

初二年级数学专项作业练习 2024. 12

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列各组中, 两个变量间成正比例关系的是 ()

- A. 正方形的面积与边长
- B. 从甲地到乙地, 所用的时间和速度
- C. 圆的周长和半径
- D. 三角形面积一定时, 它的一边长和这条边上的高

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查正比例函数关系, 熟练掌握正比例函数的定义是解决本题的关键. 根据正比例函数的定义解决此题.

【详解】 解: A. 设正方形的边长为 x , 面积为 S , 则 $S = x^2$, 那么 S 与 x 不成正比例关系, 故 A 不符合题意;

B. 设时间为 t , 速度为 v , 则 $S = vt$, 那么 v 与 t 成反比例关系, 故 B 不符合题意;

C. 设圆的周长为 C , 圆的半径为 r , 则 $C = 2\pi r$, 那么 C 与 r 是正比例关系, 故 C 符合题意

D. 设三角形的面积为 S , 它的一条边长与这条边上的高分别为 x 与 y , 则 $S = \frac{1}{2}xy$, 那么 x 与 y 是反比例关系, 故 D 不符合题意.

故选: C.

2. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点 $(3, -2)$, 则 k 的值是 ()

- A. -6
- B. 6
- C. $\frac{2}{3}$
- D. $-\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求反比例函数解析式, 将 $(3, -2)$ 代入解析式, 即可求解; 掌握解法是解题的关键.

【详解】 解: 由题意得

$$\frac{k}{3} = -2,$$

解得: $k = -6$

故选: A.

3. 若点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , 都是反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 图像上的点, 并且 $y_1 < 0 < y_2 < y_3$, 则下列各式中正确的是 ()

A. $x_1 < x_2 < x_3$

B. $x_1 < x_3 < x_2$

C. $x_2 < x_1 < x_3$

D. $x_2 < x_3 < x_1$

【答案】D

【解析】

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 中 $k = -1 < 0$,

$\therefore$ 此函数的图像在二、四象限, 且在每一象限内 y 随 x 的增大而增大,

$\because y_1 < 0 < y_2 < y_3$,

$\therefore$ 点 (x_1, y_1) 在第四象限, (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) 两点均在第二象限,

$\therefore x_2 < x_3 < x_1$.

故选 D.

4. 下列命题中, 逆命题是假命题的是 ()

A. 两直线平行, 同旁内角互补

B. 全等三角形对应角相等

C. 全等三角形对应边相等

D. 如果 $a^2 = b^2$, 那么 $a = b$

【答案】B

【解析】

【分析】考查了命题与定理的知识, 解题的关键是了解如何写出一个命题的逆命题, 难度不大. 交换原命题的逆命题后判断正误即可.

【详解】解: A、逆命题为: 同旁内角互补, 两直线平行, 正确, 是真命题, 不符合题意;

B、逆命题为: 对应角相等的三角形全等, 错误, 是假命题, 符合题意;

C、逆命题为: 对应边相等的三角形全等, 正确, 是真命题, 不符合题意;

D、逆命题为: 如果 $a = b$, 那么 $a^2 = b^2$, 正确, 是真命题, 不符合题意.

故选: B.

5. 到三角形三个顶点的距离都相等的点是这个三角形的 ()

- A. 三条高的交点
- B. 三条角平分线的交点
- C. 三条中线的交点
- D. 三条边的垂直平分线的交点

【答案】D

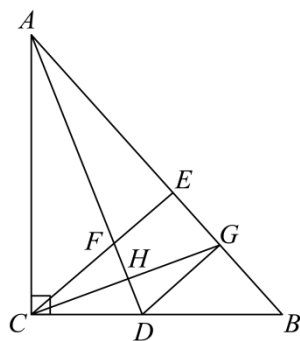
【解析】

【分析】本题考查了线段垂直平分线的性质，熟练掌握线段垂直平分线的性质是解题的关键：线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等。

根据线段垂直平分线的性质即可直接得出答案。

【详解】解：到三角形三个顶点的距离都相等的点是这个三角形的三条边的垂直平分线的交点，故选：D。

6. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线， CE 是 AB 边上的高， AD 与 CE 交于点 F ，过点 D 作 $DG \parallel CE$ 交 AB 于点 G ，连结 CG 交 AD 于点 H ，则下列结论中，不一定成立的是（ ）



- A. $DC = DG$
- B. $GD = GB$
- C. $CF = GD$
- D. $FH = DH$

【答案】B

【解析】

【分析】根据角平分线的性质可判断 $CD = DG$ ，根据全等三角形的性质及线段垂直平分线的判定可判断 $CF = DG$ ， $FH = DH$ 进而可得出答案。

【详解】解： $\because CE$ 是 AB 边上的高，
 $\therefore CE \perp AB$ ，
 $\because DG \parallel CE$ ，
 $\therefore DG \perp AB$ ，
 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，
 $\therefore DC = DG$ ，故 A 结论正确，不符合题意；

$\because DG \perp AB, \angle ACB = 90^\circ,$
 $\therefore \angle ACB = \angle AGD = 90^\circ,$
 $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,
 $\therefore \angle CAD = \angle GAD,$
 $\because AD = AD,$
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle AGD (AAS),$
 $\therefore AC = AG,$
 $\because DC = DG,$
 $\therefore AD$ 垂直平分 $CG,$
 $\therefore CH = HG,$
 $\because DG \parallel CE,$
 $\therefore \angle FCH = \angle DGH, \angle CFH = \angle GDH,$
 $\therefore \triangle CFH \cong \triangle GDH (AAS),$
 $\therefore CF = DG, FH = DH,$ 故 C、D 结论正确, 不符合题意;
 假设 $GD = GB,$
 $\because \angle DGB = 90^\circ,$
 $\therefore \angle B = \angle GDB = 45^\circ,$
 $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,
 但题目条件没有 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 且推导不出其结论,
 $\therefore$ B 结论不一定正确.

