{3}}{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})} = \frac{2(2+\sqrt{3})}{16-12} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$

故答案为: $\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$

12. 二次根式的乘法在生活和高科技领域中有着广泛的应用, 如图, 在“神舟八号”中要将某一部件的一个长方形变化成等面积的一个圆形, 已知长方形的长是 $\sqrt{140\pi}\text{cm}$, 宽是 $\sqrt{35\pi}\text{cm}$, 那么圆的半径应是 _____.



【答案】 $\sqrt{70}\text{cm}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式乘法的应用, 算术平方根的应用, 先根据长方形的面积求出长方形的面积 $\sqrt{140\pi} \times \sqrt{35\pi} = 70\pi (\text{cm}^2)$, 即可得出圆的面积, 然后根据圆的面积公式求出结果即可.

【详解】 解: $\because$ 长方形的长是 $\sqrt{140\pi}\text{cm}$, 宽是 $\sqrt{35\pi}\text{cm}$,

$$\therefore \text{长方形的面积为: } \sqrt{140\pi} \times \sqrt{35\pi} = 70\pi (\text{cm}^2),$$

$\therefore$ 圆的面积等于长方形的面积,

$$\therefore \text{圆的面积为 } 70\pi\text{cm}^2,$$

$$\therefore \text{圆的半径为 } \sqrt{\frac{70\pi}{\pi}} = \sqrt{70}(\text{cm}).$$

故答案为: $\sqrt{70}\text{cm}$.

13. 把 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 中根号外的 a 移入根号内, 则 $a\sqrt{-\frac{1}{a}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\sqrt{-a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了化简二次根式, 熟知二次根式的性质是解题的关键. 根据二次根式的性质进行求解即可.

【详解】 解: $\because$ 二次根式 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 要有意义,

$$\therefore -\frac{1}{a} \geq 0,$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore a\sqrt{-\frac{1}{a}} = -\sqrt{-\frac{1}{a} \cdot a^2} = -\sqrt{-a},$$

故答案为: $-\sqrt{-a}$.

14. 若 $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$, 则 $x^2 - 2x + 2$ 的值为 ____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查分母有理化、完全平方公式及代数式求值, 正确化简得出 x 的值是解题关键. 利用分母有理化化简求出 x 的值, 把原式配方后代入 x 计算即可得答案.

【详解】 解: $\because x = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1,$

$$\therefore x^2 - 2x + 2$$

$$= (x-1)^2 + 1$$

$$= (\sqrt{3}+1-1)^2 + 1$$

$$= 3+1$$

$$= 4.$$

故答案为：4

15. 若最简二次根式 $a\sqrt{3b+5}$ 与 $\sqrt{4a-1}$ 是同类二次根式，则代数式 $a^2 - ab + b^2$ 的值为_____.

【答案】7

【解析】

【分析】此题主要考查了同类二次根式的定义，即：二次根式化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式，也考查了代数式求值. 根据最简二次根式与同类二次根式的定义列方程组求解后，再求代数式的值即可.

【详解】解：由题意，得

$$\begin{cases} a-1=2 \\ 4a-1=3b+5 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases},$$

$$\therefore a^2 - ab + b^2 = 3^2 - 3 \times 2 + 2^2 = 7$$

故答案为：7

16. 计算： $\sqrt{-a^2} + \sqrt{a+1} - \sqrt{7-2a} + \sqrt{-(a-7)}$ =_____.

【答案】1

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式加减运算，二次根式有意义的条件，根据二次根式有意义的条件求出 $a=0$ ，再把 $a=0$ 代入 $\sqrt{-a^2} + \sqrt{a+1} - \sqrt{7-2a} + \sqrt{-(a-7)}$ 求出结果即可.

【详解】解：根据二次根式有意义的条件可知： $-a^2 \geq 0$ ，

$$\therefore a=0,$$

把 $a=0$ 代入 $\sqrt{-a^2} + \sqrt{a+1} - \sqrt{7-2a} + \sqrt{-(a-7)}$ 得：

$$\text{原式} = 0 + 1 - \sqrt{7} + \sqrt{7} = 1.$$

故答案为：1.

17. 已知 ABC 的三边长分别为 a 、 b 、 c ，且满足 $\sqrt{a^2 - 12a + 36} + \sqrt{b-8} = 0$ 求最大边 c 的取值范围_____.

