

2024 – 2025 年八年级数学上册第一次月考卷 02 (测试范围: 第 16 – 17 章)

一、单选题

1. 下列二次根式中与 $\sqrt{18}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{30}$

B. $\sqrt{12}$

C. $\sqrt{32}$

D. $\sqrt{24}$

【答案】C

【解析】

【分析】把 $\sqrt{18}$ 和各选项中的式子化为最简二次根式，再由同类二次根式的概念解答即可.

【详解】解: $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

A、 $\sqrt{30}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的被开方数不同，不是同类二次根式，不符合题意;

B、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ， $2\sqrt{3}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的被开方数不同，不是同类二次根式，不符合题意;

C、 $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ ， $4\sqrt{2}$ 与 $3\sqrt{2}$ 被开方数相同，是同类二次根式，符合题意;

D、 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ ， $2\sqrt{6}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的被开方数不同，不是同类二次根式，不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题考查的是同类二次根式，熟知一般地，把几个二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，就把这几个二次根式叫做同类二次根式是解题的关键.

2. 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 8x = -2$ 时，在方程两边应同时加上 ()

A. 4

B. 8

C. 16

D. 64

【答案】C

【解析】

【分析】根据配方法的步骤，利用完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ 进行求解即可.

【详解】解: $x^2 - 8x = -2$ 进行配方，方程两边应同时加上一次项系数的一半的平方，

$$\text{即 } x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$\therefore x^2 - 8x + 16 = -2 + 16,$$

$\therefore$ 在方程两边应同时加上 16.

故选：C.

【点睛】本题考查配方法，用配方法解一元二次方程得一般步骤：(1) 化二次项系数为1，当二次项系数不是1时，方程两边同时除以二次项系数；(2) 加上一次项系数一半的平方，使其中的三项成为完全平方式，但又要使此方程的等式关系不变，故在右侧同时加上一次项系数一半的平方；(3) 配方后将原方程化为 $a(x+m)^2 = n (a \neq 0)$ 的形式，再用直接开平方的方法解方程. 熟知配方法的步骤是解题的关键.

3. 下列计算中，正确的是 ()

A. $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ B. $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{3-\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$ D. $\sqrt{a^2} = a$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式的运算法则即可求解判断.

【详解】A. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 不能计算，故错误；

B. $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，正确；

C. $\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$ ，故错误

D. $\sqrt{a^2} = |a|$ ，故错误

故选 B.

【点睛】此题主要考查二次根式的运算，解题的关键是熟知其运算法则.

4. 某种植物的主干长出若干数目的支干，每个支干又长出同样数目的小分支，主干、支干和小分支的总数是 157，设每个支干长出的小分支数目为 x ，根据题意，下面所列方程正确的是 ()

A. $1 + x + x^2 = 157$

B. $x + x^2 = 157$

C. $(1 + x)^2 = 157$

D. $1 + (1 + x)^2 = 157$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查一元二次方程的应用. 根据题意主干，支干和小分支的总数是 157，列出方程即可.

【详解】解：每个支干长出 x 个小分支，根据题意得：

$$1 + x + x^2 = 157,$$

故选：A.

5. 如果关于 x 的二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内能分解因式，那么 a 的取值范围是 ()

A. $0 < a < \frac{9}{16}$

B. $a \leq \frac{9}{16}$

C. $a \geq \frac{9}{16}$

D. $a \leq \frac{9}{16}$ 且 $a \neq 0$

【答案】D

【解析】

【分析】因二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内能分解因式，所以 $ax^2 + 3x + 4 = 0$ 有实数根，据此求解即可.

【详解】 $\because$ 二次三项式 $ax^2 + 3x + 4$ 在实数范围内能分解因式，

$\therefore ax^2 + 3x + 4 = 0$ 有实数根，

$\therefore \Delta = 9 - 16a \geq 0, a \neq 0$

$\therefore a \leq \frac{9}{16}$ 且 $a \neq 0$.