故选: B.

【点睛】 本题考查了角平分线的性质, 平行线的性质, 三角形全等的判定于性质, 线段垂直平分线的判定和性质, 解题的关键是掌握相关判定和性质并灵活运用.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. 函数 $y = \sqrt{4+2x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq -2$

【解析】

【分析】 本题考查了求函数自变量取值范围及二次根式有意义的条件, 由二次根式有意义的条件得 $4+2x \geq 0,$ 即可求解; 理解 $\sqrt{a}$ 有意义的条件为 $a \geq 0$ 是解题的关键.

【详解】 解: 由题意得

$$4 + 2x \geq 0,$$

解得: $x \geq -2$,

故答案: $x \geq -2$.

8. 已知 $f(x) = \frac{6}{x-1}$, 那么 $f(\sqrt{3}) =$ _____.

【答案】 $3\sqrt{3} + 3$

【解析】

【分析】 此题考查了求函数值, 二次根式的运算, 解题的关键是熟练掌握二次根式的运算法则.

将 $x = \sqrt{3}$ 代入 $f(x) = \frac{6}{x-1}$, 求解即可.

【详解】 解: 将 $x = \sqrt{3}$ 代入 $f(x) = \frac{6}{x-1}$ 可得:

$$f(\sqrt{3}) = \frac{6}{\sqrt{3}-1} = \frac{6(\sqrt{3}+1)}{2} = 3\sqrt{3} + 3.$$

故答案为: $3\sqrt{3} + 3$.

9. 已知反比例函数 $y = (m-1)x^{8-m^2}$ 的图像在第一、三象限, 则 m 的值为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 此题主要考查了反比例函数的定义和反比例函数的性质, 正确掌握反比例函数的性质是解题关键. 直接利用反比例函数的定义结合反比例函数图象分布得出 m 的值.

【详解】 解: $\because$ 反比例函数 $y = (m-1)x^{8-m^2}$,

$$\therefore 8 - m^2 = -1,$$

解得: $m = \pm 3$,

$\because$ 它的两个分支分别在第一、三象限,

$$\therefore m-1 > 0, \text{ 即 } m > 1,$$

则 $m = 3$.

故答案为: 3.

10. 在课堂小结描述每一个反比例函数的性质时, 甲同学说: “从这个反比例函数图象上任意一点向 x 轴、 y 轴作垂线, 与两坐标轴所围成的矩形面积为 2024.” 乙同学说: “这个反比例函数在相同的象限内, y 随着 x 增大而增大.” 根据这两位同学所描述, 此反比例函数的解析式是_____.

【答案】 $y = -\frac{2024}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数比例系数的几何意义、反比例函数的性质，根据甲同学的说法确定 $|k| = 2024$ ，再根据乙同学的说法确定 $k = -2024$ ，继而得到反比例函数的解析式即可．掌握反比例函数比例系数的几何意义及反比例函数图象的性质是解题的关键．

【详解】 解：设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，

根据甲同学的说法可得： $|k| = 2024$ ，

$$\therefore k = \pm 2024,$$

根据乙同学的说法可知： $k < 0$ ，

$$\therefore k = -2024,$$

$\therefore$ 根据这两位同学所描述，此反比例函数的解析式是满足甲乙两同学说法的反比例函数解析式是

$$y = -\frac{2024}{x}.$$

故答案为： $y = -\frac{2024}{x}$ ．

11. 已知点 $A(2, a)$ 是直线 $y = kx$ 与双曲线 $y = \frac{k-1}{x}$ 图像的一个交点，那么这两个函数图像的另一个交点坐标为_____．

【答案】 $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数与正比例函数交点问题及反比例函数与正比例函数图象的中心对称性，熟练掌握反比例函数图象的特征是解题的关键．反比例函数的图象是中心对称图形，则经过原点的直线的两个交点一定关于原点对称．

【详解】 解： $\because$ 点 $A(2, a)$ 是直线 $y = kx$ 与双曲线 $y = \frac{k-1}{x}$ 图像的一个交点，

$$\therefore \begin{cases} a = 2k \\ a = \frac{k-1}{2} \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases},$$

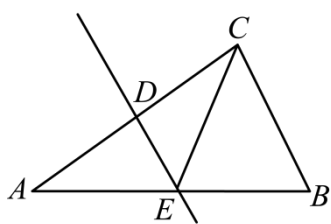
$$\therefore A\left(2, -\frac{2}{3}\right)$$

因为直线 $y = kx$ 过原点，双曲线 $y = \frac{k-1}{x}$ 的两个分支关于原点对称，

所以其交点坐标关于原点对称，一个交点坐标为 $\left(2, -\frac{2}{3}\right)$ ，另一交点的坐标是 $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ 。

故答案为： $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ 。

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， DE 为 AC 的垂直平分线， DE 交 AB 于点 E ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 70^\circ$ ，则 $\angle BCE =$ _____ $^\circ$ 。



【答案】 50

【解析】

【分析】 本题考查了线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等的性质，等边对等角的性质，熟记性质是解题的关键。根据 $\triangle ABC$ 中 DE 垂直平分 AC ，可求出 $AE = CE$ ，再根据等腰三角形的性质求出 $\angle ACE = \angle A = 30^\circ$ ，再由 $\angle A = 30^\circ, \angle B = 70^\circ$ ，根据三角形内角和定理可求 $\angle ACB$ 的度数，即可解答。

【详解】 解： $\because DE$ 垂直平分 $AC, \angle A = 30^\circ$,

$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle A = 30^\circ,$$

$$\because \angle A = 30^\circ, \angle B = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACB - \angle ACE = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ.$$

故答案为： 50.

