

八年级数学 12 月月考

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{2}$ 同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{12}$

B. $\sqrt{24}$

C. $\sqrt{0.2}$

D. $\sqrt{18}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了同类二次根式的概念, 同类二次根式是将二次根式化为最简二次根式后, 被开方数相同的二次根式.

先将二次根式化为最简二次根式, 再利用被开方数相同的二次根式是同类二次根式来判断求解.

【详解】解: A. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 它与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 此项不符合题意;

B. $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, 它与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 此项不符合题意;

C. $\sqrt{0.2}$ 它与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 此项不符合题意;

D. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 它与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 此项符合题意.

故选: D.

2. 关于 x 的方程 $x^2 - (m-1)x + m = 2$ 根的情况是 ()

A. 方程有两个不相等的实数根

B. 方程有两个相等的实数根

C. 方程一定有两个实数根

D. 方程可能没有实数根

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 则方程有两个相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则方程没有实数根, 据此先把原方程化为一般式, 再利用判别式求解即可.

【详解】解: 原方程化为一般式得 $x^2 - (m-1)x + m - 2 = 0$,

$$\therefore \Delta = [-(m-1)]^2 - 4(m-2)$$

$$= m^2 - 2m + 1 - 4m + 8$$

$$= m^2 - 6m + 9$$

$$= (m-3)^2 \geq 0,$$

∴ 原方程一定有两个实数根,

故选: C.

3. 下列函数中, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小的是 ()

A. $y = \frac{x}{2}$

B. $y = -\frac{x}{2}$

C. $y = \frac{2}{x}$

D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据正比例函数的性质及反比例函数性质直接判断即可得到答案;

【详解】解: 由题意可得,

A 选项为正比例函数: $\because k = \frac{1}{2} > 0$, $\therefore y$ 随自变量 x 的值增大而增大, 故 A 选项不符合题意;

B 选项正比例函数: $\because k = -\frac{1}{2} < 0$, $\therefore y$ 随自变量 x 的值增大而减小, 故 B 选项符合题意;

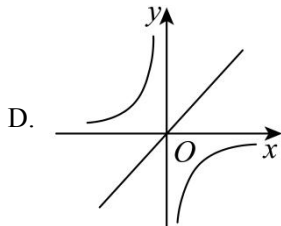
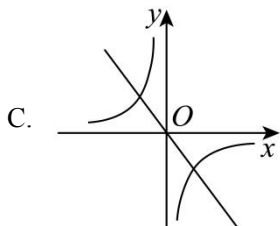
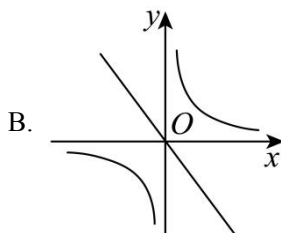
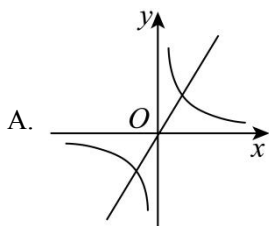
C 选项反比例函数, $x \neq 0$: $\because k = 2 > 0$, $\therefore$ 在 $x > 0$ 与 $x < 0$ 上, y 随自变量 x 的值增大而减小, 但 $x \neq 0$, 故 C 选项不符合题意;

D 选项反比例函数, $x \neq 0$: $k = -2 < 0$, $\therefore$ 在 $x > 0$ 与 $x < 0$ 上, y 随自变量 x 的值增大而增大, 故 D 选项不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题考查正比例函数的性质与反比例函数性质, 解题的关键是熟练掌握两种函数的性质.

4. 如果 $k_1 < 0 < k_2$, 那么函数 $y = k_1x$ 与 $y = \frac{k_2}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的图像可能是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了依据正比例函数与反比例函数的图像所经过的象限确定系数的符号，正确掌握各函数的图像与字母系数的关系是解题的关键.

根据正比例函数 $y = kx$ 和反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图像经过的象限，再对照四个选项中的图像即可得出结论.

【详解】解： $\because k_1 < 0 < k_2$,

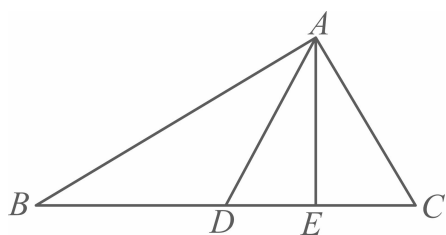
$\therefore$ 正比例函数 $y = k_1x$ 在第二，四象限内，且过原点，

函数 $y = \frac{k_2}{x}$ 在第一，三象限内，

故选项 B 符合题意；

故选：B.

5. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 90^\circ$ ， AD 为斜边 BC 的中线， AE 为斜边 BC 的高，如果 AE 恰好平分 DC ，下列结论错误的是（ ）



- A. $AD = BD$ B. $BD = 2DE$ C. $AB = 2AE$ D. $AB = 3CE$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了直角三角形的性质，等边三角形的判定和性质. 根据直角三角形的性质，熟练掌握直角三角形的性质，等边三角形的判定和性质是解题的关键.

可得 $AD = \frac{1}{2}BC = BD = CD$ ，再由三角形外角的性质可得 $\angle ADC = \angle B + \angle BAD = 2\angle B$ ，再证明 $\triangle ACD$ 是等边三角形， $\angle C = \angle ADC = \angle CAD = 60^\circ$ ， $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle CAD = 30^\circ$ ，从而得到 $\angle B = 30^\circ$ ， $BD = AD = 2DE$ ，即可求解.

