

八年级第一学期数学第三阶段素养分析

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列二次根式中与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{12}$

B. $\sqrt{0.3}$

C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$

D. $\sqrt{18}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查同类二次根式, 判断是否为同类二次根式, 需将各选项化简为最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式是同类二次根式.

【详解】 解: A: $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式;

B: $\sqrt{0.3} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式;

C: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式;

D: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式.

故选: A.

2. 下列关于 x 的方程中, 一定有两个不相等的实数根的是 ()

A. $x^2 - 2x + 4 = 0$

B. $x^2 - 2x + 1 = 0$

C. $x^2 - mx - 1 = 0$

D. $x^2 - mx + m - 1 = 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程根的情况, 熟知判别式是解题关键. 根据二次方程根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$, 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根. 逐一计算各选项的判别式, 判断其是否恒大于 0.

【详解】 A、方程 $x^2 - 2x + 4 = 0$, 判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0$, 方程无实数根, 故本选项不符合题意;

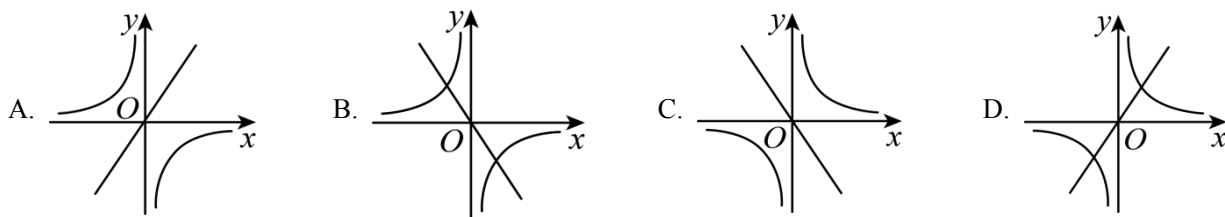
B、方程 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 判别式 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$, 方程有两个相等实数根, 故本选项不符合题意;

C、方程 $x^2 - mx - 1 = 0$ ，判别式 $\Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = m^2 + 4$ 。因 $m^2 \geq 0$ ，故 $m^2 + 4 \geq 4 > 0$ ，方程恒有两个不相等实数根，故本选项符合题意；

D、方程 $x^2 - mx + m - 1 = 0$ ，判别式 $\Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 \geq 0$ 。当 $m = 2$ 时， $\Delta = 0$ ，方程有两个相等实数根，不满足“一定不相等”，故本选项不符合题意；

故选：C。

3. 已知函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，那么它和函数 $y = kx (k \neq 0)$ 在同一直角坐标平面内的大致图象是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数图象的性质与正比例函数图象的性质，掌握 k 对正比例函数和反比例函数图象的影响成为解答本题的关键。

先根据反比例函数图象的性质判断出 k 的范围，再确定其所在象限，进而确定正比例函数图象所在象限即可解答。

【详解】解：∵ 函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，

∴ $k > 0$ ，

∴ 函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在第一、三象限，函数 $y = kx$ 的图象经过第一、三象限，

∴ D 选项满足题意。

故选：D。

4. 下列问题中，两个变量成正比例的是 ()

A. 圆的面积和它的半径；

B. 长方形的面积一定时，它的长和宽；

C. 正方形的周长与边长；

D. 三角形的面积一定时，它的一条边长与这条边上的高。

【答案】C

【解析】

【分析】先列出函数关系式，然后再根据正比例函数的定义即可解答.

【详解】解：A、圆的面积 $S = \pi r^2$ ，不是正比例函数，故此选项不符合题意；

B、长方形的面积 S 一定时，它的长 a 和宽 b 的关系 $S = ab$ ，不是正比例函数，故此选项不符合题意；

C. 正方形的周长 $C = \text{边长} \times 4 = 4a$ ，是正比例函数，故此选项符合题意；

D. 三角形的面积 S 一定时，它的底边 a 和底边上的高 h 的关系 $S = \frac{1}{2}ah$ ，不是正比例函数，故此选项不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查正比例函数的定义，解题的关键是掌握正比例函数的定义：一般地，两个变量 x 、 y 之间的关系式可以表示成形如 $y = kx$ (k 为常数，且 $k \neq 0$) 的函数，那么 y 就叫做 x 的正比例函数.

5. 已知下列命题中：

①有两条边分别相等的两个直角三角形全等；

②有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等；

③有一条边与一个锐角分别相等的两个直角三角形全等；

④顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等.

其中真命题的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质逐个排查即可.

【详解】解：①由于 SSA 不能判定三角形全等，则有两边分别相等的两个直角三角形不一定全等，故原命题是假命题；

②由于满足 ASA ，则有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等，故原命题是真命题；

③有一条边与一个锐角分别对应相等的两个直角三角形全等，故原命题是假命题；

④由于两等腰三角形顶角相等，则他们的底角对应相等，再结合底相等，满足 ASA ，故原命题是真命题.