故选：D.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，以及因式分解法解一元二次方程：若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，那么一元二次方程可整理为 $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

6. 下列说法中，正确的是（ ）

A. $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ 互为倒数

B. 若 $(\sqrt{2} - 2)x > 1$ 则 $x > \frac{1}{\sqrt{2} - 2}$

C. 若 $\sqrt{x+3}$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，则 $x+3$ 与 3 不一定相等

D. 若 $a+b < 0$ ，则 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式的性质及运算法则计算判断即可.

【详解】A. $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = -1$ ，不是互为倒数，选项错误；

B. 若 $(\sqrt{2} - 2)x > 1$ ，由于 $\sqrt{2} - 2 < 0$ ，则 $x < \frac{1}{\sqrt{2} - 2}$ ，选项错误；

C. 若 $\sqrt{x+3}$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式，则 $x+3$ 与 3 不一定相等，选项正确；

D.由 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 可得 $\frac{a}{b} \geq 0$ ，结合 $a+b < 0$ 可得 $a \leq 0$ ， $b < 0$ ，则 $\sqrt{\frac{a}{b}} = -\frac{1}{b}\sqrt{ab}$ ，选项错误；

故选：C

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，熟记相关概念是解题是解题的关键.

二、填空题

7. 化简： $\sqrt{50} =$ _____.

【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】被开方数因式分解后将能开方的数开方即可化简二次根式.

【详解】 $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$ ，

故答案为： $5\sqrt{2}$.

【点睛】此题考查二次根式的化简，正确掌握最简二次根式的特点并正确将被开方数因式分解是解题的关键.

8. 化简： $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{5}-2$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质，解题的关键是掌握二次根式的性质，利用二次根式的性质进行化简.

【详解】解： $\because 4 < 5$ ，

$\therefore 2 < \sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{5}-2$.

故答案为： $\sqrt{5}-2$

9. 如果最简二次根式 $\sqrt{x^2+7}$ 与 $2\sqrt{4x+3}$ 是同类二次根式，则 x 的值是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】根据最简二次根式与同类二次根式的定义列方程求解.

【详解】解：由题意，得： $x^2+7=4x+3$ ，

解得： $x=2$ ，

故答案为：2.

【点睛】 本题主要考查同类二次根式及一元二次方程的解法，熟练掌握同类二次根式的概念是解题的关键.

10. 分母有理化: $\frac{1}{2-\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化，根据 $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$ ，分子和分母同时乘上 $(2+\sqrt{2})$ ，化简即可作答.

【详解】 解：依题意， $\frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1 \times (2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{4-2} = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

故答案为: $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. 计算: $\sqrt{18} \div \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的混合运算进行计算即可求解.

【详解】 解: $\sqrt{18} \div \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{18 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}} = 4\sqrt{2},$

故答案为: $4\sqrt{2}.$

【点睛】 本题考查了二次根式的乘除法混合运算，掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

12. 关于 x 的方程 $x^2 - px - q = 0$ 的根的判别式是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\Delta = p^2 + 4q$

【解析】

【分析】 分别找出该方程的二次项系数，一次项系数和常数项，即可进行解答.

【详解】 解: $\because a=1, b=-p, c=-q,$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-p)^2 - 4 \times 1 \times (-q) = p^2 + 4q,$

故答案为: $\Delta = p^2 + 4q$.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 解题的关键是掌握根的判别式的求法以及正确找出方程的二次项系数, 一次项系数和常数项.

13. 已知 $x < 0, y > 0$, 则 $\sqrt{x^2 y}$ 化简后为 _____.

【答案】 $-x\sqrt{y}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质, 计算即可得出答案.

【详解】 解: $\because x < 0, y > 0$,

$$\therefore \sqrt{x^2 y} = -x\sqrt{y}.$$

故答案为: $-x\sqrt{y}$

【点睛】 本题考查了二次根式的化简, 解本题的关键在熟练掌握二次根式的性质.

14. 在实数范围内因式分解: $3x^2 + 10xy + 5y^2 =$ _____.

【答案】 $(\sqrt{5}x + \sqrt{5}y + \sqrt{2}x)(\sqrt{5}x + \sqrt{5}y - \sqrt{2}x)$

【解析】

【分析】 先把原式变形为 $5(x^2 + 2xy + y^2) - 2x^2$, 可得到 $5(x + y)^2 - 2x^2$, 再利用平方差公式进行因式分解, 即可求解.