13. 经过定点 A ，且半径为 8 厘米的圆的圆心轨迹是_____。

【答案】 以点 A 为圆心，8 厘米长为半径的圆

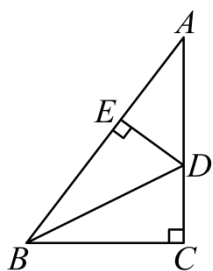
【解析】

【分析】此题考查了点的运动轨迹问题和点和圆的位置关系与数量之间的联系. 注意: 点在圆上, 即点到圆心的距离等于该圆的半径. 要求作经过定点 A , 且半径为 8 厘米的圆的圆心, 则圆心应满足到点 A 的距离恒等于 8 厘米, 根据点和圆的位置关系与数量之间的联系进行分析.

【详解】解: 根据题意, 得圆心应满足到点 A 的距离恒等于 8 厘米, 即经过定点 A , 且半径为 8 厘米的圆的圆心轨迹是以点 A 为圆心, 8 厘米长为半径的圆.

故答案为以点 A 为圆心, 8 厘米长为半径的圆.

14. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, $DE \perp AB$ 与点 E , 如果 $AB = 5\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$, 那么 $\triangle AED$ 的周长为 _____ cm .



【答案】6

【解析】

【分析】此题主要考查了全等三角形的判定与性质, 解本题的关键是得出 $BE = BC = 3$, $CD = DE$. 先证明 $\triangle BCD \cong \triangle BED$ (AAS), 可得 $BE = BC = 3$, $CD = DE$, 进而利用三角形的周长和等量代换即可得出结论.

【详解】解: $\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle DBC = \angle DBA,$$

$$\because \angle C = 90^\circ, DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle C = \angle DEB = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because BD = BD,$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BED (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = BC = 3\text{cm}, CD = DE,$$

$$\therefore AE = AB - BE = 2(\text{cm}),$$

$$\therefore \triangle AED \text{ 的周长为 } AE + AD + DE = AE + AD + CD = AE + AC = 2 + 4 = 6(\text{cm}),$$

故答案为: 6.

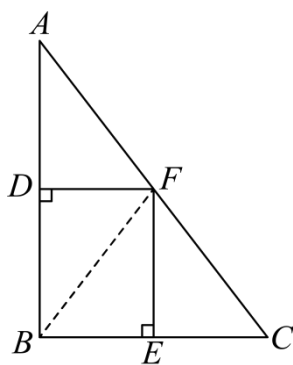
15. 如果一个三角形的两边的垂直平分线交点在第三边上, 则这个三角形的最大角的度数是 _____ $^\circ$.

【答案】 90

【解析】

【分析】 本题考查了垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理，根据垂直平分线的性质， $AF=BF$ ， $BF=CF$ ，再根据等边对等角的性质，得到 $\angle A = \angle ABF$ ， $\angle C = \angle CBF$ ，然后利用三角形内角和定理，即可得到答案.

【详解】 解：如图，连接 BF ，



由题意可知， DF 垂直平分 AB ， EF 垂直平分 BC ， DF 、 EF 交点 F 在 AC 上，

$$\therefore AF = BF, \quad BF = CF,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABF, \quad \angle C = \angle CBF,$$

$$\because \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ,$$

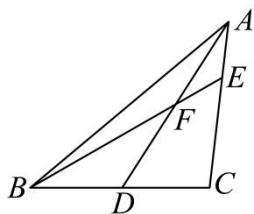
$$\therefore \angle A + \angle ABF + \angle CBF + \angle C = 2(\angle ABF + \angle CBF) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle CBF = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{这个三角形最大角的度数是 } 90^\circ,$$

故答案为：90.

16. 如图，已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，点 E 是 AC 上的一点， BE 交 AD 于点 F ， $AC = BF$ ， $\angle CAD = 26^\circ$ ， $\angle EBC = 30^\circ$ ， $\angle ACB$ 的度数为_____°.



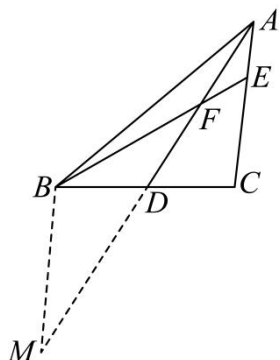
【答案】 98

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，添加恰当辅助线构造全等三角形是解题的关键. 由“SAS”可证 $\triangle BDM \cong \triangle CDA$ ，可得 $BM = AC = BF$ ， $\angle M = \angle CAD = 26^\circ$ ，由等腰三

角形的性质可求解.

【详解】解: 如图, 延长 AD 到 M , 使得 $DM = AD$, 连接 BM ,



在 $\triangle BDM$ 和 $\triangle CDA$ 中,

$$\begin{cases} DM = DA \\ \angle BDM = \angle CDA, \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDM \cong \triangle CDA (\text{SAS})$,

$\therefore BM = AC = BF$, $\angle M = \angle CAD = 26^\circ$,

$\because BF = AC$,

$\therefore BF = BM$,

$\therefore \angle M = \angle BFM = 26^\circ$,

$\therefore \angle MBF = 180^\circ - \angle M - \angle BFM = 128^\circ$,

$\because \angle EBC = 30^\circ$,

$\therefore \angle DBM = \angle MBF - \angle EBC = 98^\circ$,

$\therefore \angle ACB = \angle DBM = 98^\circ$,

故答案为: 98.

17. 点 $A(2, m)$ 为反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 上一点, 以 OA 为腰画等腰直角 $\triangle OAB$, 若点 B 在第三象限, 则点 B 的坐标为_____.

【答案】 $(-3, -2)$ 或 $(-1, -5)$

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质, 全等三角形的判定及性质; ①当 $\angle AOB = 90^\circ$ 时, 过 B 作 $BC \perp x$ 轴交于 C , 过 A 作 $AD \perp x$ 轴交于 D , 由 AAS 可判定 $\triangle OAD \cong \triangle BOC$, 由全等三角形的性质得 $AD = OC = 3$, $OD = BC = 2$, 即可求解; ②当 $\angle OAB = 90^\circ$ 时, 同理可求; 等腰三角形的性质, 全等三角形的判定及性质, 能根据等腰直角三角形的直角顶点不同进行分类讨论是解题的关键.