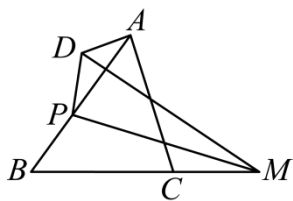
其中真命题的个数是 2 个.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质等知识点，灵活应用相关知识成为解答本题的关键.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 3$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， M 是 BC 延长线上一点， $CM = 2$ ， P 是边 AB 上一动点，连接 PM ，作 $\triangle DPM$ 与 $\triangle BPM$ 关于 PM 对称 (点 D 与点 B 对应)，连结 AD ，则 AD 长的最

小值是 ()



A. 0.5

B. 0.6

C. $5 - \sqrt{21}$

D. $\sqrt{13} - 3$

【答案】C

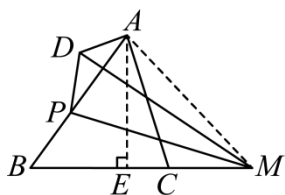
【解析】

【分析】如图, 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 当点 A 在 DM 的上时 AD 的值最小, 根据勾股定理依次求出 AE , CE , AM , DM 的长, 即可解决问题.

【详解】解: 如图, 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 连接 MA ,

$$\because AD \geq MD - AM$$

当点 A 在 DM 上时 AD 的值最小, 如图,



$$\because CM = 2, \quad BC = 3,$$

$$\therefore BM = BC + CM = 5,$$

由折叠得: $DM = BM = 5$,

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because AB = 4, \quad BC = 3$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AB = 2,$$

在中 $\text{Rt} \triangle ABE$ 中,

$$\because AE^2 + BE^2 = AB^2,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore EM = BM - BE = 5 - 2 = 3,$$

在 $\text{Rt} \triangle AEM$ 中,

$$\because AE^2 + EM^2 = AM^2,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AE^2 + EM^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{21},$$

$$\therefore AD_{\text{最小}} = DM - AM = 5 - \sqrt{21}.$$

故选 C.

【点睛】本题主要考查了翻折变换的性质，勾股定理，最值问题等知识，两边之差小于第三边，解题的关键是作出辅助线，从整体上把握题意，准确找到图形中数量关系.

二、填空题：(本大题共有 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 化简： $\sqrt{-9a^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-3a\sqrt{-a}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的化简，掌握二次根式的性质 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$ 、 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键；利用二次根式的性质化简即可，注意这里字母 a 只能取非正数.

【详解】解：由题意知， $a \leq 0$,

$$\sqrt{-9a^3} = \sqrt{9a^2 \cdot (-a)} = -3a\sqrt{-a};$$

故答案为： $-3a\sqrt{-a}.$

8. 函数 $y = \frac{5}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $x > 2$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件 $x-2 \neq 0$ ，形如 $\sqrt{a} (a \geq 0)$ 的式子叫作二次根式解答.

本题考查了二次根式有意义条件，正确理解 $x-2 \geq 0$ 是解题的关键.

【详解】解：根据题意，得 $x-2 \neq 0$ ，且 $x-2 \geq 0$ ，

解得 $x \geq 2$ ，且 $x \neq 2$ ，

故 $x > 2$ ，

故答案为： $x > 2.$

9. 在实数范围内因式分解： $2x^2 - x - 2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $2(x - \frac{1+\sqrt{17}}{4})(x - \frac{1-\sqrt{17}}{4})$

【解析】

【分析】当要求在实数范围内进行因式分解时，分解的式子的结果一般要分到出现无理数为止。 $2x^2-x-2$ 不是完全平方式，所以只能用求根公式法分解因式。

【详解】 $2x^2-x-2=0$ 的解是 $x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$, $x_2=-\frac{1-\sqrt{17}}{4}$, 所以 $2x^2-x-2=2(x-\frac{1+\sqrt{17}}{4})(x-\frac{1-\sqrt{17}}{4})$.

【点睛】本题考查了实数范围内的因式分解，因式分解的步骤为：一提公因式；二看公式。在实数范围内进行因式分解的式子的结果一般要分到出现无理数为止。求根公式法分解因式： $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ ，其中 x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根。

10. 不等式 $\sqrt{3}x-3x < 6$ 的解集是_____.

【答案】 $x > -\sqrt{3}-3$

【解析】

【分析】根据一元一次不等式的解法进行计算即可求解。

【详解】解： $\sqrt{3}x-3x < 6$,

$$\text{即 } (\sqrt{3}-3)x < 6$$

$$\because \sqrt{3}-3 < 0,$$

$$\therefore x > \frac{6}{\sqrt{3}-3}$$

$$\therefore x > -\sqrt{3}-3;$$

故答案为： $x > -\sqrt{3}-3$.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式，分母有理化，正确的计算是解题的关键。

11. 如果正比例函数 $y=(m-1)x^{m^2-1}$ 的图象经过第二、四象限，那么 m 的值为_____.

【答案】 $-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】首先根据正比例函数的定义可得 $m^2-1=1$ ，且 $m-1 \neq 0$ ，解出 m 的值，再根据图象经过第二、四象限，可得 $m-1 < 0$ ，进而确定 m 。

【详解】解：由题意得： $m^2-1=1$ ，且 $m-1 \neq 0$,

$$\text{解得： } m = \pm \sqrt{2},$$

$\because$ 图象经过第二、四象限，

$$\therefore m-1 < 0,$$

解得 $m < 1$,

$$\therefore m = -\sqrt{2},$$

故答案为: $-\sqrt{2}$.

【点睛】此题主要考查了正比例函数的定义和性质, 关键是掌握正比例函数的定义条件: k 为常数且 $k \neq 0$, 自变量次数为 1.