【详解】 解: $3x^2 + 10xy + 5y^2$

$$= 5x^2 + 10xy + 5y^2 - 2x^2$$

$$= 5(x^2 + 2xy + y^2) - 2x^2$$

$$= 5(x + y)^2 - 2x^2$$

$$= [\sqrt{5}(x + y)]^2 - (\sqrt{2}x)^2$$

$$= (\sqrt{5}x + \sqrt{5}y + \sqrt{2}x)(\sqrt{5}x + \sqrt{5}y - \sqrt{2}x).$$

故答案为: $(\sqrt{5}x + \sqrt{5}y + \sqrt{2}x)(\sqrt{5}x + \sqrt{5}y - \sqrt{2}x)$

【点睛】 本题考查了实数范围内分解因式: 一些式子在有理数的范围内无法分解因式, 可是在实数范围内就可以继续分解因式. 通过补项配成完全平方公式是解决问题的关键.

15. 若 $\sqrt{11}$ 的整数部分为 a ，小数部分为 b ，则 $b \times (a + \sqrt{11})$ 的值为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查的是估算无理数的大小，先根据题意估算出 $\sqrt{11}$ 的取值范围是解答此题的关键. 先估算出 a 、 b 的值，再代入代数式进行计算即可.

【详解】 解： $\because 9 < 11 < 16$,

$$\therefore 3 < \sqrt{11} < 4,$$

$$\therefore a = 3, \quad b = \sqrt{11} - 3,$$

$$\therefore b \cdot (a + \sqrt{11})$$

$$= (\sqrt{11} - 3)(3 + \sqrt{11})$$

$$= (\sqrt{11})^2 - 3^2$$

$$= 11 - 9$$

$$= 2.$$

故答案为： 2.

16. 若关于 x 的方程 $x^2 + bx - c = 0$ ($c \neq 0$) 有两个相等的实数根，则代数式 $\frac{b^2}{2c}$ 的值是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 根据题意可知一元二次方程根的判别式 $\Delta = 0$ ，得出 $b^2 = -4c$ ，代入代数式即可求解.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + bx - c = 0$ ($c \neq 0$) 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 + 4c = 0,$$

$$\therefore b^2 = -4c,$$

$$\therefore \frac{b^2}{2c} = \frac{-4c}{2c} = -2,$$

故答案为： -2.

【点睛】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a , b , c 为常数)的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ ，理解根的判别式对应的根的三种情况是解题的关键. 当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根.

17. 若 $a + \frac{1}{a} = 4 (0 < a < 1)$, 则 $\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】 运用完全平方公式进行变形求解即可.

【详解】 $\because 0 < a < 1$,

$$\therefore a < \frac{1}{a},$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = 4,$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} - 2 = 2, \text{ 即 } (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 = 2,$$

$$\therefore \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\sqrt{2},$$

故答案为 $-\sqrt{2}$.

【点睛】 此题考查了完全平方公式的应用, 能灵活运用公式进行变形是解此题的关键.

18. 如果一元二次方程的两根相差 1, 那么该方程成为“差 1 方程”. 例如 $x^2 + x = 0$ 是“差 1 方程”. 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ (a, b 是常数, $a > 0$) 是“差 1 方程” 设 $t = 10a - b^2$, t 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 9

【解析】

【分析】 根据新定义得方程的大根与小根的差为 1, 列出 a 与 b 的关系式, 再由 $t = 10a - b^2$, 得 t 与 a 的关系, 从而得出最后结果.

【详解】 解: 由题可得: $\Delta = b^2 - 4a \times 1 = b^2 - 4a \geq 0$

$$\therefore \text{解方程得 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a},$$

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ (a, b 是常数, $a > 0$) 是“差 1 方程”,

$$\therefore \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} = 1,$$

$$\therefore b^2 = a^2 + 4a,$$

$$\therefore t = 10a - b^2,$$

$$\therefore t = 6a - a^2 = -(a-3)^2 + 9,$$

$$\therefore (a-3) \geq 0,$$

$\therefore a = 3$ 时, t 的最大值为 9.