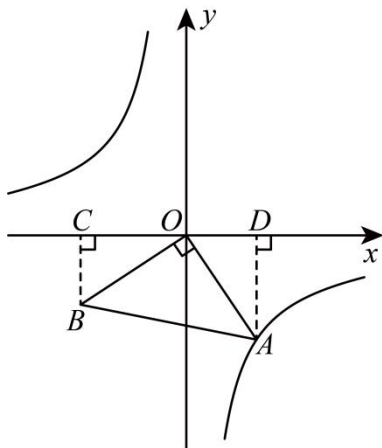
【详解】解：由题意得

$$m = -\frac{6}{2} = -3,$$

$$\therefore A(2, -3),$$

①当 $\angle AOB = 90^\circ$ 时,

如图, 过 B 作 $BC \perp x$ 轴交于 C , 过 A 作 $AD \perp x$ 轴交于 D ,



$$\therefore \angle ADO = \angle OCB = 90^\circ,$$

$$AD = 3, \quad OD = 2,$$

$$\therefore \angle AOD + \angle OAD = 90^\circ,$$

$\because \triangle OAB$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$OB = AO,$$

$$\therefore \angle BOC + \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle BOC,$$

在 $\triangle OAD$ 和 $\triangle BOC$ 中

$$\begin{cases} \angle OAD = \angle BOC \\ \angle ADO = \angle OCB, \\ OA = BO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OAD \cong \triangle BOC \quad (\text{AAS}),$$

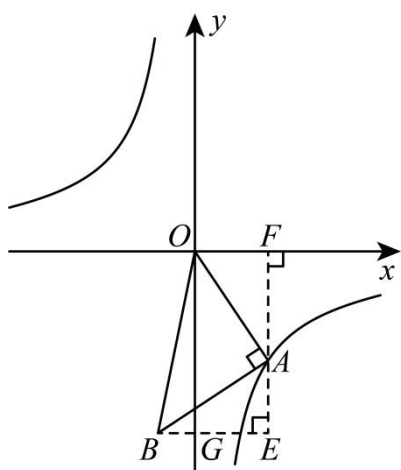
$$\therefore AD = OC = 3,$$

$$OD = BC = 2,$$

$$\therefore B(-3, -2);$$

②当 $\angle OAB = 90^\circ$ 时,

如图，过 A 作 $AF \perp x$ 轴交于 F ，过 B 作 $BE \perp y$ 轴交于 G ，交 FA 的延长线于 E ，



$$\therefore OF = 2, \quad AF = 3,$$

$EF \parallel y$ 轴,

$$\therefore EG = OF = 2,$$

同理可证: $\triangle AEB \cong \triangle OFA$,

$$\therefore AE = OF = 2,$$

$$BE = AF = 3,$$

$$\therefore BG = BE - EG$$

$$= 3 - 2 = 1,$$

$$EF = AF + AE$$

$$= 3 + 2 = 5,$$

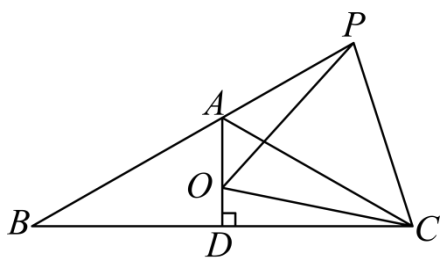
$$\therefore B(-1, -5);$$

综上所述: B 的坐标为 $(-3, -2)$ 或 $(-1, -5)$;

故答案: $(-3, -2)$ 或 $(-1, -5)$.

18. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中的高 AD 恰好平分边 BC , $\angle B = 30^\circ$, 点 P 是 BA 延长线上一点, 点 O 是线段 AD 上一点, 且 $OP = OC$, 下面的结论: ① $AB = AC$, ② $\triangle AOP \cong \triangle AOC$, ③ $\angle APO + \angle DCO = 30^\circ$,

④ $\triangle OPC$ 是等边三角形. 其中正确的为_____. (填序号)



【答案】①③④

【解析】

【分析】① 利用线段垂直平分线的性质直接判断即可；② 由于 $\angle AOP \neq \angle AOC$ ，据此即可判断本结论；

③ 连接 OB ，利用 SAS 可证得 $\triangle BDO \cong \triangle CDO$ ，于是可得 $\angle DBO = \angle DCO$ ， $OB = OC = OP$ ，由等边对等角可得 $\angle ABO = \angle APO$ ，然后根据已知条件 $\angle ABC = \angle ABO + \angle DBO = 30^\circ$ 即可判断本结论；④ 由三角形的内角和定理可得 $\angle BOP = 180^\circ - \angle OPB - \angle OBP$ ， $\angle BOC = 180^\circ - \angle OBC - \angle OCB$ ，进而可得 $\angle POC = 360^\circ - \angle BOP - \angle BOC = \angle OPB + \angle OBP + \angle OBC + \angle OCB$ ，结合 $\angle OPB = \angle OBP$ ， $\angle OBC = \angle OCB$ ，于是可得 $\angle POC = 2(\angle OBP + \angle OBC) = 2\angle ABC = 60^\circ$ ，再结合已知条件 $OP = OC$ 即可判断本结论；综上，即可得出答案.