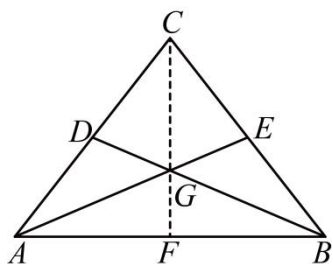
12. 以 AB 为底边的等腰三角形, 它的两腰上的中线交点的轨迹是_____.

【答案】线段 AB 的垂直平分线 (底边中点 F 除外)

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质, 三角形中线的性质, 线段垂直平分线的逆定理. 根据三角形的三条中线交于一个, 和等腰三角形的性质即可得到结论.

【详解】解: 如图,



$\because CA = CB$, D 、 E 分别是 CA 、 CB 的中点, 点 G 是 AE 、 BD 的交点,

连接 CG 并延长交 AB 于点 F ,

$\therefore CF$ 是底边 AB 的中线, 也是 AB 的垂线,

$\therefore$ 点 G 在底边 AB 的垂直平分线上 (底边中点 F 除外),

故答案为: 线段 AB 的垂直平分线 (底边中点 F 除外).

13. 已知点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 都在反比例函数 $y = \frac{a^2+1}{x}$ (a 是常数) 的图象上, 且

$y_1 < y_2 < 0 < y_3$, 则 x_1 , x_2 , x_3 的大小关系用 “ $<$ ” 连接为_____.

【答案】 $x_2 < x_1 < x_3$

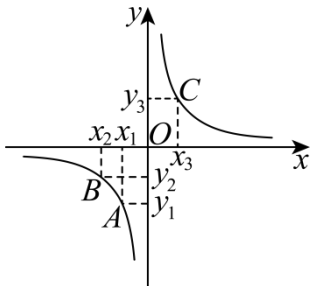
【解析】

【分析】本题考查反比例函数的图象和性质, 先判断 $k = a^2 + 1 > 0$, 可知反比例函数的图象在一、三象限, 再利用图象法可得答案, 理解 “在每个象限内, y 随 x 的增大而减小” 以及图象法是解决问题的关键.

【详解】解： $\because a^2 + 1 > 0$,

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{a^2 + 1}{x}$ (a 是常数) 的图象在一、三象限,

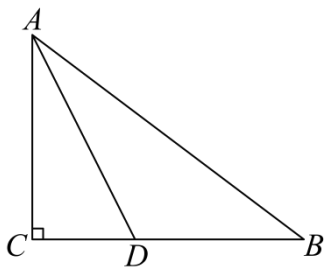
如图所示, 当 $y_1 < y_2 < 0 < y_3$ 时, $x_3 > 0 > x_1 > x_2$,



即 $x_2 < x_1 < x_3$

故答案为: $x_2 < x_1 < x_3$.

14. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, AD 平分 $\angle CAB$, 如果 $CD = 1$, 那么 $BD = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 根据角平分线上的点到角的两边的距离相等可得 $DE = CD$, 再求出 $\triangle BDE$ 是等腰直角三角形, 然后根据等腰直角三角形斜边等于直角边的 $\sqrt{2}$ 倍解答.

【详解】解: 如图, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ,

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$, $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore DE = CD = 1$,

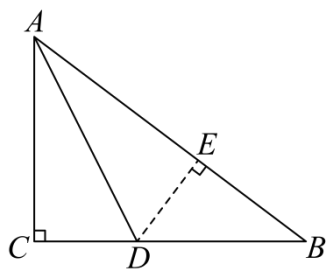
$\because AC = BC$, $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle B = 45^\circ$,

$\therefore \triangle BDE$ 是等腰直角三角形,

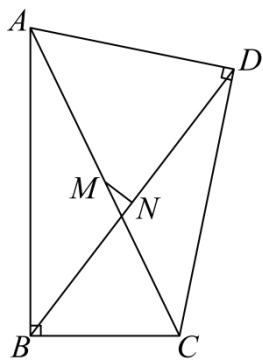
$\therefore BD = \sqrt{2} DE = \sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2}$.



【点睛】 本题主要考查了角平分线上的点到角的两边的距离相等的性质，等腰直角三角形的直角边与斜边的关系.

15. 如图，在四边形 ABCD 中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AC = 26$ ， $BD = 24$ ，M、N 分别是 AC、BD 的中点，则线段 MN 的长为_____.

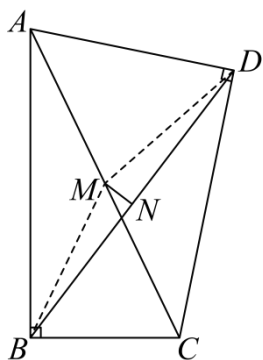


【答案】 5

【解析】

【分析】 根据在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半得到 $BM = DM = 13$ ，根据等腰三角形的性质得到 $BN = 12$ ，根据勾股定理得到答案.

【详解】 连接 BM、DM，



$\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，M 是 AC 的中点，

$\therefore BM = \frac{1}{2} AC$ ， $DM = \frac{1}{2} AC$ ，

$\therefore BM = DM = 13$ ，又 N 是 BD 的中点，

$\therefore BN = DN = \frac{1}{2} BD = 12$ ，

$$\therefore MN = \sqrt{BM^2 - BN^2} = 5,$$

故答案为 5.

【点睛】 本题考查的是直角三角形的性质、等腰三角形的性质，掌握在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

16. 已知在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ， $AB = 8$ 厘米， $AC = 5$ 厘米，那么 $BC =$ _____ 厘米.