故答案为: 9

【点睛】本题考查了一元二次方程, 解题的关键是熟练运用一元二次方程的解法以及正确理解“差 1 方程”的定义.

三、解答题

19. 计算: $6\sqrt{0.5} - \sqrt{1\frac{1}{3}} - \left(4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{48}\right)$

【答案】 $2\sqrt{2} + \frac{10}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质化简, 后运用二次根式的加减运算计算即可.

【详解】解: 原式 $= 3\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} - (\sqrt{2} - 4\sqrt{3})$

$$= 3\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{2} + 4\sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{2} + \frac{10}{3}\sqrt{3}.$$

【点睛】本题考查了二次根式的性质, 二次根式的加减运算, 熟练掌握性质, 灵活加强运算是解题的关键.

20. 计算: $\frac{12}{\sqrt{6}} - \frac{5}{\sqrt{6}+1}$

【答案】 $\sqrt{6} + 1$

【解析】

【分析】先将分母有理化, 再根据二次根式的运算顺序和运算法则进行计算即可.

【详解】解: 原式 $= \frac{12\sqrt{6}}{6} - \frac{5 \times (\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}$

$$= 2\sqrt{6} - \frac{5 \times (\sqrt{6}-1)}{5}$$

$$= 2\sqrt{6} - (\sqrt{6}-1)$$

$$= 2\sqrt{6} - \sqrt{6} + 1$$

$$= \sqrt{6} + 1.$$

【点睛】题考查二次根式的加减法，熟练掌握分母有理化是解题的关键。利用分数的基本性质和平方差公式可以进行分母有理化。

21. 计算： $3\sqrt{\frac{12}{y^3}} \div \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{3}} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\frac{18}{xy^3}} \right)$

【答案】 $\frac{8\sqrt{2y}}{y}$

【解析】

【分析】根据二次根式的乘除混合计算法则求解即可。

【详解】解： $3\sqrt{\frac{12}{y^3}} \div \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{xy}{3}} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\frac{18}{xy^3}} \right)$

$$= 3\sqrt{\frac{12}{y^3}} \div \frac{3}{8}\sqrt{\frac{xy}{3} \cdot \frac{18}{xy^3}}$$

$$= 3\sqrt{\frac{12}{y^3}} \div \frac{3}{8}\sqrt{\frac{6}{y^2}}$$

$$= 3 \times \frac{8}{3}\sqrt{\frac{12}{y^3} \div \frac{6}{y^2}}$$

$$= 8\sqrt{\frac{12}{y^3} \cdot \frac{y^2}{6}}$$

$$= 8\sqrt{\frac{2}{y}}$$

$$= \frac{8\sqrt{2y}}{y}.$$

【点睛】本题主要考查了二次根式的乘除混合计算，熟知相关计算法则是解题的关键。

22. 解方程： $\frac{x^2-1}{3} + \frac{x}{2} = x$

【答案】 $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】利用因式分解法求解即可.

【详解】解: $\frac{x^2-1}{3} + \frac{x}{2} = x$,

$$2x^2 - 2 + 3x = 6x,$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0,$$

$$(2x+1)(x-2) = 0$$

解得 $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

所以方程的解是 $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了因式分解法解方程, 熟练掌握因式分解的技巧是解题的关键.

23. 解方程: $(2x-1)^2 - \frac{1}{2}(1-2x) = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$

【解析】

【分析】运用因式分解法求解即可.

【详解】解: $(2x-1)^2 - \frac{1}{2}(1-2x) = 0$,

$$(2x-1)^2 + \frac{1}{2}(2x-1) = 0,$$

$$(2x-1)\left(2x-1+\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$2x-1=0 \text{ 或 } 2x-\frac{1}{2}=0,$$

所以方程的解是 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{4}$.

【点睛】本题考查了因式分解法解方程, 熟练掌握因式分解是解题的关键.

24. 解方程: $3x^2 - 2x - 7 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{1+\sqrt{22}}{3}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{22}}{3}$

【解析】

【分析】明确方程中未知数的二次项、一次项系数及常数项, 运用求根公式求解.