【详解】解：① $\because \triangle ABC$ 中的高 AD 恰好平分边 BC ，

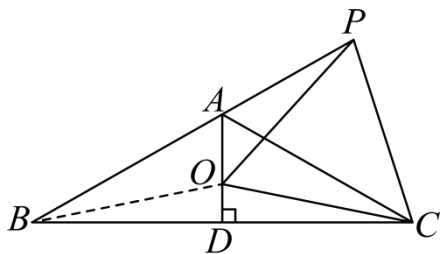
$\therefore AD$ 是线段 BC 的垂直平分线，

$\therefore AB = AC$ ，故结论①正确；

② 由图易知 $\angle AOP \neq \angle AOC$ ，

$\therefore \triangle AOP \cong \triangle AOC$ 不正确，故结论②不正确；

③ 如图，连接 OB ，



$\because \triangle ABC$ 中的高 AD 恰好平分边 BC ，

$\therefore BD = CD$ ， $\angle BDO = \angle CDO = 90^\circ$ ，

在 $\triangle BDO$ 和 $\triangle CDO$ 中，

$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle BDO = \angle CDO, \\ DO = DO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDO \cong \triangle CDO (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DBO = \angle DCO, \quad OB = OC = OP,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle APO,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle B = \angle ABO + \angle DBO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle APO + \angle DCO = 30^\circ, \text{ 故结论 ③ 正确;}$$

$$\text{④ 在 } \triangle BOP \text{ 中, } \angle BOP = 180^\circ - \angle OPB - \angle OBP,$$

$$\text{在 } \triangle BOC \text{ 中, } \angle BOC = 180^\circ - \angle OBC - \angle OCB,$$

$$\therefore \angle POC = 360^\circ - \angle BOP - \angle BOC = \angle OPB + \angle OBP + \angle OBC + \angle OCB,$$

$$\therefore \angle OPB = \angle OBP, \quad \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\therefore \angle POC = 2(\angle OBP + \angle OBC) = 2\angle ABC = 2 \times 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because OP = OC,$$

$$\therefore \triangle OPC \text{ 是等边三角形, 故结论 ④ 正确;}$$

综上, 正确的结论有: ①③④,

故答案为: ①③④.

【点睛】 本题主要考查了线段垂直平分线的性质, 全等三角形的判定与性质, 等边对等角, 三角形的内角和定理, 等边三角形的判定等知识点, 熟练掌握相关知识点并能加以综合运用是解题的关键.

三、简答题 (本大题共 4 题, 共 26 分)

19. 化简: $\sqrt{xy^2} \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{xy} + (\sqrt{x} - 1)^2 + \sqrt{x}.$

【答案】 $x\sqrt{y} + \sqrt{xy} + x - \sqrt{x} + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式混合运算, 先利用二次根式乘法及完全平方方式展开, 再合并同类项, 即可求解; 掌握 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ($a \geq 0, b \geq 0$), $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 是解题的关键.

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{x^2y} + \sqrt{xy} + x - 2\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}$
 $= x\sqrt{y} + \sqrt{xy} + x - 2\sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}$

$$= x\sqrt{y} + \sqrt{xy} + x - \sqrt{x} + 1.$$

20. 解方程: $(x-1)^2 - 4(x-1) = 12$.

【答案】 $x_1 = -1$, $x_2 = 7$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 移项后, 将 $(x-1)$ 看作整体进行因式分解为 $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$ 的形式可得 $a_1x + b_1 = 0$ 或 $a_2x + b_2 = 0$, 即可求解; 能根据方程的不同形式选择恰当的方法是解题的关键.

【详解】 解: $(x-1)^2 - 4(x-1) - 12 = 0$,

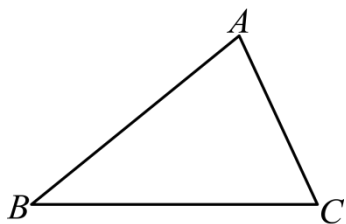
$$(x-1+2)(x-1-6) = 0,$$

$$x-1+2=0 \text{ 或 } x-1-6=0,$$

$$x+1=0 \text{ 或 } x-7=0,$$

$$\therefore x_1 = -1, \quad x_2 = 7.$$

21. 如图, 已知 $\triangle ABC$,



(1) 根据要求作图, 在边 BC 上求作一点 D , 使得点 D 到点 AB 、 AC 的距离相等, 在边 AB 上求作一点 E , 使得点 E 到 A 、 D 的距离相等; (不要求写作法, 但需要保留作图痕迹和结论)

(2) 在第 (1) 小题所作的图中, 求证: $DE \parallel AC$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

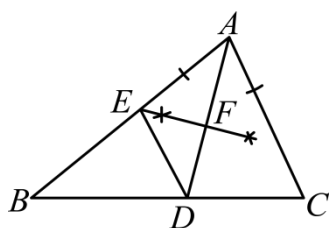
【解析】

【分析】 (1) 到 AB 、 AC 的距离相等, 则点 D 在 $\angle BAC$ 的角平分线上, 作 $\angle BAC$ 的角平分线与 BC 的交点即为点 D ; 到点 A 、 D 的距离相等, 则点 E 在 AD 的垂直平分线上, 作 AD 的垂直平分线与 AB 的交点即为点 E ;

(2) 根据角平分线的性质和线段垂直平分线的性质可得 $\angle CAD = \angle ADE$, 再根据平行线的判定即可求解.

【小问 1 详解】

解: 点 D 、 E 为所求作的点, 如图所示:



【小问 2 详解】

证明：∵ AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$$\therefore \angle CAD = \angle BAD,$$

∵ EF 是 AD 的中垂线，

$$\therefore ED = EA,$$

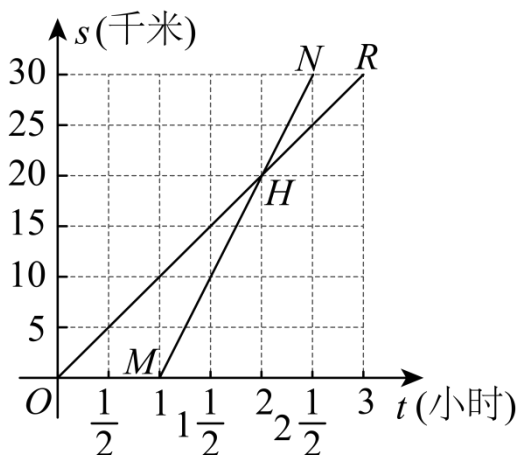
$$\therefore \angle ADE = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ADE,$$

$$\therefore DE \parallel AC.$$

【点睛】 本题考查了垂直平分线和角平分线的尺规作图，角平分线的性质、垂直平分线的性质、等腰三角形的定义和性质、以及两条直线平行的判定定理，判定直线平行的常用方法有：(1) 同位角相等，两直线平行；(2) 内错角相等，两直线平行；(3) 同旁内角互补，两直线平行.