【答案】 $(4\sqrt{3} + 3)$ 或 $(4\sqrt{3} - 3)$

【解析】

【分析】 利用含 30° 角的直角三角形的性质可得 $AD = 4$ 厘米，利用勾股定理可求出 $BD = 4\sqrt{3}$ 厘米，然后分点 D 在线段 BC 上和点 D 在线段 BC 的延长线上两种情况，分别求解即可.

【详解】 解：如图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ，

$$\because \angle B = 30^\circ, AB = 8 \text{ 厘米},$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AB = 4 \text{ 厘米},$$

$$\therefore BD = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3} \text{ (厘米)},$$

当点 D 在线段 BC 上时，

$$\because AC = 5 \text{ 厘米},$$

$$\therefore CD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (厘米)},$$

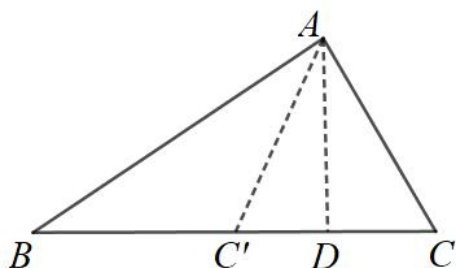
$$\therefore BC = (4\sqrt{3} + 3) \text{ 厘米}$$

当点 D 在线段 BC 的延长线上时，

同理可得， $C'D = 3$ 厘米，

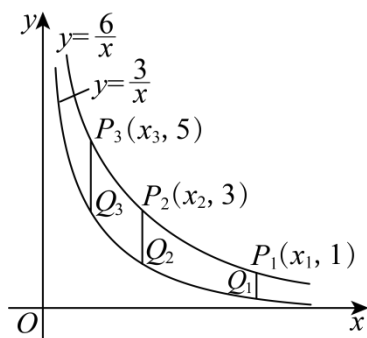
$$\therefore BC' = (4\sqrt{3} - 3) \text{ 厘米},$$

故答案为： $(4\sqrt{3} + 3)$ 或 $(4\sqrt{3} - 3)$.



【点睛】 本题考查了含 30° 角的直角三角形的性质，勾股定理，正确分类讨论是解题的关键.

17. 两个反比例函数 $y = \frac{3}{x}$, $y = \frac{6}{x}$ 在第一象限内的图象如图所示, 点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2024}$ 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 图象上, 它们的横坐标分别是 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2024}$, 纵坐标分别是 1, 3, 5, $\dots$, 共 2024 个连续奇数, 过点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2024}$ 分别作 y 轴的平行线, 与 $y = \frac{3}{x}$ 的图象交点依次是 $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2), Q_3(x_3, y_3), \dots, Q_{2024}(x_{2024}, y_{2024})$, 则线段 $P_{2024}Q_{2024}$ 的长为_____.



【答案】 2023.5

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征. 先得到第 2024 个奇数为 4047, 再根据反比例函数图象上点的坐标特征得 P_{2024} 的坐标为 $(\frac{6}{4047}, 4047)$, 由 $P_{2024}Q_{2024}$ 平行 y 轴, 所以 Q_{2024} 的横坐标为 $\frac{6}{4047}$, 然后再利用反比例函数图象上点的坐标特征确定 Q_{2024} 的纵坐标, 据此即可求解.

【详解】 解: $\because$ 第 2024 个奇数为 $2 \times 2024 - 1 = 4047$,

$$\therefore P_{2024} \text{ 的坐标为 } \left(\frac{6}{4047}, 4047 \right),$$

$\because P_{2024}Q_{2024}$ 平行 y 轴,

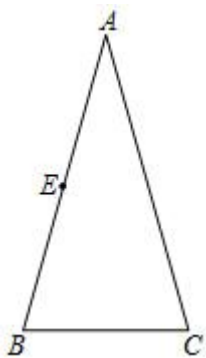
$$\therefore Q_{2024} \text{ 的横坐标为 } \frac{6}{4047},$$

$$\therefore Q_{2024} \text{ 的纵坐标为 } \frac{\frac{3}{\frac{6}{4047}}}{4047} = 2023.5$$

$$\therefore P_{2024}Q_{2024} = 4047 - 2023.5 = 2023.5.$$

故答案为: 2023.5.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 12$, $\angle A = 30^\circ$, 点 E 是 AB 中点, 点 D 在 AC 上, $DE = 3\sqrt{2}$, 将 $\triangle ADE$ 沿着 DE 翻折, 点 A 的对应点是点 F , 直线 EF 与 AC 交于点 G , 那么 $\triangle DGF$ 的面积 = _____.



【答案】 $6\sqrt{3}-9$ 或 $6\sqrt{3}+9$

【解析】

【分析】分两种情况：①如图 1，当点 D 在 H 点上方时，过点 E 作 $EH \perp AC$ 交 AC 于点 E ，过点 G 作 $GQ \perp AB$ 交 AB 于点 Q ，②如图 2，当点 D 在 H 点下方时，过点 E 作 $EH \perp AC$ 交 AC 于点 E ，过点 G 作 $GQ \perp AB$ 交 AB 于点 Q ，先求出三角形 AEG 的 AE 边上的高 GQ 和三角形 ADE 的 AD 边上的高，根据 $S_{\triangle DGF} = 2S_{\triangle AED} - S_{\triangle AEG}$ 可分别求出答案.