【答案】 $8 < c < 14$ ## $14 > c > 8$

【解析】

【分析】 本题主要考查了算术平方根的应用，三角形三边关系的应用，完全平方公式，先根据算术平方根的非负性得出 $a=6$ ， $b=8$ ，再根据三角形的三边关系求出最大边 c 的取值范围即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{a^2-12a+36}+\sqrt{b-8}=0$,

$$\therefore \sqrt{(a-6)^2}+\sqrt{b-8}=0,$$

$$\therefore a-6=0, \quad b-8=0,$$

解得： $a=6$ ， $b=8$ ，

$\because \triangle ABC$ 的三边长分别为 a 、 b 、 c ，且 c 为最大边，

$$\therefore \begin{cases} 8-6 < c < 6+8 \\ c > 8 \end{cases},$$

$$\therefore 8 < c < 14.$$

故答案为： $8 < c < 14$.

18. 如果无理数 m 的值介于两个连续正整数之间，即满足 $a < m < b$ (其中 a 、 b 为连续正整数)，我们则称无理数 m 的“神奇区间”为 (a, b) . 例： $2 < \sqrt{5} < 3$ ，所以 $\sqrt{5}$ 的“神奇区间”为 $(2, 3)$. 若某一无理数的“神奇区间”为 (a, b) ，且满足 $6 < \sqrt{a} + b \leq 16$ ，其中 $x = b$ ， $y = \sqrt{a}$ 是关于 x 、 y 的二元一次方程组 $bx + ay = p$ 的一组正整数解，则 $p = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 33 或 127##127 或 33

【解析】

【分析】 根据“神奇区间”的定义，还有二元一次方程正整数解这两个条件，寻找符合的情况.

【详解】 解： $\because$ “神奇区间”为 (a, b) ，

$\therefore a$ 、 b 为连续正整数，

$\because 6 < \sqrt{a} + b \leq 16$ ， $x = b$ ， $y = \sqrt{a}$ 是关于 x 、 y 的二元一次方程组 $bx + ay = p$ 的一组正整数解，

$\therefore$ 符合条件的 a ， b 有 ① $a = 4$ ， $b = 5$ ， $\sqrt{a} = 2$ ； ② $a = 9$ ， $b = 10$ ， $\sqrt{a} = 3$.

① $a = 4$ ， $b = 5$ ， $\sqrt{a} = 2$ 时， $x = 5$ ， $y = 2$ ，

$$5 \times 5 + 4 \times 2 = p,$$

$$\therefore p = 33,$$

② $a = 9$ ， $b = 10$ ， $\sqrt{a} = 3$ 时， $x = 10$ ， $y = 3$ ，

$$10 \times 10 + 9 \times 3 = p,$$

$$\therefore p = 127,$$

故 p 的值为 33 或 127,

故答案为: 33 或 127.

【点睛】 本题考查新定义, 估算无理数大小, 二元一次方程整数解相关知识, 综合考查学生分析、计算能力.

三、计算题 (本大题共 8 题, 满分 40 分)

19. 计算: $\sqrt{75} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + 10\sqrt{\frac{1}{5}}$

【答案】 $4\sqrt{3} - \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 先逐项化简, 再合并同类二次根式即可.

【详解】 原式 $= 5\sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + 2\sqrt{5}$

$$= 5\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

$$= 4\sqrt{3} - \sqrt{2} + 2\sqrt{5}.$$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算: 先把二次根式化为最简二次根式, 然后进行二次根式的乘除运算, 再合并即可. 在二次根式的混合运算中, 如能结合题目特点, 灵活运用二次根式的性质, 选择恰当的解题途径, 往往能事半功倍.

20. 计算: $8\sqrt{a} - b\sqrt{\frac{1}{a}} + \frac{1}{a^2}\sqrt{a^3b^2} (b > 0)$

【答案】 $8\sqrt{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的加减法运算、二次根式的化简与性质, 熟练掌握二次根式的性质和运算规则是解题的关键. 先将各个二次根式化简, 再进行加减运算, 合并同类二次根式即可.

【详解】 解: $8\sqrt{a} - b\sqrt{\frac{1}{a}} + \frac{1}{a^2}\sqrt{a^3b^2},$

$$= 8\sqrt{a} - \frac{b}{a}\sqrt{a} + \frac{ab}{a^2}\sqrt{a},$$

$$= 8\sqrt{a} - \frac{b}{a}\sqrt{a} + \frac{b}{a}\sqrt{a}.$$

$$= 8\sqrt{a}$$

21. 计算: $-5\sqrt{2.5} \times \left(-\sqrt{3\frac{1}{5}}\right) + \sqrt{1\frac{3}{5}}$

【答案】 $10\sqrt{2} + \frac{2}{5}\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握二次根式的性质、二次根式的乘法是解决问题的关键. 先利用二次根式的乘法法则运算, 然后化简二次根式即可.