【详解】解： $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 90^\circ$ ， AD 为斜边 BC 的中线，

$\therefore AD = \frac{1}{2}BC = BD = CD$ ，故 A 选项正确，不符合题意；

$\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD = 2\angle B$ ，

$\because AE$ 为斜边 BC 的高， AE 恰好平分 DC ，

$\therefore AD = AC = CD$ ，

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle C = \angle ADC = \angle CAD = 60^\circ, \quad \angle DAE = \frac{1}{2} \angle CAD = 30^\circ,$$

$\therefore \angle B = 30^\circ$, $BD = AD = 2DE$, 故 B 选项正确, 不符合题意;

$\therefore AB = 2AE$, 故 C 选项正确, 不符合题意;

$$\therefore BD = CD, \quad DE = CE,$$

$$\therefore BE = BD + DE = 3CE,$$

$$\therefore AB > BE,$$

$\therefore AB > 3CE$, 故 D 选项错误, 符合题意;

故选: D

6. 下列命题的逆命题的表述正确的有 ()

① “对顶角相等”的逆命题是“如果两个角相等, 那么这两个角是对顶角”

② “等边对等角”的逆命题是“如果有两条边相等, 那么这两条所对的角也相等”;

③ “全等三角形的对应边相等”的逆命题是“一组对应边相等的两个三角形是全等三角形”;

④ “等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是“如果一个三角形的两个角相等, 那么这个三角形是等腰三角形”.

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了一个命题的逆命题, 把原命题的条件与结论互换即可得到原命题的逆命题, 据此可得答案.

【详解】解: ① “对顶角相等”的逆命题是“如果两个角相等, 那么这两个角是对顶角”, 原说法正确;

② “等边对等角”的逆命题是“如果一个三角形有两个角相等, 那么这两个角所对的边也相等”, 原说法错误;

③ “全等三角形的对应边相等”的逆命题是“三组对应边相等的两个三角形是全等三角形”, 原说法错误;

④ “等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是“如果一个三角形的两个角相等, 那么这个三角形是等腰三角形”, 原说法正确.

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 化简: $\sqrt{12a^2b} (a > 0) =$ _____.

【答案】 $2a\sqrt{3b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了化简二次根式, 根据 $\sqrt{a^2} = |a|$ 计算求解即可.

【详解】 解: $\sqrt{12a^2b} = 2a\sqrt{3b} (a > 0)$,

故答案为: $2a\sqrt{3b}$.

8. 关于 x 的方程 $x^2 = -x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = -1, x_2 = 0$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 先移项, 然后利用提公因式法分解因式, 再解方程即可.

【详解】 解: $\because x^2 = -x$,

$$\therefore x^2 + x = 0,$$

$$\therefore x(x+1) = 0,$$

解得 $x_1 = -1, x_2 = 0$,

故答案为: $x_1 = -1, x_2 = 0$.

9. 函数 $y = \sqrt{1-2x}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x \leq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件是被开方数大于等于 0, 分析原函数可得 $1-2x \geq 0$, 解不等式即可.

【详解】 解: 根据题意得, $1-2x \geq 0$,

$$\text{解得: } x \leq \frac{1}{2}$$

故答案为: $x \leq \frac{1}{2}$

【点睛】 本题考查了函数自变量的取值范围, 一般从三个方面考虑: (1) 当函数表达式是整式时, 自变量可取全体实数; (2) 当函数表达式是分式时, 考虑分式的分母不能为 0; (3) 当函数表达式是二次根式时, 被开方数为非负数.

10. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$, 则 $f(\sqrt{2}) =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求函数值, 实数的运算, 直接把 $x = \sqrt{2}$ 代入 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$ 中计算求解即可.

【详解】 解: $\because f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$,

$$\therefore f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2-1} = \sqrt{2},$$

故答案为: $\sqrt{2}$.

11. 在实数范围内因式分解: $3x^2 - 2x - 2 =$ _____.

【答案】 $3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分解因式, 解一元二次方程, 令 $3x^2 - 2x - 2 = 0$, 求出方程的两个根即可得到答案.

【详解】 解: 令 $3x^2 - 2x - 2 = 0$,

$$\text{解得 } x = \frac{2+2\sqrt{7}}{6} = \frac{1+\sqrt{7}}{3} \text{ 或 } x = \frac{2-2\sqrt{7}}{6} = \frac{1-\sqrt{7}}{3},$$

$$\therefore 3x^2 - 2x - 2 = 3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right),$$

$$\text{故答案为: } 3\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right).$$

12. 如果点 $(-2, 1)$ 在正比例函数 $y = kx$ 的图像上, 那么反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像所在的象限是_____.

【答案】 第二, 四象限

【解析】

【分析】本题主要考查了求正比例函数解析式，判断反比例函数图像经过的象限，先利用待定系数法求出 k 的值，结合在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中：当 $k > 0$ 时，图象在一、三象限，当 $k < 0$ 时，图象在二、四象限可得答案.

【详解】解： $\because$ 点 $(-2, 1)$ 在正比例函数 $y = kx$ 的图像上，

$$\therefore 1 = -2k,$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{-\frac{1}{2}}{x}$ 的图像所在的象限是第二，四象限，

故答案为：第二，四象限。

13. 在同一平面坐标系中，点 $A(-2, 1)$ ，点 $B(2, 3)$ ，那么点 A 与点 B 之间的距离是_____.

