

2024 学年第一学期八年级数学九月 B 练

一. 选择题 (6*2 = 12)

1. 在下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{18}$

B. $\sqrt{\frac{x}{3}}$

C. $\sqrt{a^2 + a^4}$

D. $\sqrt{a^2 - b^2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义, 被开方数不含能开得尽方的因数或因式, 被开方数的因数是整数, 因式是整式, 依据此两项要求进行判断即可.

【详解】A. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 故此选项错误;

B. $\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{3x}}{3}$, 故此选项错误;

C. $\sqrt{a^2 + a^4} = |a|\sqrt{1 + a^2}$, 故此选项错误;

D. $\sqrt{a^2 - b^2}$ 是最简二次根式, 故此选项正确;

故选: D.

【点睛】本题考查了最简二次根式的定义, 熟记最简二次根式的定义是解题的关键.

2. 下列二次根式中, 属于同类二次根式的是 ()

A. $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\sqrt{18}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2}}$

D. $\sqrt{4a}$ 与 $\sqrt{8a}$

【答案】C

【解析】

【详解】解: 选项 A. $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{6}$, 显然不是,

选项 B. $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, 不是,

选项 C. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, C 正确,

选项 D. $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$, 不是,

故选: C.

3. 若方程 $(m-1)x^{m^2+1} + 3x + 5 = 0$ 是一元二次方程，则 m 的值等于 ()

A. ± 1

B. 1

C. -1

D. 0

【答案】C

【解析】

【分析】把含有一个未知数且未知数的最高次数为二次的整式方程是一元二次方程，根据一元二次方程的概念即可完成.

【详解】解：由题意得： $m^2 + 1 = 2$ 且 $m-1 \neq 0$

解得： $m = -1$

即当 $m = -1$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1} + 3x + 5 = 0$ 是一元二次方程.

故选 C.

【点睛】本题考查了一元二次方程的概念，其一般形式为 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 $a \neq 0$ ，且 a, b, c 是常数，理解概念是关键.

4. 下列运算中，正确的是 ()

A. $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2$

B. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 1$

C. $\sqrt{(-4)^2 \times 3} = -4\sqrt{3}$

D. $\sqrt{(-3) \times (-5)} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查二次根式的混合运算，根据二次根式的加法，完全平方公式，二次根式的性质及二次根式的乘法依次对各选项进行判断即可. 掌握二次根式的运算法则、性质及公式是解题的关键.

【详解】解：A. $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \neq 2$ ，故此选项不符合题意；

B. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6} \neq 1$ ，故此选项不符合题意；

C. $\sqrt{(-4)^2 \times 3} = 4\sqrt{3} \neq -4\sqrt{3}$ ，故此选项不符合题意；

D. $\sqrt{(-3) \times (-5)} = \sqrt{15} = \sqrt{3} \times \sqrt{5}$ ，故此选项符合题意.

故选：D.

5. 用配方法解方程 $x^2 + 8x - 3 = 0$ ，方程变形为 $(x + p)^2 = q$ ，则 $p + q =$ ()

A. 25

B. 24

C. 23

D. 22

【答案】C

【解析】

【分析】利用配方法求解即可.

本题考查了配方法, 正确理解配方法是解题的关键.

【详解】解: 原方程变形得: $x^2 + 8x = 3$,

配方得: $x^2 + 8x + 4^2 = 19$,

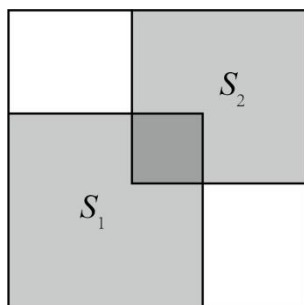
即 $(x + 4)^2 = 19$,

故 $p = 4, q = 19$,

$p + q = 23$,

故选: C.

6. 如图, 在大正方形纸片中放置两个小正方形, 已知两个小正方形的面积分别为 $S_1 = 18$, $S_2 = 12$, 重叠部分是一个正方形, 其面积为 2, 则空白部分的面积为 ()



A. 6

B. 16

C. $8\sqrt{6} - 16$

D. $8\sqrt{6} - 8$

【答案】D

【解析】

【分析】先算出三个小正方形的边长, 再得到大正方形的边长, 通过面积的计算得结论.