22. 如图， A 、 B 两地相距 30 千米，甲骑自行车在中午 12 点从 A 地出发前往 B 地，乙在甲出发 1 小时后骑电瓶车从 A 地前往 B 地. 图中的线段 OR 和线段 MN 分别反映了甲和乙所行驶的路程 S (千米) 与行驶时间 t (小时) 的函数关系，请根据图像所提供的信息回答问题 (其中点 M 、 N 、 H 、 R 均位于格点).



- (1) 乙行驶_____小时后与甲相遇，两人的相遇地点距离 B 地_____千米；
- (2) 写出甲所行驶的路程 S (千米) 与行驶时间 t (小时) 的函数关系式_____；
- (3) 乙的行驶速度比甲快_____千米/时；
- (4) 当甲乙两人相距 5 千米，此刻的时间是下午_____ (写出所有可能的时间点).

【答案】 (1) 1, 10

(2) $S = 10t$

(3) 10

(4) 1:30 或 2:30

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数在路程问题中的应用，待定系数法；

(1) 由图象得甲乙相遇的坐标为 $H(2, 20)$ ，即可求解；

(2) 设 $S = kt$ ，将 $H(2, 20)$ 代入，即可求解；

(3) 由图象得 $V_{\text{甲}} = \frac{20}{2} = 10$ (千米/小时)， $V_{\text{乙}} = \frac{20}{2-1} = 20$ (千米/小时)，即可求解；

(4) 由待定系数法得直线 MN 的解析式为 $S = 20t - 20$ ，当 $S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = 5$ 时，当 $S_{\text{乙}} - S_{\text{甲}} = 5$ 时，即可求解；

理解图象的实际意义，掌握待定系数法是解题的关键.

【小问 1 详解】

解：由图象得，甲乙相遇的坐标为：

$$H(2, 20),$$

$\therefore$ 在甲出发 2 小时后与乙相遇，此时甲行驶的路程为 20 千米，

$$\therefore 2 - 1 = 1 \text{ (小时)},$$

$$30 - 20 = 10 \text{ (千米)},$$

故答案：1，10；

【小问 2 详解】

解：设 $S = kt$ ，图象经过 $H(2, 20)$ ，

$$\therefore 2k = 20,$$

解得： $k = 10$ ，

$$\therefore S = 10t,$$

故答案： $S = 10t$ ；

【小问 3 详解】

解：由图象得

$$V_{\text{甲}} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (千米/小时)},$$

$$V_{\text{乙}} = \frac{20}{2-1} = 20 \text{ (千米/小时)},$$

$$\therefore V_{\text{乙}} - V_{\text{甲}}$$

$$= 20 - 10$$

$$= 10 \text{ (千米/小时)},$$

故答案：10；

【小问4详解】

解：设直线 MN 的解析式为 $S = k_1 t + b$ ，图象经过 $M(1, 0)$ ， $H(2, 20)$ ，则有

$$\begin{cases} k_1 + b = 0 \\ 2k_1 + b = 20 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = 20 \\ b = -20 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 MN 的解析式为 $S = 20t - 20$ ，

当 $S_{\text{甲}} - S_{\text{乙}} = 5$ 时，

$$\therefore 10t - (20t - 20) = 5$$

解得： $t = 1.5$ ；

当 $S_{\text{乙}} - S_{\text{甲}} = 5$ 时，

$$\therefore 20t - 20 - 10t = 5$$

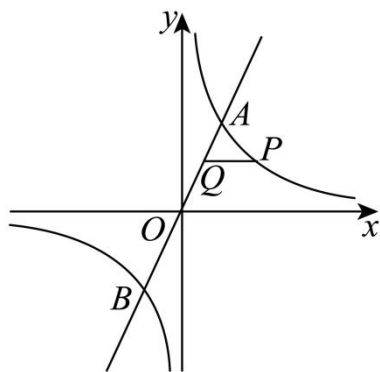
解得： $t = 2.5$ ；

故答案：1:30 或 2:30.

四、解答题（本大题共4题，共32分）

23. 如图，已知直线 $y = kx$ ($k > 0$) 与双曲线 $y = \frac{8}{x}$ 交于 A 、 B 两点，且点 A 的纵坐标为 4，第一象限的双曲

线上有一点 $P(a, 2)$ ，过点 P 作 $PQ \parallel x$ 轴交直线 AB 于点 Q 。



- (1) 直接写出 k 的值及点 B 的坐标;
- (2) 求线段 PQ 的长;
- (3) 如果在直线 $y = kx$ 上有一点 M , 且满足 $\triangle BPM$ 的面积等于 12, 求点 M 的坐标.