【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

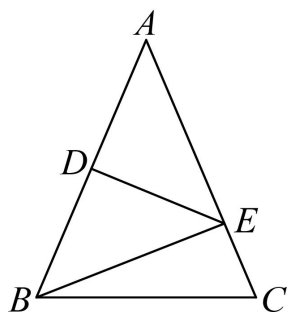
【分析】本题主要考查了两点距离计算公式，同一坐标系下点 (x, y) 和点 (m, n) 的距离为 $\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2}$ ，据此求解即可.

【详解】解： $\because$ 在同一平面坐标系中，点 $A(-2, 1)$ ，点 $B(2, 3)$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{5},$$

故答案为： $2\sqrt{5}$.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AB 的垂直平分线交 AB 于点 D ， AC 于点 E ，连接 BE ，如果 $\angle ABE = 2\angle CBE$ ，那么 $\angle A$ 的度数是_____.



【答案】 45°

【解析】

【分析】本题主要考查了等腰三角形的性质与判定，线段垂直平分线的性质，三角形内角和定理，由线段

垂直平分线的性质得到 $EA = EB$ ，则 $\angle ABE = \angle A$ ，再由等边对等角得到 $\angle ABC = \angle C$ ，根据已知条件可得 $\angle ABC = \frac{3}{2}\angle A$ ，据此根据三角形内角和定理建立方程求解即可。

【详解】解：∵ DE 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore EA = EB,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle A,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C,$$

$$\therefore \angle ABE = 2\angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABC = \frac{3}{2}\angle ABE = \frac{3}{2}\angle A,$$

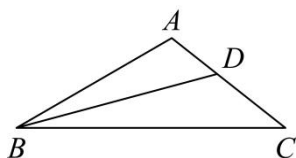
$$\therefore \angle ABC + \angle C + \angle A = 180^\circ,$$

$$\therefore \frac{3}{2}\angle A + \frac{3}{2}\angle A + \angle A = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 45^\circ,$$

故答案为： 45° .

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2$ ， $BC = 3$ ， BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，如果 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{2}$ ，那么 $\triangle DBC$ 的面积为_____.

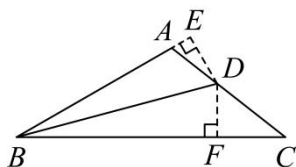


【答案】 $\frac{9}{10}$ ## 0.9

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的性质，过点 D 分别作 AB ， BC 的垂线，垂足为 E 、 F ，由角平分线的性质可得 $DE = DF$ ，则可证明 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ ，据此求解即可。

【详解】解：如图所示，过点 D 分别作 AB ， BC 的垂线，垂足为 E 、 F ，



∵ BD 是 $\angle ABC$ 的平分线， $DE \perp AB$ ， $DF \perp BC$ ，

$$\therefore DE = DF,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot DE}{\frac{1}{2}BC \cdot DF} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle CBD} = \frac{3}{3+2}S_{\triangle ABC} = \frac{9}{10},$$

故答案为: $\frac{9}{10}$.

16. 如果 $\text{Rt}\triangle ABC$ 有两条边长分别是 3 和 4, 那么它斜边上的中线长为_____.

【答案】 2 或 2.5

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理, 直角三角形的性质, 分边长为 4 的边是斜边和直角边两种情况确定出斜边长, 再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可得到答案.

【详解】 解: 当边长为 4 的边是直角边时, 则斜边的长为 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, 则它斜边上的中线长为 2.5;

当边长为 4 的边是斜边时, 则它斜边上的中线长为 2;

综上所述, 它斜边上的中线长为 2 或 2.5;

故答案为: 2 或 2.5.

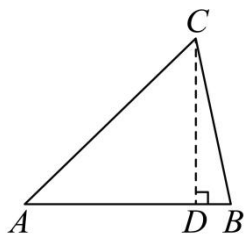
17. 已知 $\triangle ABC$ 三条边分别是 5, 6, 7, 则 $\triangle ABC$ 的面积是_____.

【答案】 $6\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 7$, $BC = 5$, $AB = 6$, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D , 设 $AD = x$, 则 $BD = 6 - x$, 由勾股定理可得方程 $7^2 - x^2 = 5^2 - (6 - x)^2$, 解方程后求出 CD 的长即可得到答案.

【详解】 解: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 7$, $BC = 5$, $AB = 6$, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D ,



设 $AD = x$, 则 $BD = 6 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, 由勾股定理得 $CD^2 = AC^2 - AD^2$,

在 $Rt\triangle BDC$ 中, 由勾股定理得 $CD^2 = BC^2 - BD^2$,

$$\therefore 7^2 - x^2 = 5^2 - (6-x)^2,$$

解得 $x = 5$,

$$\therefore CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = 6\sqrt{6},$$

故答案为: $6\sqrt{6}$.

18. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 15^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 顺时针旋转, 使点 C 恰好落在直线 AB 的点 D 上, 点 B 的对应点记作点 E , 如果 $AC = 1$, 那么 $CE =$ _____.

【答案】 $3 + \sqrt{3}$ 或 $1 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 该题考查了旋转的性质, 勾股定理, 直角三角形的性质等知识点, 如图, 在 AB 上截取 $BG = CG$, 得出 $\angle B = \angle BCG = 15^\circ$, 即可得 $\angle CGA = 30^\circ$, 算出 $CG = 2AC = 2$, $AG = \sqrt{3}$, 即可算出 $AB = 2 + \sqrt{3}$, 再分为当点 C 恰好落在 BA 的延长线上的点 D' 上, 和当点 C 恰好落在线段 AB 上的点 D'' 上时, 根据旋转的性质即可求解.

