

2024 学年第一学期八年级数学学科第二次集中性测试试卷

(考试时间：90 分钟满分：100 分)

一、单项选择题 (本大题共 6 小题，每题 2 分，共 12 分)

1. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2kx + 4 = 0$ 有两个不相等的实数根，那么在下列各数中， k 的值可以是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查根的判别式，根据方程有两个不相等的实数根，得到 $\Delta > 0$ ，进行判断即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2kx + 4 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 4k^2 - 16 > 0,$$

$\therefore$ 当 k 的值为 3 时，满足题意，

故选：D.

2. 下列定理中，没有逆定理的是 ()

- A. 两直线平行，同旁内角互补
B. 线段垂直平分线上的点到线段两端点距离相等
C. 两个全等三角形的对应角相等
D. 在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等

【答案】C

【解析】

【分析】没有逆定理就是逆命题不正确的选项，逐一写出各选项的逆命题，判定即可.

【详解】A 选项，逆命题是同旁内角互补，两直线平行，正确；

B 选项，逆命题是到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上，正确；

C 选项，逆命题是对应角相等的两个三角形全等，错误；

D 选项，逆命题是到一个角的两边的距离相等的点在这个角的平分线上，正确；

故答案为 C.

【点睛】本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解这些命题的逆命题，然后判断其真假.

3. 下列命题正确的是 ()

- A. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = \frac{1}{2}AC$ ，则 $\angle A = 30^\circ$

B. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC = \frac{1}{2}AB$, 则 $\angle A = 30^\circ$

C. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = \frac{1}{2}AB$, 则 $\angle A = 30^\circ$

D. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 则 $AC = \frac{1}{2}BC$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了 30° 角的直角三角形的性质及其逆定理, 熟练掌握知识点是解题的关键. 在直角三角形中, 30° 角所对的直角边等于斜边的一半, 逆定理为: 在直角三角形中, 一个锐角所对的直角边为斜边的一半, 那么这个锐角为 30° . 据此分析即可.

【详解】解: A、 AC 不是斜边, 故不能用 30° 角的直角三角形的逆定理判断, 故不符合题意;

B、不知哪个角为直角, 故错误, 不符合题意;

C、在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC = \frac{1}{2}AB$, 则 $\angle A = 30^\circ$, 符合 30° 角的直角三角形的逆定理, 符合题意;

D、应为 $AC = \frac{1}{2}AB$, 故错误, 不符合题意,

故选: C.

4. 以下说法正确的个数有 ()

①反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中, 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小;

②直线 $y = a$ 是常值函数且不存在自变量;

③正比例函数 $y = 2x$ 的图像是一条过原点的直线, 该直线绕原点旋转一个角度之后得到的图像还是某个正比例函数的图像;

④点 P 到 x 轴距离为 4, 到 y 轴距离为 3, 且落在第四象限, 则经过 P 的正比例函数的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x$

A. 0 个

B. 1

C. 2 个

D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】①根据反比例函数的性质即可判断; ②根据常值函数的定义判断; ③当旋转至与 y 轴或 x 轴重合, 就不是正比例函数的图像, 即可判断; ④先求出 $P(3, -4)$, 再利用待定系数法求解解析式即可.

【详解】解: ①错误, 应为, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中, 当 $k > 0$ 时, 在每一象限内 y 随 x 的增大而减小, 故不符合题意;

②错误，应为，直线 $y = a$ 是常值函数且存在自变量，自变量由所讨论的问题决定，故不符合题意；

③错误，当旋转至与 y 轴或 x 轴重合，就不是正比例函数的图像，故不符合题意；

④错误， $\because$ 点 P 到 x 轴距离为 4，到 y 轴距离为 3，且落在第四象限，

$$\therefore P(3, -4),$$

设经过点 $P(3, -4)$ 的正比例函数为： $y = kx$ ，

代入得： $3k = -4$ ，

$$\text{解得： } k = -\frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{经过 } P \text{ 的正比例函数的解析式为 } y = -\frac{4}{3}x,$$

故不符合题意，

因此正确的个数有 0 个，

故选：A.

【点睛】 本题考查了反比例函数和正比例函数的性质，以及待定系数法求正比例函数解析式，点到坐标轴的距离等知识，熟练掌握知识点是解题的关键.