【详解】解：①如图 1，当点 D 在 H 点上方时，过点 E 作 $EH \perp AC$ 交 AC 于点 E ，过点 G 作 $GQ \perp AB$ 交 AB 于点 Q ，

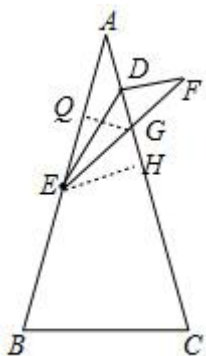


图1

$\because AB = 12$ ，点 E 是 AB 的中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AB = 6,$$

$\because EH \perp AC$,

$$\therefore \angle AHE = 90^\circ,$$

$\because \angle A = 30^\circ$ ， $AE = 6$,

$$\therefore AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\because DE = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore DH = \sqrt{DE^2 - EH^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3,$$

$$\therefore DH = EH, AD = AH - DH = 3\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore \angle EDH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle EDH - \angle A = 15^\circ,$$

由折叠的性质可知, $\angle DEF = \angle AED = 15^\circ$,

$$\therefore \angle AEG = 2\angle AED = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle A,$$

$$\therefore AG = GE,$$

$$\because GQ \perp AE,$$

$$\therefore AQ = \frac{1}{2}AE = 3,$$

$$\because \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore GQ = \frac{1}{2}AG,$$

$$\therefore GQ^2 + 3^2 = (2GQ)^2,$$

$$\therefore GQ = \sqrt{3}.$$

$$\therefore S_{\triangle AED} = S_{\triangle FED},$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = 2S_{\triangle AED} - S_{\triangle AEG},$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = 2 \times \frac{1 \times (3\sqrt{3} - 3)}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3} - 9.$$

②如图2, 当点 D 在 H 点下方时, 过点 E 作 $EH \perp AC$ 交 AC 于点 H , 过点 G 作 $GQ \perp AB$ 交 AB 于点 Q ,

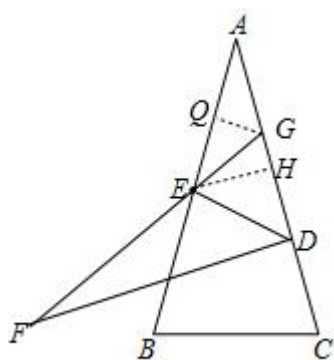


图2

$$\because AB = 12, \text{ 点 } E \text{ 是 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 6,$$

$$\because EH \perp AC,$$

$$\therefore \angle AHE = 90^\circ,$$

同理求得 $DH = EH$, $AH = 3\sqrt{3}$, $AD = 3\sqrt{3} + 3$,

$$\therefore \angle DEH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 90^\circ - \angle A + \angle DEH = 105^\circ,$$

由折叠的性质可得出 $\angle DEF = \angle AED = 105^\circ$,

$$\therefore \angle AEG = 2\angle AED - 180^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle A,$$

$$\therefore AG = GE,$$

同①求出 $GQ = \sqrt{3}$,

$$\therefore S_{\triangle DGF} = 2S_{\triangle AED} - S_{\triangle AEG},$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = 2 \times \frac{1}{2} \times (3\sqrt{3} + 3) \times 3 - \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 9.$$

故答案为: $6\sqrt{3} - 9$ 或 $6\sqrt{3} + 9$.

【点睛】 本题考查了折叠的性质, 等腰三角形的性质, 直角三角形的性质, 勾股定理, 等腰直角三角形的性质, 熟练掌握折叠的性质是解题的关键.

三、简答题: (本大题共有 5 题, 每小题 6 分, 满分 30 分)

19. 计算: $\sqrt{6} \times \sqrt{8} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}} - |1 - \sqrt{3}|$

【答案】 $4\sqrt{3} - 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算. 根据二次根式的混合运算进行计算即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \sqrt{6} \times \sqrt{8} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + 6\sqrt{\frac{1}{3}} - |1 - \sqrt{3}| \\ &= 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

20. 解方程: $4x(x-1) + 1 = 2x$

【答案】 $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程. 先化为一般式, 然后根据公式法解一元二次方程即可求解.

【详解】 解: $4x(x-1)+1=2x$,

去括号得 $4x^2-4x+1-2x=0$,

即 $4x^2-6x+1=0$,

$\therefore a=4, b=-6, c=1$,

$\therefore \Delta=b^2-4ac=36-16=20>0$,

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6\pm2\sqrt{5}}{8}$,

解得: $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{4}, x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

21. 已知关于 x 的方程 $(m-1)x^2+2mx+m+3=0$ 有两个实数根, 请求出 m 的最大整数值.

【答案】 m 的最大整数值为 0

【解析】

【分析】 根据方程有两个实数根, 得到根的判别式大于等于 0, 确定出 m 的范围, 进而求出最大整数值即可.

【详解】 解: $\therefore$ 关于 x 的方程 $(m-1)x^2+2mx+m+3=0$ 有两个实数根,

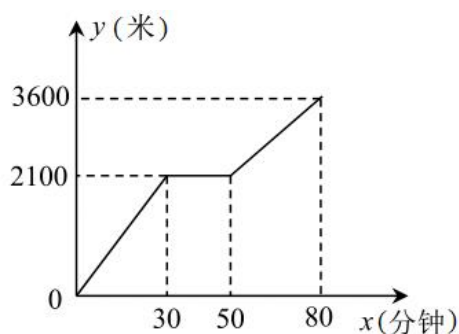
$\therefore b^2-4ac=(2m)^2-4(m-1)(m+3)=4m^2-(4m^2+8m-12)=4m^2-4m^2-8m+12=-8m+12\geq 0, m-1\neq 0$,

解得: $m\leq \frac{3}{2}$ 且 $m\neq 1$,

则 m 的最大整数值为 0.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式的应用, 准确计算是解题的关键.