【答案】 (1) $k = 2, B(-2, -4)$

(2) 3

(3) 点 M 的坐标 $(2, 4)$ 或 $(-6, -12)$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数与一次函数综合, 求一次函数与正比例函数解析式, 三角形面积;

- (1) 先求得 A 点坐标, 再代入直线解析式可求得 k 的值, 根据对称性可求得 B 点坐标;
- (2) 由反比例函数解析式可求得 P 点坐标, 由直线解析式可求得 Q 点坐标, 可求得 PQ 的长;
- (3) 可设 M 坐标为 $(m, 2m)$, 分点 M 在线段 BQ 的延长线上和线段 QB 的延长线上两种情况, 分别表示出 $\triangle BPM$ 的面积, 可求得 m 的值, 可求得 M 的坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because A$ 在双曲线 $y = \frac{8}{x}$ 上, 且 A 的纵坐标为 4,

$\therefore A$ 坐标为 $(2, 4)$,

代入直线 $y = kx$, 可得 $4 = 2k$, 解得 $k = 2$,

又 A 、 B 关于原点对称,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-2, -4)$.

【小问 2 详解】

$\because$ 点 $P(a, 2)$ 在双曲线上, 代入 $y = \frac{8}{x}$, 得

$$2 = \frac{8}{a}, \text{ 解得: } a = 4$$

$$\therefore P(4, 2)$$

$\because PQ \parallel x$ 轴, 且点 Q 在直线 AB 上,

$\therefore$ 可设点 Q 的坐标为 $(t, 2)$. 代入 $y = 2x$, 得

$$2 = 2t, \text{ 解得: } t = 1$$

$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(1, 2)$.

$$\therefore PQ = 3.$$

【小问 3 详解】

$\because$ 点 M 在 $y = 2x$ 上, 设点 M 的坐标为 $(m, 2m)$.

$$S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} PQ \times |y_P - y_B| = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$$

$$\text{①当点 } M \text{ 在 } BQ \text{ 的延长线上时, } S_{\triangle BPM} = S_{\triangle BPQ} + S_{\triangle MPQ}, \quad 12 = 9 + \frac{1}{2} \times 3 \times (2m - 2)$$

$$\text{解得: } m = 2$$

点 M 的坐标为 $(2, 4)$.

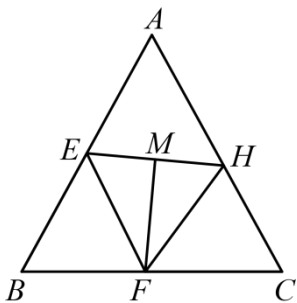
$$\text{②当点 } M \text{ 在 } QB \text{ 的延长线上时, } S_{\triangle BPM} = S_{\triangle MPQ} - S_{\triangle BPQ}, \quad 12 = \frac{1}{2} \times 3 \times (2 - 2m) - 9$$

$$\text{解得: } m = -6$$

点 M 的坐标为 $(-6, -12)$.

综上所述: 点 M 的坐标为 $(2, 4)$, $(-6, -12)$.

24. 已知: 如图 $AB = AC$, $\angle EFH = \angle B$, $BE = CF$, M 是 EH 的中点. 求证: $FM \perp EH$.



【答案】见详解

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质, 三角形外角的性质, 全等三角形的判定及性质; 由等腰三角形的

性质得 $\angle B = \angle C$ ，由三角形外角的性质得 $\angle BEF = \angle CFH$ ，由 ASA 可判定 $\triangle BEF \cong \triangle CFH$ ，由全等三角形的性质得 $EF = FH$ ，再由等腰三角形的“三线合一”，即可得证；掌握等腰三角形的性质，三角形外角的性质，全等三角形的判定及性质是解题的关键。

【详解】证明： $\because AB = AC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because \angle EFH = \angle B,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle B + \angle BEF = \angle EFH + \angle BEF,$$

$$\because \angle CFE = \angle EFH + \angle CFH,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle CFH,$$

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle CFH$ 中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ BE = CF \\ \angle BEF = \angle CFH \end{cases},$$

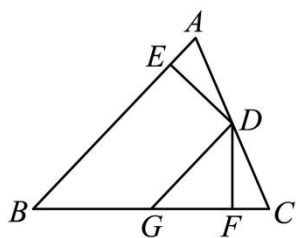
$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle CFH \quad (\text{ASA}),$$

$$\therefore EF = FH,$$

$\because M$ 是 EH 的中点，

$$\therefore FM \perp EH.$$

25. 已知：如图，点 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点，过点 D 作 $DE \perp AB$ ， $DF \perp BC$ ， E 、 F 为垂足，再过点 D 作 $DG \parallel AB$ ，交 BC 于点 G ，且 $DE = DF$ 。



(1) 求证： $DG = BG$ ；

(2) 求证： BD 垂直平分 EF 。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

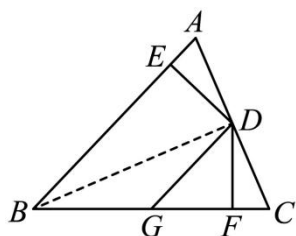
【解析】

【分析】(1) 连接 BD ，先根据 $DE \perp AB$ ， $DF \perp BC$ 且 $DE = DF$ ，可知 $\angle ABD = \angle DBC$ ，再根据 $DG \parallel AB$ 即可得出 $\angle ABD = \angle BDG$ ，进而可得出 $\angle BDG = \angle DBC$ ，由等角对等边可知 $DG = BG$ ；

(2) 先证明 $\text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle BDF$ (HL), 再根据全等三角形的性质可得出 $BF = BE$, 结合 $DE = DF$, 故可得出 BD 垂直平分 EF .

【小问 1 详解】

证明: 连接 BD .



$\because DE \perp AB, DF \perp BC$ 且 $DE = DF$,

$\therefore \angle ABD = \angle DBC$,

又 $\because DG \parallel AB$,

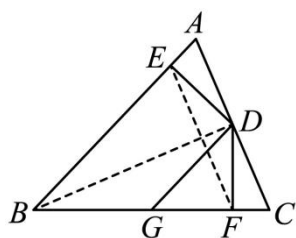
$\therefore \angle ABD = \angle BDG$,

$\therefore \angle BDG = \angle DBC$,

$\therefore DG = BG$;

【小问 2 详解】

如图, 连接 EF ,



$\because DE \perp AB, DF \perp BC$,

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 与 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} DE = DF \\ BD = BD \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle BDF$ (HL),

$\therefore BE = BF$,

$\because DE = DF$,

$\therefore BD$ 垂直平分 EF .