5. 如果三角形二条边的中垂线的交点在第三条边上，那么，这个三角形是（ ）

A. 直角三角形

B. 锐角三角形

C. 钝角三角形

D. 等边三角形

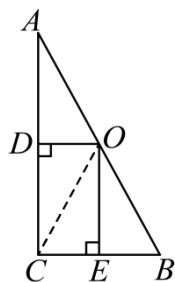
【答案】A

【解析】

【分析】 根据题意，画出图形，用线段垂直平分线的性质结合等腰三角形的性质，三角形内角和定理解答.

【详解】 如图，CA、CB 的中点分别为 D、E，CA、CB 的垂直平分线 OD、OE 相交于点 O，且点 O 落在 AB 边上，

连接 CO，



$\because$ OD 是 AC 的垂直平分线，

$$\therefore OC = OA, \quad \angle A = \angle ACO,$$

同理 $OC=OB$, $\angle B=\angle BCO$,

$$\therefore \angle A + \angle ACO + \angle B + \angle BCO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle BCO = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

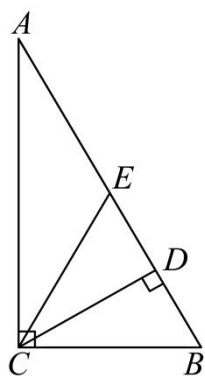
$\therefore \angle C$ 是直角.

故选: A.

【点睛】 本题主要考查了线段的垂直平分线的性质, 等腰三角形的性质, 三角形内角和定理. 熟记线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键.

6. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 与 CE 分别是斜边 AB 上的高与中线, 以下判断中正确的个数有 ()

① $\angle DCB = \angle A$; ② $\angle DCB = \angle ACE$; ③ $\angle ACD = \angle BCE$; ④ $\angle BCE = \angle BEC$



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查斜边上的中线, 等腰三角形的判定和性质, 根据斜边上的中线等于斜边的一半, 等边对等角, 同角的余角相等, 进行判断即可.

【详解】 解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 与 CE 分别是斜边 AB 上的高与中线,

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ, CE = AE = BE, \angle ADC = \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BCD = 90^\circ, \angle A + \angle ACD = 90^\circ, \angle B = \angle BCE, \angle A = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle A = \angle ACE, \angle ACD = \angle B = \angle BCE;$$

故①②③正确,

无法得到 $\angle BCE = \angle BEC$, 故④错误;

综上所述可得: 正确的有 3 个.

故选: C.

二、填空题 (本大题共有 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 化简: $\sqrt{12a^2} (a > 0) =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{3}a$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简, 熟练掌握 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解题的关键, 根据 $\sqrt{a^2} = |a|$ 进行化简即可.

【详解】 解: $\sqrt{12a^2} = \sqrt{4 \times 3a^2} = 2\sqrt{3}|a|$,

由于 $a > 0$,

$$\therefore \sqrt{12a^2} (a > 0) = 2\sqrt{3}a,$$

故答案为: $2\sqrt{3}a$.

8. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$ 的定义域是 _____.

【答案】 $x > \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 此题考查了函数的定义域, 二次根式和分式有意义的条件. 根据二次根式和分式有意义的条件即可求出 x 的范围.

【详解】 解: $\because$ 要使 $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$ 有意义,

$$\therefore 3x - 2 > 0,$$

$$\text{解得: } x > \frac{2}{3},$$

故答案为: $x > \frac{2}{3}$.

9. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{2}}$, 那么 $f(0) =$ _____.

【答案】 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查求函数值, 分母有理化, 把 $x = 0$ 代入函数解析式, 进行求解即可.

【详解】解： $\because f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{2}},$

$$\therefore f(0) = \frac{1}{0 - \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

故答案为： $-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

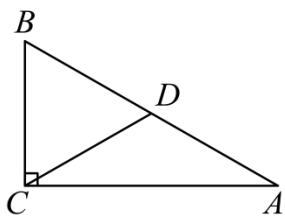
10. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ, \angle B = 60^\circ, CD$ 为斜边 AB 上的中线，已知 $AC = 2\sqrt{3}, BC = 2$ ，则 $\triangle ADC$ 的周长=_____.

【答案】 $4 + 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形的性质，两锐角互余以及斜边上中线等于斜边的一半， 30° 角的直角三角形性质，熟练掌握知识点是解题的关键. 先由直角三角形锐角互余得到 $\angle A = 30^\circ$ ，则 $AB = 2BC = 4$ ，再由斜边上中线得到 $DC = DA = \frac{1}{2}AB = 2$ ，即可求解周长.