【详解】 解: 如图, 在 AB 上截取 $BG = CG$,

$$\therefore \angle B = \angle BCG = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle CGA = 30^\circ,$$

$$\therefore CG = 2AC = 2, AG = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AB = BG + AG = 2 + \sqrt{3},$$

当点 C 恰好落在 BA 的延长线上的点 D' 上, 点 B 的对应点记作点 E' ,

根据旋转的性质可得, $AC = AD'$, $AE' = AB$,

$$\therefore CE' = AE' - AC = AB - AC = 2 + \sqrt{3} - 1 = 1 + \sqrt{3};$$

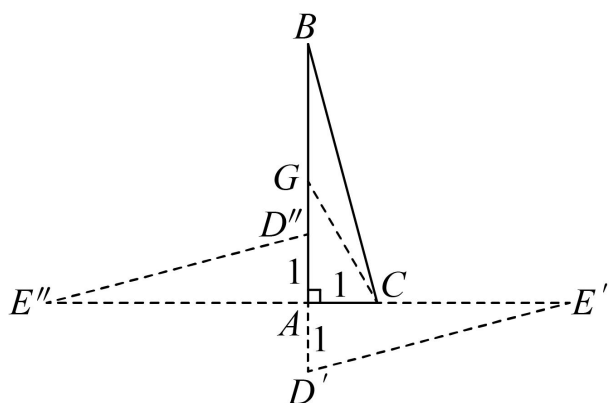
当点 C 恰好落在线段 AB 上的点 D'' 上, 点 B 的对应点记作点 E'' ,

根据旋转的性质可得, $AC = AD'' = 1$, $AE'' = AB = 2 + \sqrt{3}$,

$$\therefore CE'' = AE'' + AC = 2 + \sqrt{3} + 1 = 3 + \sqrt{3};$$

综上, $CE = 3 + \sqrt{3}$ 或 $1 + \sqrt{3}$;

故答案为: $3+\sqrt{3}$ 或 $1+\sqrt{3}$.



三、简答题 (本大题共 4 小题, 第 19、20 题每题 6 分, 第 21、22 题每题 7 分, 满分 26 分)

19. 计算: $\sqrt{27}-\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}.$

【答案】 $\sqrt{3}+\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质以及二次根式的混合运算, 将原式正确化简是解本题的关键.

根据二次根式的性质将原式进行化简, 然后根据二次根式混合运算法则进行计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{27}-\sqrt{2\frac{1}{4}}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\frac{2}{1+\sqrt{3}}$

$$= 3\sqrt{3}-\sqrt{\frac{9}{4}}+|\sqrt{3}-2|-\frac{2\times(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\times(1-\sqrt{3})}$$

$$= 3\sqrt{3}-\frac{3}{2}+2-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}+\frac{3}{2}.$$

20. 解关于 x 的方程 $x(2x-1)=x^2+3.$

【答案】 $x_1=\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}, x_2=-\frac{\sqrt{13}}{2}+\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 该题考查了解一元二次方程, 变形后根据配方法求解即可.

【详解】 解: $x(2x-1)=x^2+3,$

变形为: $x^2-x=3,$

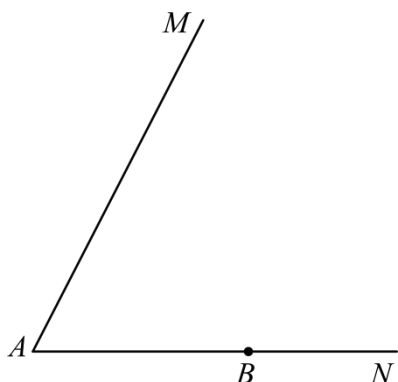
$$\therefore x^2 - x + \frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4},$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4},$$

$$\therefore x - \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{1}{2}.$$

21. 如图, 已知 $\angle MAN$, 点 B 是 AN 边上一点.



(1) 在 $\angle MAN$ 的内部, 求作点 P , 使点 P 到 AM 和 AN 两边的距离相等, 并且 $PA = PB$.

(2) 如果 $\angle MAN = 60^\circ$, $AB = 2$, 试求出点 P 到 AM 的距离是多少?

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】本题主要考查作图—复杂作图, 勾股定理, 含 30° 角直角三角形的性质, 解题的关键是掌握角平分线和线段垂直平分线的性质.

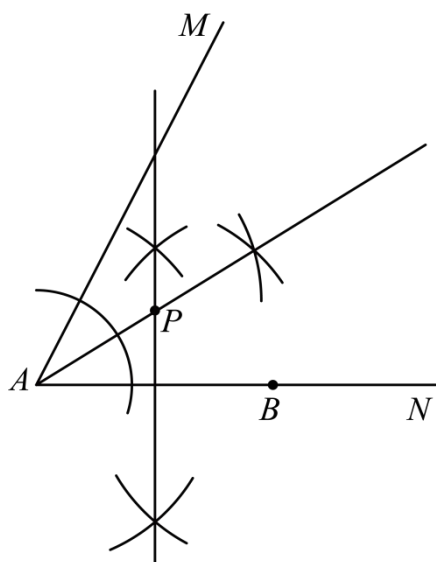
(1) 根据题意作出 $\angle MAN$ 的平分线和 AB 的垂直平分线交于点 P , 即为所求;

(2) 如图所示, 过点 P 作 $PC \perp AM$, 求出 $PC = PD$, $\angle PAD = \frac{1}{2}\angle MAN = 30^\circ$, $AD = BD = \frac{1}{2}AB = 1$,

然后利用勾股定理求解即可.