【详解】解: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-7) = 88$,

$$\therefore x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{88}}{2 \times 3} = \frac{1 \pm \sqrt{22}}{3},$$

$$\therefore \text{方程的解为 } x_1 = \frac{1 + \sqrt{22}}{3}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{22}}{3}.$$

【点睛】 本题考查一元二次方程的求解，注意根据方程具体情况选用适当的方法求解是解题的关键.

25. 已知 $x = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$, 求代数式 $\frac{x^2 - 6x + 2}{x - 3}$ 的值.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】 先将 x 进行化简，然后再代入求值即可.

【详解】 解: $x = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} = 3 + 2\sqrt{2},$

$$\text{原式} = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^2 - 6(3 + 2\sqrt{2}) + 2}{3 + 2\sqrt{2} - 3}$$

$$= \frac{9 + 12\sqrt{2} + 8 - 18 - 12\sqrt{2} + 2}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

【点睛】 本题考查二次根式的化简与计算，掌握化简方法及运算法则是解题关键.

26. 已知关于 x 的方程 $x^2 - (2m - 2)x + m^2 = 0$ 有两个实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 当 m 取最大非零整数时，求方程的两个根.

【答案】 (1) $m \leq \frac{1}{2}$; (2) $x_1 = -2 - \sqrt{3}$, $x_2 = -2 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 (1) 根据方程有两个实数根，结合根的判别式可得 $\Delta \geq 0$ ，即可得出关于 m 的一元一次不等式，解之即可得出 m 的取值范围;

(2) 由 (1) 的结论可得出 m 可取的最大非零整数为 -1 ，将其代入原方程中，再利用公式法解一元二次方程，即可求出此时方程的两个根.

【详解】解：(1) $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - (2m - 2)x + m^2 = 0$ 有两个实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-(2m - 2)]^2 - 4 \times 1 \times m^2 = 4 - 8m \geq 0,$$

$$\text{解得：} m \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore m \text{ 的取值范围为 } m \leq \frac{1}{2}.$$

$$(2) \because m \leq \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 当 m 取最大非零整数时， $m = -1$.

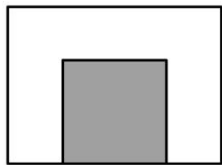
当 $m = -1$ 时，原方程为 $x^2 + 4x + 1 = 0$,

$$\text{解得：} x_1 = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{3}, x_2 = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{3}.$$

$\therefore$ 当 m 取最大非零整数时，方程的两个根分别为 $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ ， $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

【点睛】本题考查的是一元二次方程根的判别式，一元二次方程的解法，掌握“利用一元二次方程根的判别式求解参数的范围”是解本题的关键.

27. 如图，在高 3m ，宽 4m 的长方形墙面上有一块长方形装饰板（图中阴影部分），装饰板的上面和左右两边都留有相同宽度的空白墙面. 若长方形装饰板的面积为 4m^2 ，那么相同的宽度应该是多少米？



【答案】1 米

【解析】

【分析】根据长方形装饰板的面积为 4m^2 ，列一元二次方程即可.

【详解】解：设相同的宽度为 x 米，

$$\text{据题意得：} (3 - x)(4 - 2x) = 4$$

$$\text{解得：} x_1 = 1, x_2 = 4$$

$\because x = 4$ 不合题意

$$\therefore x=1$$

答：相同的宽度为 1 米

【点睛】 本题考查由实际问题抽象出一元二次方程，理解题意是解题的关键.

28. 今年超市以每件 25 元的进价购进一批商品，当商品售价为 40 元时，三月份销售 256 件，四、五月该商品十分畅销，销售量持续上涨，在售价不变的基础上，五月份的销售量达到 400 件.

(1) 求四、五这两个月销售量的月平均增长百分率.

(2) 经市场预测，六月份的销售量将与五月份持平，现商场为了减少库存，采用降价促销方式，经调查发现，该商品每降价 1 元，月销量增加 5 件，当商品降价多少元时，商场六月份可获利 4250 元？

【答案】 (1) 25%

(2) 5 元

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的实际应用. 根据题意正确的列出一元二次方程是解题的关键.