【详解】解：如图，



$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2BC = 4,$$

$\because CD$ 为斜边 AB 上的中线，

$$\therefore DC = DA = \frac{1}{2}AB = 2,$$

$$\therefore \triangle ADC \text{ 的周长为: } 2 + 2 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3},$$

故答案为： $4 + 2\sqrt{3}.$

11. 已知反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图像上有两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，如果 $x_1 < x_2$ 时，那么

y_1 _____ y_2 . (填 “ $>$ ” 或 “ $<$ ”)

【答案】>

【解析】

【分析】本题考查比较反比例函数的函数值大小，根据反比例函数的增减性，进行判断即可.

【详解】解：∵ $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ ， $3 > 0$ ，

∴ 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，

∴ 反比例函数 $y = \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图像上有两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，

∴ $y_1 > y_2$ ；

故答案为：>.

12. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半逆命题 _____

【答案】如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形

【解析】

【分析】本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解如何写出一个命题的逆命题，并熟练掌握直角三角形的判定方法.

把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题.

【详解】解：命题“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”的逆命题是如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

故答案为：如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

13. 如果在 $\triangle ABC$ 中，边 BC 固定且 BC 上的中线长为 5cm ，那么顶点 A 的轨迹是_____.

【答案】以线段 BC 的中点为圆心，以 5cm 长为半径的圆，除去该圆与直线 BC 的两个交点

【解析】

【分析】本题考查了圆的运动轨迹，三角形中线，设 BC 的中点为 D ，则 $|AD| = 5\text{cm}$ ，故顶点 A 的轨迹是以 D 为圆心，以 5cm 长为半径的圆，为 A, B, C 为三角形的三个顶点，所以除去圆与直线 BC 的两个交点，从而得出答案.

【详解】解：设 BC 的中点为 D ，则 $|AD| = 5\text{cm}$ ，

故顶点 A 的轨迹是以 D 为圆心，以 5cm 长为半径的圆，

因为 A, B, C 为三角形的三个顶点，所以除去圆与直线 BC 的两个交点，

故答案为：以线段 BC 的中点为圆心，以 5cm 长为半径的圆，除去该圆与直线 BC 的两个交点.

14. 三角形三个角的度数之比为 $1:2:3$ ，它的最长边等于 20 ，则最短边长是_____.

【答案】10

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的内角和定理，直角三角形的判定与含 30° 度角的直角三角形的性质，根据三角形内角和定理求得三个角的度数，根据含 30° 度角的直角三角形的性质即可求得答案

【详解】 解： $\because$ 三角形三个内角的度数之比为 $1:2:3$ ，

设三个内角的度数分别为 x ， $2x$ ， $3x$ ，

$$\therefore x + 2x + 3x = 180^\circ,$$

解得 $x = 30^\circ$ ，

$$\therefore 3x = 90^\circ,$$

$\therefore$ 这个三角形是直角三角形，

$\therefore$ 最长边等于 20，即斜边为 20，

$\therefore$ 最小边即 30° 角所对的边，根据 30° 角所对的边等于斜边的一半，

$\therefore$ 最小边为 10.

故答案为：10.

15. 已知直角坐标平面内的两点分别为 A (- 3, 1)、B (1, - 2)，那么 A、B 两点间的距离等于_____.

【答案】 5.

【解析】

【分析】 根据两点间的距离公式进行计算，即 A (x, y) 和 B (a, b)，则 $AB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

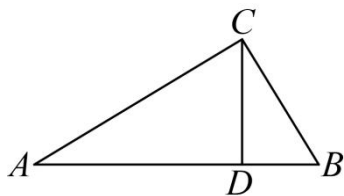
【详解】 A、B 两点间的距离为： $AB = \sqrt{[1-(-2)]^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

故答案为 5，

故答案是：5.

【点睛】 本题考查了勾股定理，两点间的距离，解题的关键是掌握两点间的距离公式.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于 D ， $AB = 4\text{cm}$ ，则 $BD =$ _____.



【答案】 1cm

【解析】

【分析】 本题考查含 30° 度角的直角三角形，根据含 30° 度角的直角三角形的性质，推出 $AB = 4BD$ ，即可

得出结果.

【详解】解: $\because \angle ACB = 90^\circ, \angle A = 30^\circ,$

$\therefore \angle ABC = 60^\circ, AB = 2BC,$

$\because CD \perp AB,$

$\therefore \angle CDB = 90^\circ,$

$\therefore \angle BCD = 30^\circ,$

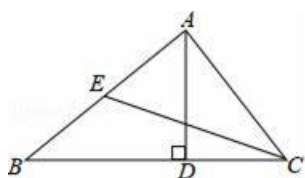
$\therefore BC = 2BD,$

$\therefore AB = 4BD = 4\text{cm},$

$\therefore BD = 1\text{cm};$

故答案为: 1cm.