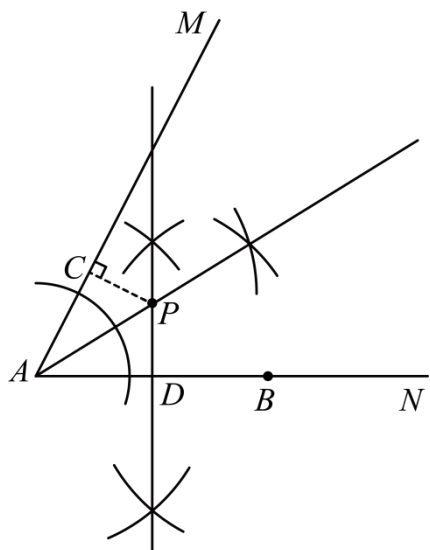
【小问 1 详解】

如图所示, 点 P 即为所求;



【小问 2 详解】

如图所示，过点 P 作 $PC \perp AM$



$$\because \angle MAN = 60^\circ$$

由作图得， AP 平分 $\angle MAN$ ， PD 垂直平分 AB

$$\therefore PC = PD, \quad \angle PAD = \frac{1}{2} \angle MAN = 30^\circ, \quad AD = BD = \frac{1}{2} AB = 1$$

$$\therefore AP = 2PD, \quad AP^2 = AD^2 + PD^2$$

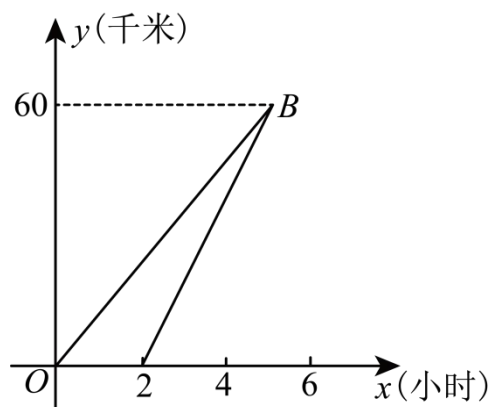
$$\therefore (2PD)^2 = 1^2 + PD^2$$

$$\therefore PD = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore PC = PD = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

∴ 点 P 到 AM 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. 如图, 甲骑自行车以 10 千米/时的速度沿公路行驶, 2 小时后, 乙骑摩托车从同一地点出发沿公路与甲同向行驶, 速度为 18 千米/时. 设甲出发后 x 小时, 甲离开出发地的路程为 y_1 千米, 乙离开出发地的路程为 y_2 千米. 试回答下列问题:



(1) y_2 关于 x 的函数解析式是_____;

(2) 已知该公路全长 60 千米, 图中已经给出乙的函数图像, 则点 B 的坐标是_____, 请在图中画出甲的函数图像;

(3) 当 x 为何值时, 乙追上甲, 此时他们距离出发地多少千米?

【答案】 (1) $y_2 = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 2) \\ 18x - 36 & (x > 2) \end{cases}$

(2) $B\left(\frac{16}{3}, 60\right)$, 见解析

(3) 当 $x = 4.5$ 时, 乙追上甲, 此时他们距离出发地 45 千米

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元一次方程的应用, 一次函数的实际应用, 正确求出对应的函数关系式是解题的关键.

(1) 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $y_2 = 0$, 当 $x > 2$ 时, 根据路程等于速度乘以时间求解即可;

(2) 把 $y_2 = 60$ 代入到 $y_2 = 18x - 36$ 中求出 x 的值即可得到点 B 的坐标, 再根据甲的速度即可画出甲的函数图像;

(2) 二者相遇时, 所走路程相同, 据此建立方程求解即可.

【小问 1 详解】

解：由题意得，当 $0 \leq x \leq 2$ 时， $y_2 = 0$ ，

当 $x > 2$ 时， $y_2 = 18(x - 2) = 18x - 36$ ；

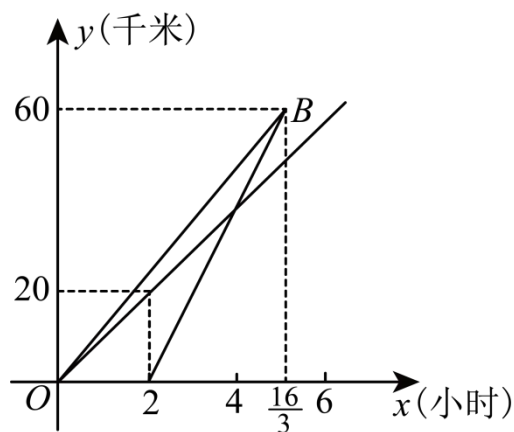
综上所述， $y_2 = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 2) \\ 18x - 36 & (x > 2) \end{cases}$

【小问 2 详解】

解：在 $y_2 = 18x - 36$ 中，当 $y_2 = 18x - 36 = 60$ 时， $x = \frac{16}{3}$ ，

$\therefore B\left(\frac{16}{3}, 60\right)$ ；

函数图象如下所示：



【小问 3 详解】

解：由题意得， $10x = 18x - 36$ ，

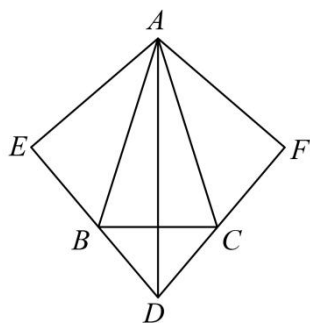
解得 $x = 4.5$ ，

$\therefore 10x = 45$ ，

$\therefore$ 当 $x = 4.5$ 时，乙追上甲，此时他们距离出发地 45 千米。

四、解答题（本大题共 3 小题，第 23、24 题每题 10 分，第 25 题 12 分，满分 32 分）

23. 已知，如图， $AE \perp EB$ ， $AF \perp CF$ ，点 E 、 F 分别为垂足， $BE = CF$ ， $\angle ABC = \angle ACB$ 。