【详解】 解: 原式 $= -5\sqrt{\frac{5}{2}} \times \left(-\sqrt{\frac{16}{5}}\right) + \sqrt{\frac{8}{5}}$

$$= 5\sqrt{\frac{5}{2} \times \frac{16}{5}} + \sqrt{\frac{8}{5}}$$

$$= 5\sqrt{8} + \sqrt{\frac{8}{5}}$$

$$= 10\sqrt{2} + \frac{2}{5}\sqrt{10}$$

22. 计算: $\sqrt{15} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

【答案】 $\sqrt{15} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的加减法, 掌握二次根式的加减法法则是关键. 化为最简二次根式即可.

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{15} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$= \sqrt{15} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{5}}{5}$$

23. 计算: $\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

【答案】 $\frac{15}{2} - \frac{9}{2}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算及分母有理化, 先进行分母有理化, 再相加减即可.

【详解】解： $\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} - \frac{2-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}},$

$$= \frac{(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} - \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)},$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3}{4-3} - \frac{2\sqrt{3}-2-3+\sqrt{3}}{3-1},$$

$$= 5-3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}-5}{2},$$

$$= 5-3\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2},$$

$$= \frac{15}{2} - \frac{9}{2}\sqrt{3}.$$

24. 计算： $3\sqrt{\frac{1}{3}} - \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + (\sqrt{5}+\sqrt{3})^0$

【答案】 $2\sqrt{3} - \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查实数的混合运算，根据分数指数幂、零指数幂和二次根式的性质运算法则分别进行计算，然后合并解题即可.

【详解】解： $3\sqrt{\frac{1}{3}} - \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + (\sqrt{5}+\sqrt{3})^0$

$$= \sqrt{3} - \frac{3}{2} - (2-\sqrt{3}) + 1$$

$$= \sqrt{3} - \frac{3}{2} - 2 + \sqrt{3} + 1$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{5}{2}.$$

25. 解不等式： $\sqrt{3}x - 3 > 2x + \sqrt{12}$

【答案】 $x < -7\sqrt{3} - 12$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一元一次不等式的解集，二次根式的运算，先移项，合并同类项，然后再将系数化为1即可.

【详解】解： $\sqrt{3}x - 3 > 2x + \sqrt{12}$ ，

移项，合并同类项得： $(\sqrt{3} - 2)x > 3 + 2\sqrt{3}$ ，

系数化为 1 得： $x < \frac{3 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}$ ，

即 $x < -7\sqrt{3} - 12$ 。

26. 解方程： $\sqrt{7}x = 2\sqrt{2}(x + 1) - 3\sqrt{2}$

【答案】 $x = 4 + \sqrt{14}$

【解析】

【分析】本题考查了解方程，解决本题的关键是熟练掌握解方程的步骤及二次根式的运算法则，先去括号，再移项并合并，再进行分母有理化即可。

【详解】解： $\sqrt{7}x = 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ ，

$$\sqrt{7}x - 2\sqrt{2}x = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}，$$

$$(2\sqrt{2} - \sqrt{7})x = \sqrt{2}，$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - \sqrt{7}}，$$

$$x = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{7})}{(2\sqrt{2} - \sqrt{7})(2\sqrt{2} + \sqrt{7})}，$$

$$x = \frac{4 + \sqrt{14}}{8 - 7}，$$

$$x = 4 + \sqrt{14}。$$

四、解答题（本大题共 3 题，满分 24 分）

27. 求代数式 $a + \sqrt{1 - 2a + a^2}$ 的值，其中 $a = 1007$ ，如图是小亮和小芳的解答过程：



小亮

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= a + \sqrt{(1-a)^2} \\ &= a + 1 - a = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &= a + \sqrt{(1-a)^2} \\ &= a + a - 1 = 2013\end{aligned}$$



小芳

(1) _____ 的解法是错误的;

(2) 求代数式 $a + 2\sqrt{a^2 - 6a + 9}$ 的值, 其中 $a = -2024$.

【答案】(1) 小亮 (2) 2030

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的化简求值, 熟练掌握二次根式的性质是解题的关键.

(1) 根据二次根式的性质化简求值即可得解;

(2) 根据二次根式的性质化简求值即可得解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 当 $a = 1007$ 时, $1 - a < 0$,

$$\therefore a + \sqrt{1 - 2a + a^2} = a + \sqrt{(1-a)^2} = a + |1-a| = a - (1-a) = a - 1 + a = 2a - 1,$$

$\therefore$ 小亮的计算错误, 小芳的计算正确;

【小问 2 详解】

$$\text{解: } a + 2\sqrt{a^2 - 6a + 9}$$

$$= a + 2\sqrt{(a-3)^2}$$

$$= a + 2|a-3|,$$

当 $a = -2024$ 时, $a - 3 < 0$,

$$\therefore \text{原式} = a + 2(3-a) = 6 - a = 6 + 2024 = 2030.$$

28. 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}-2}$, 求 $x^3y + xy^3$ 的值.