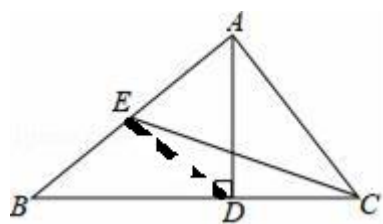
17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, 垂足为点D, CE是边AB上的中线, 如果 $CD=BE$, $\angle B=40^\circ$, 那么 $\angle BCE=$ ____度.



【答案】20.

【解析】

【分析】连接ED, 再加上 $AD \perp BC$, 利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 很容易可以推出 $\triangle ECD$ 为等腰三角形, 根据等腰三角形的性质: 等边对等角, 以及外角性质即可求出 $\angle BCE$ 的度数.



【详解】

如图, 连接ED,

$\because AD \perp BC,$

$\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形,

$\because CE$ 是边AB上的中线,

$\therefore ED = \frac{1}{2} AB = BE,$

$\therefore \angle EDB = \angle B = 40^\circ,$

又 $\because CD=BE$,

$\therefore ED=CD$,

$\therefore \angle DEC=\angle DCE$,

$\because \angle EDB$ 是 $\triangle DEC$ 的外角,

$\therefore \angle EDB=\angle DEC+\angle DCE=2\angle DCE=40^\circ$,

$\therefore \angle DCE=\frac{1}{2}\angle EDB=20^\circ$,

$\because \angle DCE$ 即 $\angle BCE$,

$\therefore \angle BCE=20^\circ$.

【点睛】 本题考查的是直角三角形的性质，等腰三角形的性质，掌握直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

18. 已知，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=\sqrt{3}$ ， $\angle C=22.5^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 翻折使得点 A 与点 C 重合，折痕与边 BC 交于点 D，如 $DC=2$ ，那么 BD 的长为_____.

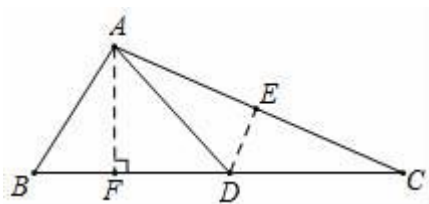
【答案】 $\sqrt{2}+1$ 或 $\sqrt{2}-1$.

【解析】

【分析】 过 A 作 $AF \perp BC$ 于 F，构造直角三角形，分两种情况讨论，利用勾股定理以及等腰直角三角形的性质，即可得到 BD 的长.

【详解】 分两种情况：

①当 $\angle B$ 为锐角时，如图所示，过 A 作 $AF \perp BC$ 于 F，



由折叠可得，折痕 DE 垂直平分 AC，

$\therefore AD=CD=2$,

$\therefore \angle ADB=2\angle C=45^\circ$,

$\therefore \triangle ADF$ 是等腰直角三角形，

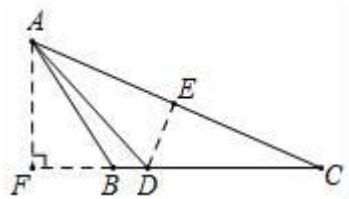
$\therefore AF=DF=\sqrt{2}$,

又 $\because AB=\sqrt{3}$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中， $BF=\sqrt{AB^2-AF^2}=1$,

$\therefore BD=BF+DF=1+\sqrt{2}$;

②当 $\angle ABC$ 为钝角时, 如图所示, 过A作 $AF \perp BC$ 于F,



同理可得, $\triangle ADF$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AF=DF=\sqrt{2},$$

又 $\because AB = \sqrt{3}$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABF \text{ 中, } BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = 1,$$

$$\therefore BD = DF - BF = \sqrt{2} - 1;$$

故答案为 $\sqrt{2}+1$ 或 $\sqrt{2}-1$.

【点睛】本题主要考查了折叠问题以及勾股定理的运用，解决问题的关键是分两种情况画出图形进行求解。解题时注意：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。

三、简答题 (本大题共有 4 题, 每小题 6 分, 满分 24 分)

19. 计算: $\sqrt{3}(\sqrt{6}+2)-\frac{4}{\sqrt{3}-1}$.

【答案】 $3\sqrt{2}-2$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的混合运算，先进行乘法，分母有理化的运算，再合并同类二次根式即可.

【详解】解：原式 $= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \frac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2$$

$$= 3\sqrt{2} - 2.$$

20. 用配方法解方程 $2x^2 - 4x - 1 = 0$.