(1) 证明： $AE = AF$ ；

(2) 延长 EB 、 FC 相交于点 D ，联结 AD 。证明： AD 垂直平分线 BC 。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，线段垂直平分线的判定，等角对等边，熟知全等三角形的性质与判定定理是解题的关键.

(1) 根据等角对等边得到 $AB = AC$ ，再证明 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ACF$ (HL)，即可证明 $AE = AF$ ；

(2) 证明 $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ADF$ (HL)，得到 $DE = DF$ ，则可证明 $DB = DC$ ，再根据线段垂直平分线的判定定理即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle ABC = \angle ACB$ ，

$\therefore AB = AC$ ，

$\because AE \perp EB$ ， $AF \perp CF$ ，

$\therefore \angle E = \angle F = 90^\circ$ ，

又 $\because BE = CF$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ACF$ (HL)，

$\therefore AE = AF$ ；

【小问 2 详解】

证明： $\because AE = AF$ ， $AD = AD$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ADF$ (HL)，

$\therefore DE = DF$ ，

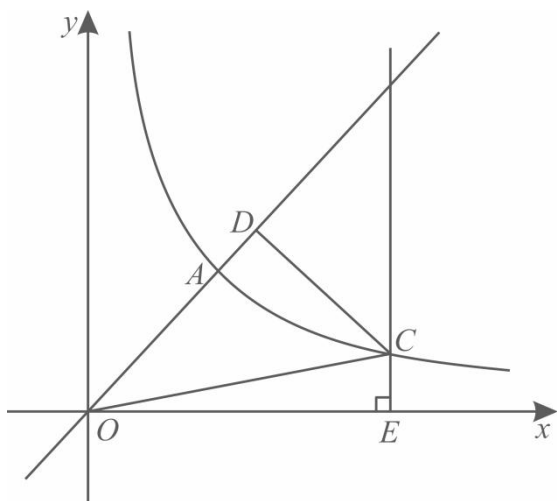
$\because BE = CF$ ，

$\therefore DE - BE = DF - CF$ ，即 $DB = DC$ ，

又 $\because AB = AC$ ，

$\therefore AD$ 垂直平分线 BC 。

24. 如图，正比例函数 $y = x$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图像相交于点 A ，其中点 A 的横坐标为 2，点 C 是双曲线上点 A 右侧的一点 (不与点 A 重合)，过点 C 分别作 $CD \perp OA$ ， $CE \perp x$ 轴，垂足分别为点 D 、点 E 。



- (1) 求反比例函数的解析式；
- (2) 如果 $OE = 4$ ，求点 D 的坐标；
- (3) 取 OC 的中点 M ，连结 DM 、 DE ，试判断 $\triangle DEM$ 的形状，并证明你的结论.

【答案】(1) $y = \frac{4}{x}$

(2) $D\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

(3) $\triangle DME$ 是等腰直角三角形

【解析】

【分析】(1) 根据点 A 在 $y = x$ 上，且横坐标为 2，求出点 $A(2, 2)$ ，再代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 即可求解.

(2) 根据题意求出点 $C(4, 1)$ ，在 $Rt\triangle OCE$ 中，求出 OC^2 ，设 $D(m, m)$ ，表示出 $OD^2 = 2m^2$ ，

$OC^2 = (m-4)^2 + (m-1)^2$ ，在 $Rt\triangle OCD$ 中，根据 $OD^2 + CD^2 = OC^2$ ，列出方程求出 $m = \frac{5}{2}$ ，即可求解.

(3) 在 $Rt\triangle ODC$ 、 $Rt\triangle OEC$ 中，根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半得出

$DM = \frac{1}{2}OC = OM = MC = EM$ ，根据等边对等角得出 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 5 = \angle 6$ ，再根据直线 $y = x$ 是第一，三象限角平分线，证出 $\angle DME = 90^\circ$ ，即可得出 $\triangle DME$ 是等腰直角三角形.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 A 在 $y = x$ 上，且横坐标为 2，

$\therefore A(2, 2)$ ，

把 $A(2, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 得 $k = xy = 2 \times 2 = 4$ ，