22. 小明爸妈上山游玩, 爸爸步行, 妈妈乘坐缆车, 相约在山顶缆车的终点会合. 步行的路程是缆车所经线路长的 2.5 倍, 妈妈在爸爸出发后 50 分钟才坐上缆车, 缆车的平均速度为每分钟 180 米. 图中反映了爸爸整个过程中步行的路程 y (米) 与时间 x (分钟) 之间的函数关系.



- (1) 爸爸行走的总路程是_____米，他途中休息了_____分钟；
- (2) 当 $0 \leq x \leq 30$ 时， y 与 x 之间的函数关系式是_____；
- (3) 爸爸休息之后，行走的速度是每分钟_____米；当妈妈到达缆车终点时，爸爸离缆车终点的路程是_____米。

【答案】 (1) 3600； 20

(2) $y = 70x$

(3) 50； 1100

【解析】

【分析】 (1) 根据图象获取信息：爸爸到达山顶用时 80 分钟，中途休息了 20 分钟，行程为 3600 米；

(2) 利用待定系数法解答正比例函数解析式即可；

(3) 休息前 30 分钟行走 2100 米，休息后 30 分钟行走 $(3600 - 2100)$ 米，利用路程、时间得出速度即可，先求妈妈到达缆车终点的时间，再计算爸爸行走路程，从而求出爸爸离缆车终点的路程。

【小问 1 详解】

根据图象知：爸爸行走的总路程是 3600 米，他途中休息了 20 分钟。

故答案为 3600， 20；

【小问 2 详解】

设函数关系式为 $y = kx$ ，图像过 $(30, 2100)$

可得： $2100 = 30k$ ，

解得： $k = 70$ ，

所以解析式为： $y = 70x$ ，

故答案为 $y = 70x$ ；

【小问 3 详解】

爸爸休息之后行走的速度是 $(3600 - 2100) \div (80 - 50) = 50$ 米 / 分钟,

妈妈到达缆车终点的时间: $3600 \div 2.5 \div 180 = 8$ (分),

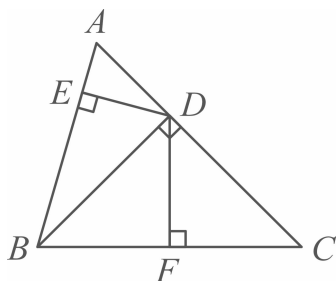
此时爸爸比妈妈迟到 $80 - 50 - 8 = 22$ (分),

$\therefore$ 妈妈到达终点时, 爸爸离缆车终点的路程为: $50 \times 22 = 1100$ (米),

故答案为 50; 1100.

【点睛】此题考查一次函数及其图象的应用, 从图象中获取相关信息是关键.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BD \perp AC$, 垂足为点 D , $DE \perp AB$, 垂足为点 E , $DF \perp BC$, 垂足为点 F , 且点 F 是 BC 中点, 若 $BD = 6$, $DE = 3$, $DF = 3\sqrt{2}$.



(1) 求 CD 的长;

(2) 求 $\angle ABC$ 的度数.

【答案】(1) $CD = 6$

(2) $\angle ABC = 75^\circ$

【解析】

【分析】(1) 在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中, 勾股定理得出 $BF = 3\sqrt{2}$, 继而得出 $BC = 6\sqrt{2}$, 在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, 勾股定理求得 DC 的长;

(2) 取 BD 的中点, 连接 EG , 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 得出 $EG = \frac{1}{2}BD = GD = 3$,

进而得出 $\triangle EGD$ 是等边三角形, 根据直角三角形的两个锐角互余得出 $\angle ABD = 30^\circ$, 根据 (1) 的结论得出 $\triangle BDC$ 是等腰直角三角形, 根据 $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because DF \perp BC$,

$\therefore \angle BFD = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中, $BD = 6$, $DF = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore BF = \sqrt{BD^2 - DF^2} = 3\sqrt{2}$$

又 $\because$ 点 F 是 BC 中点,

$$\therefore BC = 6\sqrt{2},$$

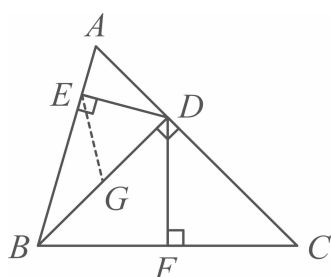
$$\therefore BD \perp AC$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, $DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 6,$

【小问2详解】

解: 如图, 取 BD 的中点, 连接 EG ,



$$\therefore DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中, $BD = 6$, $DE = 3$,

$$\therefore EG = \frac{1}{2}BD = GD = 3$$

$$\therefore ED = EG = GD$$

$\therefore \triangle EGD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BDE = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = DC = 6, \angle BDC = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle BDC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DBC = 45^\circ,$$

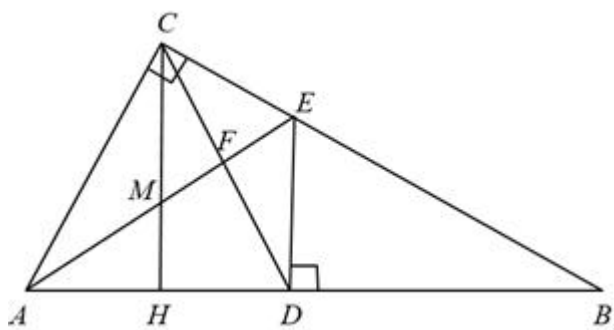
$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

【点睛】 本题考查了勾股定理, 等腰直角三角形的性质, 等边三角形的性质与判定, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 综合运用以上知识是解题的关键.