【答案】 $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】先把二次项系数化为 1, 然后把常数项移到右边, 再两边同时加上一次项系数一半的平方即可求解.

【详解】解： $\because 2x^2 - 4x - 1 = 0$,

$$\therefore x^2 - 2x - \frac{1}{2} = 0,$$

$$\therefore x^2 - 2x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = \frac{3}{2},$$

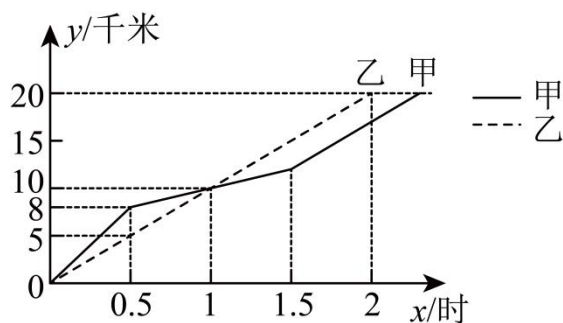
$$\therefore (x-1)^2 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore x-1 = \pm \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

【点睛】本题主要考查了用配方法解一元二次方程，解题的关键在于能够熟练掌握配方法.

21. 某市半程马拉松比赛，甲乙两位选手的行程（千米）随时间（小时）变化的图象如图所示.



- (1) 哪位选手先到终点? _____ (填“甲”或“乙”);
- (2) 甲选手跑到 8 千米时, 用了 _____ 小时. 起跑 _____ 小时后, 甲乙两人相遇;
- (3) 乙选手在 $0 \leq x \leq 2$ 的时段内, y 与 x 之间的函数关系式是 _____;
- (4) 甲选手经过 1.5 小时后, 距离起点有 _____ 千米.

【答案】(1) 乙 (2) 0.5, 1

(3) $y = 10x (0 \leq x \leq 2)$

(4) 12

【解析】

【分析】本题考查了从函数图象中获取信息，一次函数的应用，解题的关键是读懂题意，能从图象中获取有用的信息.

- (1) 观察图象直接得出答案;

(2) 观察图象直接得出答案;

(3) 求出乙的速度, 即可得出 y 与 x 之间的函数关系式;

(4) 由图象可得在 $0.5 \leq x \leq 1.5$ 时, 甲用 0.5 小时跑了 2 千米, 由此即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: 由图象可得: 乙选手先到达终点,

故答案为: 乙;

【小问 2 详解】

解: 由图象可得: 甲选手跑到 8 千米时, 用了 0.5 小时, 起跑 1 小时后, 甲乙两人相遇,

故答案为: 0.5, 1;

【小问 3 详解】

解: $\because 20 \div 2 = 10$ (千米/小时),

$\therefore$ 乙选手在 $0 \leq x \leq 2$ 的时段内, y 与 x 之间的函数关系式是 $y = 10x (0 \leq x \leq 2)$,

故答案为: $y = 10x (0 \leq x \leq 2)$;

【小问 4 详解】

解: 由图象可得, 甲 0.5 小时距离起点 8 千米, 1 小时距离起点 10 千米,

$\therefore 1 - 0.5 = 0.5$ (小时),

$\therefore$ 在 $0.5 \leq x \leq 1.5$ 时, 甲用 0.5 小时跑了 2 千米,

$\therefore 1.5 - 1 = 0.5$,

$\therefore$ 甲选手经过 1.5 小时后, 距离起点有 $10 + 2 = 12$ (千米),

故答案为: 12.

22. 已知 $y = 2y_1 + y_2$, y_1 与 $(x+1)$ 成正比例, y_2 与 x 成反比例, 且当 $x=1$ 时, $y=-1$, 当 $x=-3$ 时, $y=3$,

求 y 关于 x 的函数解析式.

【答案】 $y = -2(x+1) + \frac{3}{x}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了待定系数法求函数解析式. 根据正比例与反比例的定义设出函数关系式, 再根据待定系数法求出函数解析式即可.

【详解】 解: 设 $y_1 = k_1(x+1) (k_1 \neq 0)$, $y_2 = \frac{k_2}{x} (k_2 \neq 0)$,

$$\therefore y = 2k_1(x+1) + \frac{2k_2}{x},$$

当 $x=1$ 时, $y=-1$; 当 $x=-3$ 时, $y=3$,

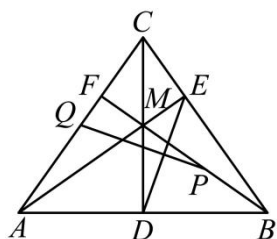
$$\therefore \begin{cases} 4k_1 + 2k_2 = -1 \\ -4k_1 - \frac{2}{3}k_2 = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = \frac{3}{2} \end{cases},$$

故 y 关于 x 的函数解析式为 $y = -2(x+1) + \frac{3}{x}$.