$\therefore y = \frac{4}{x}$ ；

【小问 2 详解】

解: $\because CE \perp x$ 轴, 且 $OE = 4$,

$\therefore$ 点 C 横坐标为 4,

在 $y = \frac{4}{x}$ 中, 令 $x = 4$, 则 $y = 1$,

$\therefore C(4,1)$,

在 $Rt\triangle OCE$ 中, $OE = 4, CE = 1$,

$$\therefore OC^2 = OE^2 + CE^2 = 4^2 + 1^2 = 17,$$

$\therefore$ 点 D 在直线 $y = x$ 上, 设 $D(m, m)$,

$\therefore C(4,1), O(0,0)$,

$$\therefore OD^2 = (m-0)^2 + (m-0)^2 = 2m^2, \quad OC^2 = (m-4)^2 + (m-1)^2,$$

在 $Rt\triangle OCD$ 中, $OD^2 + CD^2 = OC^2$,

$$\text{即 } 2m^2 + (m-4)^2 + (m-1)^2 = 17,$$

整理得 $2m^2 - 5m = 0$,

解得: $m = 0$ (舍去, 不符合题意), $m = \frac{5}{2}$,

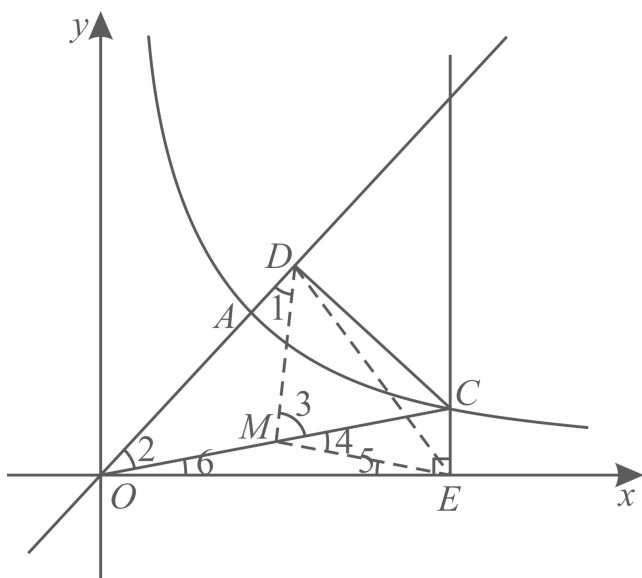
$$\therefore m = \frac{5}{2},$$

$$\therefore D\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

【小问 3 详解】

解: $\triangle DEM$ 是等腰直角三角形.

理由如下: 在 $Rt\triangle ODC, Rt\triangle OEC$ 中, M 为斜边 OC 的中点,



$$\therefore DM = \frac{1}{2}OC = OM = MC = EM ,$$

$$\therefore DM = EM ,$$

$\therefore \triangle DME$ 是等腰三角形,

$$\therefore DM = OM ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 ,$$

$$\text{设 } \angle 1 = \angle 2 = a ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = 2a ,$$

$$\therefore EM = OM ,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 6 ,$$

$$\text{设 } \angle 5 = \angle 6 = \beta ,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 5 + \angle 6 = 2\beta ,$$

$$\therefore \angle DME = \angle 3 + \angle 4 = 2a + 2\beta = 2(a + \beta) ,$$

$\therefore$ 直线 $y = x$ 是第一, 三象限角平分线,

$$\therefore \angle 2 + \angle 6 = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ ,$$

$$\text{即 } a + \beta = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle DME = 2 \times 45^\circ = 90^\circ ,$$

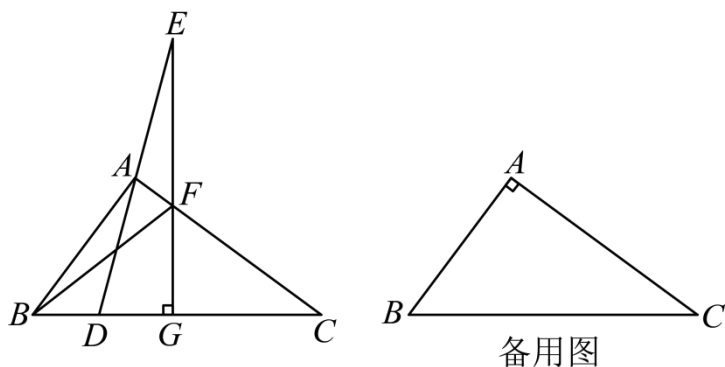
$\therefore \triangle DME$ 是直角三角形,

综上: $\triangle DME$ 是等腰直角三角形.

【点睛】该题考查了反比例函数解析式求解, 反比例函数和正比例函数交点问题, 直角三角形的性质, 勾

股定理，解一元二次方程，等腰直角三角形的性质和判定，三角形外角的性质等知识点，解题的关键是掌握以上知识点.

25. 已知，如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 6$, $AC = 8$ ，点 D 是边 BC 上不与点 B 和点 C 重合的一点，延长 DA 到点 E ，使得 $AE = AD$ ，过点 E 作 $EG \perp BC$ ，交边 BC 于点 G ，交直线 AC 于点 F .



- (1) 当 $AD \perp BC$ 时，求 ED 的长度；
- (2) 设 $BD = x$ ， $EF = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；
- (3) 当 $\triangle BCF$ 是等腰三角形时，直接写出 BD 的值.

【答案】(1) 9.6

$$(2) y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2} \left(0 < x \leq \frac{36}{5} \right)$$

$$(3) \frac{11}{5} \text{ 或 } \frac{26}{5}$$

【解析】

【分析】(1) 先根据勾股定理求出 $BC = 10$ ，后根据等面积法求出 AD ，继而得到本题答案；

(2) 过点 D 作 $DH \perp BC$ 交 CA 延长线于点 H ，连接 BH ，先证明 $\triangle EFA \cong \triangle DAH$ (AAS)，则

$HD = EF = y$ ，由面积法得到 $\frac{1}{2}BC \times DH = \frac{1}{2}CH \times AB$ ，出 $CH = \frac{5}{3}y$ ，则 $AH = \frac{5}{3}y - 8$ ，再由勾股定

理得： $AB^2 + AH^2 = BH^2$, $BD^2 + DH^2 = BH^2$ ，代入化简即可；

(3) 分两种情况讨论，利用勾股定理和全等三角形的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解： $\because \angle BAC = 90^\circ$ $AB = 6$, $AC = 8$,