【答案】-14

【解析】

【分析】本题主要考查了分母有理化, 分解因式, 先分母有理化求出 $x = 2 - \sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3} - 2$, 然后对

$x^3y + xy^3$ 进行因式分解, 最后代入求值即可.

$$\text{【详解】解: } \because x = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = -\sqrt{3}-2,$$

$$\therefore x^3y + xy^3$$

$$= xy(x^2 + y^2)$$

$$= (2-\sqrt{3})(-2-\sqrt{3}) \left[(2-\sqrt{3})^2 + (-2-\sqrt{3})^2 \right]$$

$$= \left[(-\sqrt{3})^2 - 2^2 \right] (4 - 4\sqrt{3} + 3 + 4 + 4\sqrt{3} + 3)$$

$$= (3-4) \times 14$$

$$= -14.$$

29. 阅读下面内容: 我们已经学习了《二次根式》和《乘法公式》, 聪明的你可以发现: 当 $a > 0$, $b > 0$ 时,

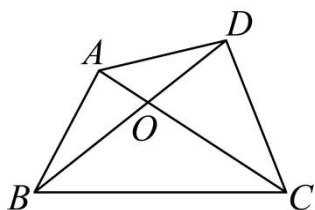
$$\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, \therefore a + b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ 当且仅当 } a = b \text{ 时取等号. 请利用上述结论解决以下问题:}$$

下问题:

(1) 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 _____; 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最大值为 _____.

(2) 当 $x > 0$ 时, 求 $y = \frac{x^2 + 3x + 16}{x}$ 的最小值.

(3) 如图, 四边形 ABCD 的对角线 AC, BD 相交于点 O, $\triangle AOB$ 、 $\triangle COD$ 的面积分别为 4 和 9, 求四边形 ABCD 面积的最小值.



【答案】(1) 2, -2; (2) 11; (3) 25

【解析】

【分析】(1) 当 $x > 0$ 时, 按照公式 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (当且仅当 $a=b$ 时取等号) 来计算即可; $x < 0$ 时, 由于 $-x > 0$, $-\frac{1}{x} > 0$, 则也可以按照公式 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (当且仅当 $a=b$ 时取等号) 来计算;

(2) 将 $y = \frac{x^2 + 3x + 16}{x}$ 的分子分别除以分母, 展开, 将含 x 的项用题中所给公式求得最小值, 再加上常数即可;

(3) 设 $S_{\triangle BOC} = x$, 已知 $S_{\triangle AOB} = 4$, $S_{\triangle COD} = 9$, 则由等高三角形可知: $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COD} = S_{\triangle AOB} : S_{\triangle AOD}$, 用含 x 的式子表示出 $S_{\triangle AOD}$, 四边形 $ABCD$ 的面积用含 x 的代数式表示出来, 再按照题中所给公式求得最小值, 加上常数即可.

【详解】解: (1) 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$

当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} = -\left(-x - \frac{1}{x}\right)$

$$\therefore -x - \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{(-x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)} = 2$$

$$\therefore -\left(-x - \frac{1}{x}\right) \leq -2$$

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2; 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最大值为 -2;

$$(2) \text{ 由 } y = \frac{x^2 + 3x + 16}{x} = x + \frac{16}{x} + 3$$

$\therefore x > 0$,

$$\therefore y = x + \frac{16}{x} + 3 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} + 3 = 11$$

当 $x = \frac{16}{x}$ 时, 最小值为 11;

(3) 设 $S_{\triangle BOC} = x$, 已知 $S_{\triangle AOB} = 4$, $S_{\triangle COD} = 9$

则由等高三角形可知: $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COD} = S_{\triangle AOB} : S_{\triangle AOD}$

$$\therefore x : 9 = 4 : S_{\triangle AOD}$$

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{36}{x}$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 面积} = 4 + 9 + x + \frac{36}{x} \geq 13 + 2\sqrt{x \cdot \frac{36}{x}} = 25$$

当且仅当 $x=6$ 时取等号，即四边形 ABCD 面积的最小值为 25.

【点睛】 本题考查了配方法在最值问题中的应用，同时本题还考查了分式化简和等高三角形的性质，本题难度中等略大.