四、解答题 (本大题共 3 小题, 第 23、24 题每小题 8 分, 第 25 题 12 分, 满分 28 分)

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 三边 BC 、 AC 、 AB 上的高 AE 、 BF 、 CD 相交于点 M , P 为 BM 的中点, Q 为 AC 的中点, 求证: $PQ \perp ED$.



【答案】见解析

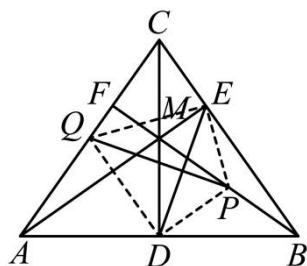
【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形的斜边上中线等于斜边的一半, 线段垂直平分线的判定, 正确添加辅助线是解题的关键.

可得 $\triangle BEM$, $\triangle CEA$, $\triangle MDB$, $\triangle ADC$ 均为直角三角形, 继而由斜边上的中线性质的得到

$EP = DP = \frac{1}{2}BM$, $QE = QD = \frac{1}{2}AC$, 则点 Q, P 在 DE 的垂直平分线上, 继而可求证.

【详解】 证明: 连接 PE, PD, QE, QD ,



$\because$ 三边 BC 、 AC 、 AB 上的高 AE 、 BF 、 CD 相交于点 M ,

$\therefore \triangle BEM, \triangle CEA, \triangle MDB, \triangle ADC$ 均为直角三角形,

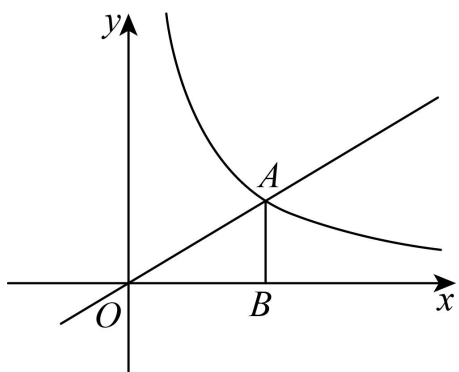
$\therefore P$ 为 BM 的中点, Q 为 AC 的中点,

$$\therefore EP = DP = \frac{1}{2}BM, QE = QD = \frac{1}{2}AC,$$

$\therefore$ 点 Q, P 在 DE 的垂直平分线上,

$\therefore PQ \perp ED$.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 内, 函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图像有公共点 A , 点 A 的坐标为 $(4, a)$, $AB \perp x$ 轴, 垂足为点 B .



(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 点 C 是第一象限内直线 OA 上一点, 过点 C 作直线 $CD \parallel AB$, 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像交于点 D , $CD = \frac{3}{2}AB$, 求点 D 的坐标和 $\triangle ADO$ 的面积.

【答案】 (1) $y = \frac{8}{x}$

(2) $D(2, 4)$ 或 $D(8, 1)$, $\triangle ADO$ 的面积为 6

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数与正比例函数的综合题, 涉及待定系数法求函数解析式, 反比例函数图像上点的坐标特征, 解分式方程, 三角形的面积问题, 熟练掌握知识点是解题的关键.

(1) 把 A 的坐标为 $(4, a)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$, 求得 a , 再利用待定系数法即可求解反比例函数的解析式;

(2) 设点 C 坐标为 $(m, \frac{1}{2}m) (m > 0)$, 则点 D 坐标为 $(m, \frac{8}{m})$, 当点 C 在点 A 上方时, 可得 $CD = \frac{1}{2}m - \frac{8}{m}$, 根据题意可得 $\frac{1}{2}m - \frac{8}{m} = \frac{3}{2} \times 2$, 解得 $m = 8$, 从而求得 D 的坐标, 再由 $S_{\triangle ADO} = S_{\triangle CDO} - S_{\triangle CDA}$ 即可求解面积, 同理当点 C 在点 A 下方时, 点 D 坐标和 $\triangle ADO$ 的面积.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 A 在函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图像上, 点 A 的坐标为 $(4, a)$,

$$\therefore a = 4 \times \frac{1}{2} = 2,$$

$\therefore$ 点 A 坐标为 $(4, 2)$.