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10,$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

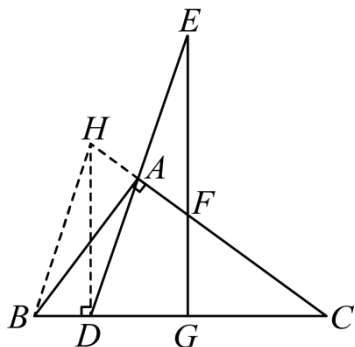
$$\therefore 6 \times 8 = 10AD, \text{ 即: } AD = 4.8,$$

$$\therefore AE = AD,$$

$$\therefore ED = 2AD = 2 \times 4.8 = 9.6;$$

【小问2 详解】

解: 过点 D 作 $DH \perp BC$ 交 CA 延长线于点 H , 连接 BH ,



$$\therefore EG \perp BC,$$

$$\therefore HD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle H = \angle AFE, \angle E = \angle HDA,$$

$$\therefore AE = AD,$$

$$\therefore \triangle EFA \cong \triangle DAH \text{ (AAS)},$$

$$\therefore HD = EF = y,$$

$$\therefore \frac{1}{2} BC \times DH = \frac{1}{2} CH \times AB,$$

$$\therefore 10y = 6CH,$$

$$\therefore CH = \frac{5}{3}y,$$

$$\therefore AH = CH - AC = \frac{5}{3}y - 8,$$

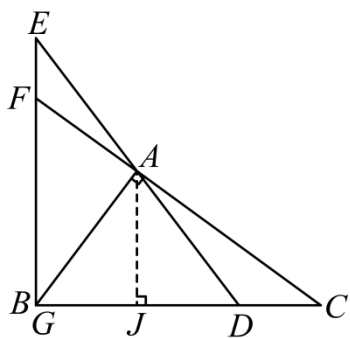
$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得: } AB^2 + AH^2 = BH^2, BD^2 + DH^2 = BH^2,$$

$$\therefore 36 + \left(\frac{5}{3}y - 8\right)^2 = x^2 + y^2,$$

$$\therefore \text{化简得: } y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2} \text{ 或 } y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{2} \text{ (舍)}$$

当点 G 与点 B 重合时, 过点 A 作 $AJ \perp BC$ 于 J ,



$$\therefore \angle EGC = 90^\circ, AE = AD,$$

$$\therefore AG = AD,$$

$$\therefore JG = JD,$$

$$\text{由 (1) 得 } AJ = \frac{24}{5},$$

$$\therefore GJ = \sqrt{AB^2 - AJ^2} = \frac{18}{5},$$

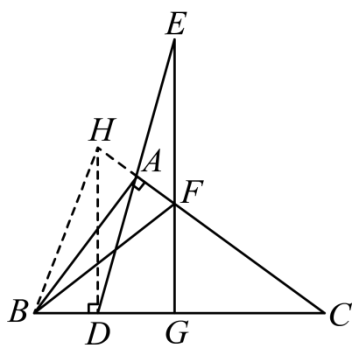
$$\therefore BD = 2JG = \frac{36}{5},$$

$$\therefore \text{定义域为: } \left(0 < x \leq \frac{36}{5}\right)$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{2} \left(0 < x \leq \frac{36}{5}\right);$$

【小问 3 详解】

解: 当 $FB = FC$ 时, 如图:



设 $FB = FC = m$, 则 $AF = 8 - m$,

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, 由勾股定理得 $6^2 + (8 - m)^2 = m^2$,

$$\text{解得: } m = \frac{25}{4},$$

$$\therefore \triangle EFA \cong \triangle DAH,$$

$$\therefore AF = AH,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore BA \text{ 垂直平分 } HF,$$

$$\therefore BH = BF = \frac{25}{4},$$

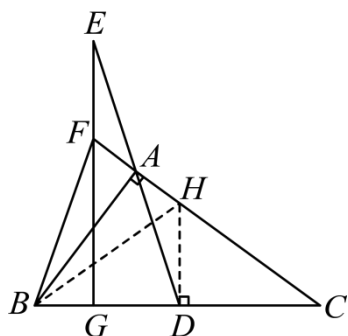
$$\therefore BD^2 + DH^2 = BH^2,$$

$$\therefore x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{15}{2}\right)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2$$

$$\text{解得: } x = \frac{11}{5} \text{ 或 } x = 5 \text{ (舍),}$$

$$\therefore BD = \frac{11}{5};$$

当 $CF = CB = 10$ 时, 如图,



$$\text{则 } AF = AH = CF - AC = 2,$$

$$\therefore CH = AC - AH = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{2}BC \times DH = \frac{1}{2}CH \times AB,$$

$$\therefore DH = \frac{6 \times 6}{10} = \frac{18}{5},$$

$$\therefore CD = \sqrt{CH^2 - DH^2} = \frac{24}{5},$$

$$\therefore BD = BC - CD = 10 - \frac{24}{5} = \frac{26}{5}$$

当 $BF = BC$ 时, 点 G 在 CB 延长线上, 不符合题意,

综上: BCF 是等腰三角形时, $BD = \frac{11}{5}$ 或 $BD = \frac{26}{5}$.

【点睛】 本题考查了勾股定理, 全等三角形的判定与性质, 函数关系式的建立, 直角三角形的性质, 线段垂直平分线的性质, 等腰三角形的定义等知识点, 难度较大, 解题的关键在于勾股定理的运用.