【点睛】 本题考查的是角平分线的判定及线段垂直平分线的判定、全等三角形的判定与性质, 等腰三角形的判定, 根据题意作出辅助线, 构造出全等三角形是解答此题的关键.

26. 已知 $\triangle ABC$, AD 是一条角平分线.

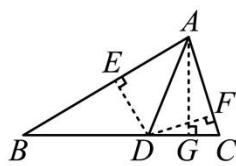


图1

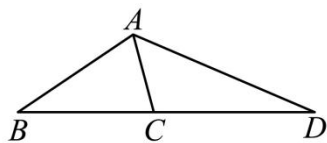


图2

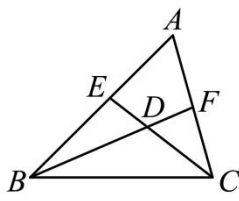


图3

(1) 【探究发现】如图 1 所示, 若 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线. 可得到结论: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

小红的解法如下:

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , $DF \perp AC$ 于点 F , 过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ,

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 且 $DE \perp AB$, $DF \perp AC$,

$\therefore$ _____. (_____)

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times DE}{\frac{1}{2}AC \times DF} = \text{_____}, \text{ 又 } \because \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times AG}{\frac{1}{2}CD \times AG} = \frac{BD}{CD}, \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

(2) 【类比探究】如图 2 所示, 若 AD 是 $\angle BAC$ 的外角平分线, AD 与 BC 的延长线交于点 D .

求证: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

(3) 【拓展应用】如图 3 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, BF 、 CE 分别是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的角平分线且相交于点 D , 若 $\frac{ED}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 直接写出 $\frac{FC}{BC}$ 的值是_____.

【答案】(1) $DE = DF$, 角平分线的性质, $\frac{AB}{AC}$

(2) 证明见解析 (3) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据三角形的面积公式以及角平分线的性质求解即可;

(2) 过点 D 作 $DN \perp BA$ 于 N , 过点 D 作 $DM \perp AC$ 于 M . 过点 A 作 $AP \perp BD$ 于点 P , 再利用角平分线的性质及等面积法证明即可;

(3) 在 BC 上取点 G , 使得 $BG = BE$, 连接 DG , 先利用全等三角形的判定得出 $\triangle BDE \cong \triangle BDG$, $\triangle DCG \cong \triangle DCF$, 再由其性质及前面的结论求解即可.

【小问 1 详解】

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ,

$DF \perp AC$ 于点 F ，过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ，

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，且 $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，

$\therefore DE = DF$ ，（角平分线的性质）

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times DE}{\frac{1}{2} AC \times DF} = \frac{AB}{AC},$$

$$\text{又} \because \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AG}{\frac{1}{2} CD \times AG} = \frac{BD}{CD},$$

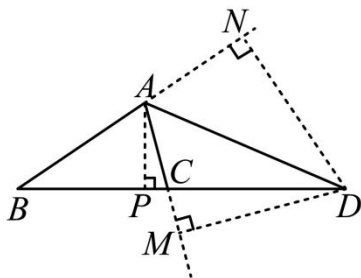
$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

【小问 2 详解】

如图，过点 D 作 $DN \perp BA$ 于 N ，

过点 D 作 $DM \perp AC$ 于 M ，

过点 A 作 $AP \perp BD$ 于点 P ，



$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的外角平分线，

即 AD 平分 $\angle MAN$ ，

$\therefore DN = DM$ ，

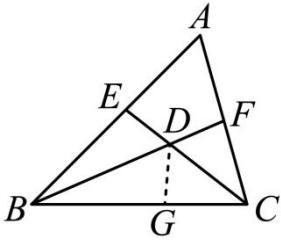
$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times DN}{\frac{1}{2} AC \times DM} = \frac{AB}{AC},$$

$$\text{又} \because \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \times AP}{\frac{1}{2} CD \times AP} = \frac{BD}{CD},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

【小问 3 详解】

在 BC 上取点 G ，使得 $BG = BE$ ，连接 DG ，



$\because BF$ 、 CE 分别是 $\angle ABC$ 、 $\angle ACB$ 的角平分线且相交于点 D ,

$$\therefore \angle DBE = \angle DBG, \angle DCG = \angle DCF,$$

$$\because \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC - \frac{1}{2}\angle ACB = 180^\circ - \frac{1}{2} \times 120^\circ = 120^\circ,$$

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle BDG$ 中,

$$\begin{cases} BD = BD \\ \angle DBE = \angle DBG, \\ BG = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BDG (\text{SAS}),$$

$$\because \angle BDE = 180^\circ - \angle BDC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BDG = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDG = 120^\circ - \angle BDG = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore DG \text{ 平分 } \angle BDC,$$

$$\therefore \angle CDF = 180^\circ - \angle BDC = 60^\circ,$$

在 $\triangle DCG$ 和 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle CDF = \angle CDG \\ DC = DC \\ \angle DCG = \angle DCF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DCG \cong \triangle DCF (\text{ASA}),$$

$$\therefore FC = GC,$$

$$\therefore \frac{ED}{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由 (1) 可得, 在 $\triangle EBC$ 中, BD 为 $\angle EBC$ 的角平分线,

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{ED}{DC} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

设 $BE = x$ ，则 $BC = \sqrt{2}x$ ，

$$\therefore BG = BE = x, \quad FC = CG = BC - BG = (\sqrt{2} - 1)x,$$

$$\therefore \frac{FC}{BC} = \frac{(\sqrt{2} - 1)x}{\sqrt{2}x} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查角平分线的性质及全等三角形的判定和性质，三角形等面积法，根式的运算，理解题意，熟练掌握运算角平分线的性质是解题关键.