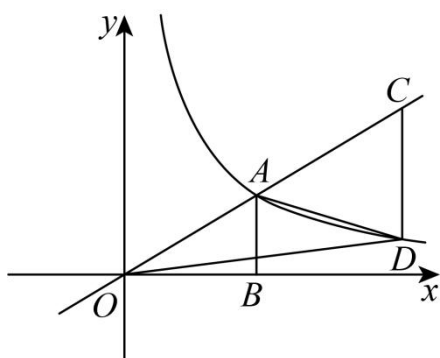
$\because$ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像上,

$$\therefore 2 = \frac{k}{4}, \text{ 解得 } k = 8.$$

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{8}{x}$;

【小问 2 详解】

解: 如图, 当点 C 在点 A 上方时,



$\because AB \perp x$ 轴, 点 A 坐标为 $(4, 2)$,

$$\therefore AB = 2.$$

$\because$ 点 C 为第一象限内直线 $y = \frac{1}{2}x$ 上一点,

$\therefore$ 设点 C 坐标为 $(m, \frac{1}{2}m) (m > 0)$,

又 $\because CD \parallel AB$, 且点 D 在反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图像上,

$\therefore$ 设点 D 坐标为 $(m, \frac{8}{m})$.

$$\text{可得 } CD = \frac{1}{2}m - \frac{8}{m}.$$

$$\because CD = \frac{3}{2}AB,$$

$$\therefore \frac{1}{2}m - \frac{8}{m} = \frac{3}{2} \times 2,$$

$$\therefore \text{解得 } m = 8 \text{ 或 } m = -2,$$

经检验, $m = 8$ 或 $m = -2$ 都是方程的解,

$$\because m > 0,$$

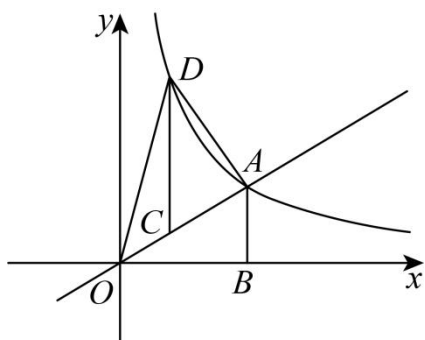
$$\therefore m = 8.$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(8,1)$, $C(8,4)$,

$\therefore CD = 3$,

$$\therefore S_{\triangle ADO} = S_{\triangle CDO} - S_{\triangle CDA} = \frac{1}{2}CD \cdot x_D - \frac{1}{2}CD \cdot (x_D - x_A) = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 - \frac{1}{2} \times 3 \times (8-4) = 6;$$

当点 C 在点 A 下方时, 如图:



$\therefore$ 设点 C 坐标为 $(m, \frac{1}{2}m) (m > 0)$,

又 $\because CD \parallel AB$, 且点 D 在反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图像上,

$\therefore$ 设点 D 坐标为 $(m, \frac{8}{m})$.

$$\text{可得 } CD = \frac{8}{m} - \frac{1}{2}m.$$

$$\because CD = \frac{3}{2}AB,$$

$$\therefore \frac{8}{m} - \frac{1}{2}m = \frac{3}{2} \times 2,$$

$$\therefore \text{解得 } m = 2 \text{ 或 } m = -8,$$

经检验, $m = 2$ 或 $m = -8$ 都是方程的解,

$$\because m > 0,$$

$$\therefore m = 2.$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(2,4)$, $C(2,1)$,

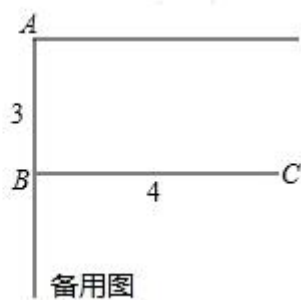
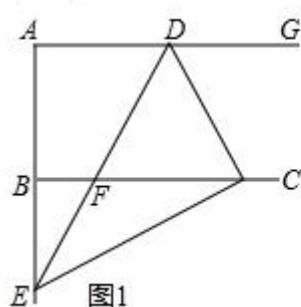
$\therefore CD = 3$,

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle ADO} &= S_{\triangle CDO} + S_{\triangle CDA} = \frac{1}{2}CD \cdot x_D + \frac{1}{2}CD \cdot (x_A - x_D) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times (4-2) = 6, \end{aligned}$$

综上所述, 点 D 的坐标为 $(2,4)$ 或 $(8,1)$, $\triangle ADO$ 的面积为 6.