四、解答题 (本大题共3小题, 第24、25题每小题8分, 第26题12分, 满分28分)

24. $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 、 E 分别为边 AB 、 BC 上的点, 且 $CD = CA$, $DE \perp AB$, 联结 AE

交 CD 与点 F ，点 M 是 AE 的中点，联结 CM 并延长与 AB 交于点 H 。



(1) 点 F 是 CD 中点时，求证： $AE \perp CD$ ；

(2) 求证： $MH^2 + HD^2 = AM^2$

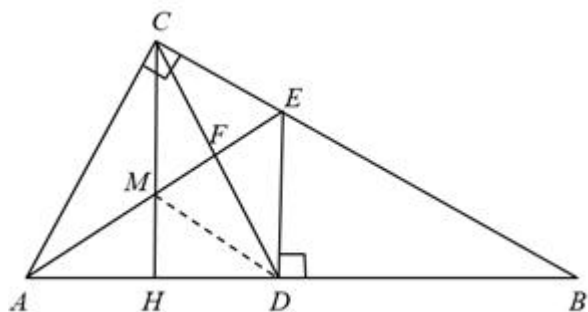
【答案】 (1) 见解析； (2) 见解析。

【解析】

【分析】 (1) 联结 MD ，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $MC = MD$ ，根据点 F 是 CD 中点，即可判断 AE 是 CD 的垂直平分线；

(2) 证明 CH 是 AD 的垂直平分线，可得 $HA = HD$ ，进而在 $Rt\triangle MHA$ 中， $MH^2 + HA^2 = AM^2$ ，等量代换即可得 $MH^2 + HD^2 = AM^2$

【详解】 (1) 证明：联结 MD 。



$\because DE \perp AB$,

$\therefore \angle EDA = 90^\circ$

$\because$ 点 M 是 AE 的中点，

$\therefore MD = \frac{1}{2}AE$ 。同理可证： $CM = \frac{1}{2}AE$ ，

$\therefore CM = MD$ 。

$\because$ 点 F 是 CD 中点，

$\therefore AE \perp CD$ 。

(2) 证明： $\because DE \perp AB$ ，

$$\therefore \angle DEA = 90^\circ.$$

$\because$ 点 M 是 AE 的中点,

$$\therefore MD = MA = \frac{1}{2} AE.$$

$$\because CD = CA,$$

$\therefore$ 点 M , 点 C 在线段 AD 的垂直平分线上.

$\therefore CM$ 是线段 AD 的垂直平分线.

$$\therefore CH \perp AD, HA = HD.$$

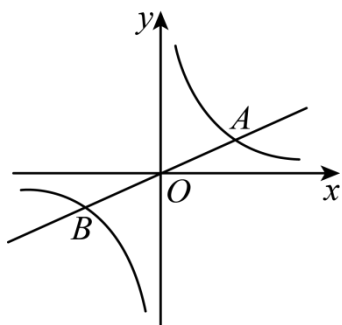
$$\therefore \angle MHA = 90^\circ.$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle MHA \text{ 中, } MH^2 + HA^2 = AM^2$$

$$\therefore MH^2 + HD^2 = AM^2.$$

【点睛】本题考查了垂直平分线的性质与判定，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，勾股定理，掌握垂直平分线的性质与判定是解题的关键.

25. 如图，在平面直角坐标系中，正比例函数 $y = \frac{1}{3}x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于点 A 、点 B ，已知点 $A(3, m)$.



(1) 求 m 的值及反比例函数的解析式;

(2) 求点 B 的坐标和线段 AB 的长;

(3) 如果点 C 在坐标轴上，且 $\triangle ABC$ 的面积为 6，求点 C 的坐标.

【答案】(1) $m = 1$, $y = \frac{3}{x}$;

(2) $B(-3, -1)$, $2\sqrt{10}$;

(3) 点 C 的坐标为 $(6, 0)$ 或 $(-6, 0)$ 或 $(0, 2)$ 或 $(0, -2)$.

【解析】

【分析】(1) 将 $A(3, m)$ 代入正比例函数解析式可求出 m ，得到点 A 坐标，然后利用待定系数法可求出反比例函数的解析式;

(2) 利用中心对称图形的性质, 求出点 B 坐标, 然后利用勾股定理求出 AB 即可;

(3) 分两种情况讨论: ①当 C 在 x 轴上时, ②当 C 在 y 轴上时, 分别根据 ABC 的面积为 6 列式求出 OC 即可.