(1) 设平均增长率为 x ，由题意列出一元二次方程求解即可；

(2) 设降价 y 元，由题意列出一元二次方程求解即可.

【小问 1 详解】

解：设平均增长率为 x ，由题意得：

$$256 \times (1+x)^2 = 400,$$

解得： $x=0.25$ 或 $x=-2.25$ (舍)；

$\therefore$ 四、五这两个月的月平均增长百分率为 25%；

【小问 2 详解】

解：设降价 y 元，由题意得：

$$(40-y-25)(400+5y)=4250,$$

$$\text{整理得： } y^2 + 65y - 350 = 0,$$

解得： $y=5$ 或 $y=-70$ (舍)；

$\therefore$ 当商品降价 5 元时，商场六月份可获利 4250 元.

29. 有人说“数学是思维的体操”，运用和掌握必要的“数学思想”和“数学方法”是学好数学的重要法宝. 阅读下列例题及其解答过程：

例：解方程 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$.

解: ①当 $x \geq 0$ 时, 原方程为 $x^2 - 2x - 3 = 0$,

解得 $x_1 = -1$ (与 $x \geq 0$ 矛盾, 舍去), $x_2 = 3$.

②当 $x < 0$ 时, 原方程为 $x^2 + 2x - 3 = 0$,

解得 $x_1 = 1$ (与 $x < 0$ 矛盾, 舍去), $x_2 = -3$.

所以原方程的根是 $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

在上面的解答过程中, 我们对 x 进行讨论, 从而化简绝对值. 这是解决数学问题的一种重要思想——分类讨论.

请仿照上述例题的解答过程, 解方程: $x^2 - |x| - 1 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 绝对值方程, 解题的关键是理解题意, 学会利用分类讨论的思想思考问题.

【详解】 解: 当 $x \geq 0$ 时, 原方程可化为: $x^2 - x - 1 = 0$,

解得: $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (与 $x \geq 0$ 矛盾, 舍去), $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

当 $x < 0$ 时, 原方程可化为 $x^2 + x - 1 = 0$,

解得: $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (与 $x < 0$ 矛盾, 舍去), $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$;

$\therefore$ 原方程的解是 $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

30. 观察下列二次根式的化简过程:

$$S_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2};$$

$$S_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right);$$

$$S_3 = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right);$$

...

回答下列问题:

$$(1) \frac{S_{2024}}{2025} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) S_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}, \text{ 当 } n \text{ 无穷大时, } S_n \text{ 最接}$$

近的整数是多少?

【答案】 (1) $1 - \frac{1}{2025^2}$

(2) 当 n 无穷大时, S_n 接近 $n+1$

【解析】

【分析】 本题考查数字类规律探究、二次根式化简中的简便运算, 分式的混合运算,

(1) 根据题目中给定的计算方法求出 $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$, 再进行求解即可;

(2) 根据 (1) 中的结论: $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n(n+1)}$, 求出 S_n , 再进行求解;

掌握题目中给定的计算方法是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: $\because n$ 为任意的正整数,

$$\therefore \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + n^2 + (n+1)^2}{[n(n+1)]^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{[n(n+1)]^2 + 2n(n+1) + 1}{[n(n+1)]^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(n^2 + n + 1)^2}{[n(n+1)]^2}}$$

$$= \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_{2024} &= \left(1 + \frac{1}{1 \times 2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2 \times 3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3 \times 4}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2024 \times 2025}\right) \\
&= 2024 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{2024 \times 2025} \\
&= 2024 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}\right) \\
&= 2025 - \frac{1}{2025}, \\
\therefore \frac{S_{2024}}{2025} &= 1 - \frac{1}{2025^2};
\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

由 (1) 有:

$$\begin{aligned}
S_n &= \left(1 + \frac{1}{1 \times 2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2 \times 3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3 \times 4}\right) + \cdots + \left[1 + \frac{1}{n \times (n+1)}\right] \\
&= n + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} \\
&= n + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= n + 1 - \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 n 无穷大时, S_n 接近 $n+1$.