25. 如图, 已知 $AB = 3, BC = 4, AB \perp BC, AG \parallel BC$, 将一个直角的顶点置于点 C , 并将它绕着点 C 旋

转，两条直角边分别交射线 AG 于点 D ，交 AB 的延长线于点 E ，联结 DE 交 BC 于点 F ，设 $BE = x$ 。



- (1) 当 $\angle DCB = 60^\circ$ 时，求 BE 的长；
- (2) 若 $AD = y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式及定义域；
- (3) 旋转过程中，若 $DC = FC$ ，求此时 BE 的长。

【答案】 (1) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ；(2) $y = -\frac{3}{4}x + 4$ ($0 \leq x \leq \frac{16}{3}$)；(3) $\frac{7}{6}$ 。

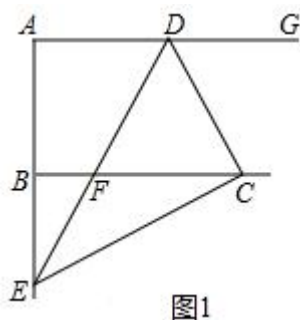
【解析】

【分析】 (1) 首先证明， $\angle CBE = 90^\circ$ ， $\angle BCE = 30^\circ$ ，根据 $\tan 30^\circ = \frac{BE}{BC}$ ，即可解决问题。

(2) 如图 2 中，作 $DM \perp BC$ 于 M 。只要证明 $\triangle DCM \sim \triangle CEB$ ，得 $\frac{DM}{CB} = \frac{CM}{EB}$ ，由此即可解决问题。

(3) 先证明 $\angle EDA = \angle EDC$ ，由 $EA \perp DA$ ， $EC \perp DC$ ，推出 $EA = EC = x + 3$ ，在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中，根据 $EC^2 = BE^2 + BC^2$ ，列出方程即可解决问题。

【详解】 解：(1) 如图 1 中，



$$\because \angle DCE = 90^\circ, \angle DCF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = 30^\circ,$$

$$\because AB \perp BC,$$

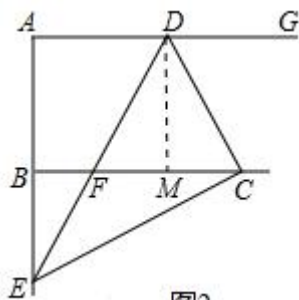
$$\therefore \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{BE}{BC},$$

$$\therefore \frac{BE}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore BE = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 如图 2 中, 作 $DM \perp BC$ 于 M .



$\because AG \parallel BC, AB \perp BC,$

$\therefore AG \perp AB,$

$\therefore \angle A = \angle ABM = \angle DMB = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ABMD$ 是矩形,

$\therefore BM = AD = y, AB = DM = 3, CM = 4 - y,$

$\therefore \angle DCM + \angle CDM = 90^\circ, \angle DCM + \angle BCE = 90^\circ,$

$\therefore \angle CDM = \angle BCE, \therefore \angle DMC = \angle CBE,$

$\therefore \triangle DCM \sim \triangle CEB,$

$$\therefore \frac{DM}{CB} = \frac{CM}{EB}$$

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{4-y}{x},$$

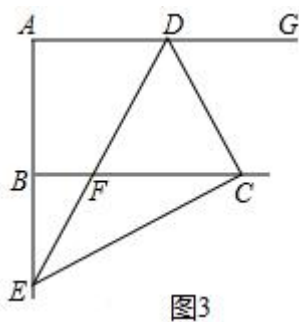
$$\therefore y = -\frac{3}{4}x + 4$$

$$\text{由题意可得} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{3}{4}x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } 0 \leq x \leq \frac{16}{3}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x + 4 \quad (0 \leq x \leq \frac{16}{3})$$

(3) 如图 3 中,



$$\therefore CD=CF,$$

$$\therefore \angle CDF=\angle CFD,$$

$$\therefore AG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CFD=\angle ADF,$$

$$\therefore \angle EDA=\angle EDC,$$

$$\therefore EA \perp DA, \quad EC \perp DC,$$

$$\therefore EA=EC=x+3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCE \text{ 中, } \therefore EC^2=BE^2+BC^2,$$

$$\therefore (x+3)^2=x^2+4^2,$$

$$\therefore x=\frac{7}{6},$$

$$\therefore BE=\frac{7}{6}.$$

【点睛】 本题考查几何变换综合题、相似三角形的判定和性质、矩形的判定和性质、勾股定理等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会正确寻找相似三角形解决问题，学会用方程的思想思考问题，属于中考压轴题.