【小问 1 详解】

解: 将 $A(3, m)$ 代入 $y = \frac{1}{3}x$ 得: $m = \frac{1}{3} \times 3 = 1$,

$\therefore A(3, 1)$,

将 $A(3, 1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得: $k = 3 \times 1 = 3$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为: $y = \frac{3}{x}$;

【小问 2 详解】

解: 正比例函数 $y = \frac{1}{3}x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象都是中心对称图形,

$\therefore B(-3, -1)$,

$\therefore AB = \sqrt{(3+3)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{10}$;

【小问 3 详解】

解: ①当 C 在 x 轴上时,

由题意得: $\frac{1}{2}OC \times (1+1) = 6$,

$\therefore OC = 6$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(6, 0)$ 或 $(-6, 0)$;

②当 C 在 y 轴上时,

由题意得: $\frac{1}{2}OC \times (3+3) = 6$,

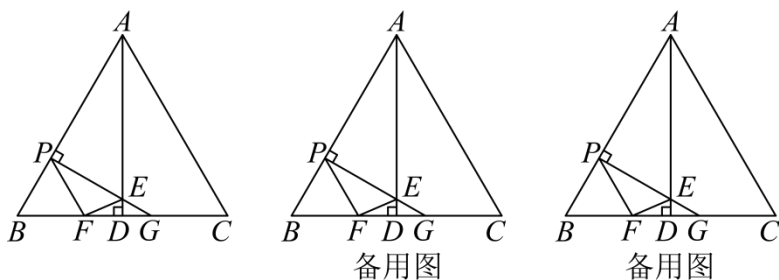
$\therefore OC = 2$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 2)$ 或 $(0, -2)$;

综上, 点 C 的坐标为 $(6, 0)$ 或 $(-6, 0)$ 或 $(0, 2)$ 或 $(0, -2)$.

【点睛】 本题考查了正比例函数图象上点的坐标特征, 待定系数法求反比例函数解析式, 反比例函数的图象和性质, 勾股定理的应用, 坐标与图形性质等知识, 熟练掌握待定系数法是解题的关键.

26. 如图, 在 ABC 中, $AB = AC = BC = 1$, $AD \perp BC$, 垂足为 D , 点 P 是边 AB 上的一个动点, 过点 P 作 $PF \parallel AC$ 交线段 BD 于点 F , 作 $PG \perp AB$ 交 AD 于点 E , 交线段 CD 于点 G , 设 $BP = x$.



- (1) 用含 x 的代数式表示线段 DG 的长;
- (2) 设 $\triangle DEF$ 的面积为 y , 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出定义域;
- (3) 若 $\triangle PEF$ 为直角三角形, 求出 BP 的长.

【答案】(1) $DG = 2x - \frac{1}{2}$;

$$(2) y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{24}, \left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right);$$

$$(3) BP \text{ 的长为 } \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{2}{5}.$$

【解析】

【分析】(1) 根据题意可得 ABC 和 BPF 为等边三角形, 由 $PG \perp AB$ 及等边三角形的性质得出 $PF = GF = x$, 从而表示出 $DG = BF + FG - BD = 2x - \frac{1}{2}$;

(2) 由含 30° 直角三角形的性质表示出 DE , 由 (1) 可表示出 DF , 再根据三角形面积的计算公式即可解答;

(3) 若 $\triangle PEF$ 为直角三角形, 则 $\angle PFE = 90^\circ$ 或 $\angle PEF = 90^\circ$, 根据直角三角形的性质列出方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 在 ABC 中, $AB = AC = BC = 1$,

$\therefore ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\because PF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle BPF = \angle BAC = \angle BFP = 60^\circ,$$

$\therefore BPF$ 为等边三角形,

$$\therefore BF = BP = PF = x, \angle PFC = 120^\circ,$$

$$\because PG \perp AB,$$

$$\therefore \angle BPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FPE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle FGP = 30^\circ,$$

$$\therefore PF = GF = x,$$

$$\text{又} \because AD \perp BC,$$

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DG = BF + FG - BD = 2x - \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } DG = 2x - \frac{1}{2};$$

【小问2详解】

$$\text{解: 由 (1) 可知 } DF = BD - BF = \frac{1}{2} - x,$$

$$\therefore \angle FGP = 30^\circ, \angle ADG = 90^\circ,$$

$$\therefore EG = 2DE,$$

$$\text{由勾股定理得: } DE^2 + DG^2 = EG^2 = (2DE)^2,$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{3}}{3}DG = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2x - \frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}DE \cdot DF = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{24},$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{24},$$

$$\therefore \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{1}{2} - x > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{定义域为: } \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2};$$

【小问3详解】

$$\text{解: } \because \angle FPG = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{若 } \triangle PEF \text{ 为直角三角形, 则 } \angle PFE = 90^\circ \text{ 或 } \angle PEF = 90^\circ,$$

$$\text{①当 } \angle PFE = 90^\circ \text{ 时, } \angle EFD = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \triangle EFG \text{ 为等腰三角形,}$$

$$\therefore DF = DG,$$

$$\because DF = \frac{1}{2} - x, \quad DG = 2x - \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} - x = 2x - \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } x = \frac{1}{3};$$

②当 $\angle PEF = 90^\circ$ 时, $\angle FED = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$$\therefore DE = \sqrt{3}DF,$$

$$\because DE = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(2x - \frac{1}{2} \right), \quad DF = \frac{1}{2} - x,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} \left(2x - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - x \right),$$

$$\text{解得: } x = \frac{2}{5},$$

综上所述, BP 的长为 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{5}$.

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质、勾股定理、直角三角形、解不等式组以及直角三角形的性质, 解题的关键是熟练运用上述几何知识进行推理求解, 注意分类讨论思想的运用.