【详解】解: $\because$ 三个小正方形的面积分别为 18、12、2,

$\therefore$ 三个小正方形的边长分别为 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{2}$.

由题图知: 大正方形的边长为: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\text{空白}} = (2\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 - (18 + 12 - 2)$

$= 8 + 12 + 8\sqrt{6} - (18 + 12 - 2)$

$= 8\sqrt{6} - 8$.

故选：D.

【点睛】本题考查了二次根式的应用，用小正方形的边长表示出大正方形的边长是解决本题的关键.

二. 填空题 (12*2 = 24)

7. 当_____时，二次根式 $\sqrt{2+3x}$ 有意义.

【答案】 $x \geq -\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】确定二次根式中被开方数的取值范围，要求被开方数是非负数即可，根据题意得到关于x的一次不等式，解出x即可得结果.

【详解】要使二次根式 $\sqrt{2+3x}$ 有意义，则

$$2+3x \geq 0,$$

$$\text{解得 } x \geq -\frac{2}{3},$$

$$\text{故答案为: } x \geq -\frac{2}{3}.$$

【点睛】本题考查了二次根式中被开方数的取值范围，理解二次根式中被开方数必须是非负数是解题的关键.

8. 已知 $2 < a < 3$ ，化简 $\sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(2-a)^2} =$ _____.

【答案】1

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的化简，先根据已知判断出被开方数的符号，再根据二次根式的性质化简即可，掌握二次根式的性质是解题的关键.

【详解】解： $\because 2 < a < 3$,

$$\therefore a-3 < 0, \quad 2-a < 0,$$

$$\therefore \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(2-a)^2} = 3-a+a-2=1,$$

故答案为：1.

9. 等式 $\sqrt{\frac{x+1}{x-5}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-5}}$ 成立的条件是_____.

【答案】 $x > 5$

【解析】

【分析】利用二次根式商的性质，商的算术平方根等于算术平方根的商，其中要满足的条件是分子的被开

方数必须大于等于 0，分母的被开方数大于 0，列出关于 x 的一元一次不等式组求解即可.

【详解】要使 $\sqrt{\frac{x+1}{x-5}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-5}}$ 有意义，则

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-5 > 0 \end{cases},$$

解得： $x > 5$,

故答案为： $x > 5$.

【点睛】 本题考查了二次根式商的性质，掌握二次根式商的性质是解题的关键.

10. 计算： $\sqrt{18} \div \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的混合运算进行计算即可求解.

【详解】 解： $\sqrt{18} \div \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{18 \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}} = 4\sqrt{2}$,

故答案为： $4\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的乘除法混合运算，掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

11. 方程 $2x^2 = x$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据因式分解法解方程即可.

【详解】 $2x^2 = x$

$$2x^2 - x = 0$$

$$x(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } 2x-1 = 0$$

$$\therefore \text{该方程的解为: } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$$

故答案为: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$

【点睛】 本题考查解一元二次方程. 掌握解一元二次方程的方法是解题关键.

12. 如果 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 则 $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - 2$ 的值是_____.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 将二次根式的被开方数和一元二次方程同时进行化简, 最后都化成含 $x + \frac{1}{x}$ 的式子, 然后再将二次根式进行化简.

【详解】 解: 方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 中, 当 $x = 0$ 时, 方程左边为 $0 - 0 + 1 = 1 \neq 0$, 故 $x \neq 0$;
将方程两边同除以 x , 则有:

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0, \text{ 即 } x + \frac{1}{x} = 3,$$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}} - 4 = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} - 4 = \sqrt{3^2 - 4} = \sqrt{5},$$

故答案为: $\sqrt{5}$.

【点睛】 本题的难点在于需将一元二次方程和二次根式的被开方数同时进行变形, 形如 $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 的式子转化, 应该立刻联想到 $a^2 \pm 2 + \frac{1}{a^2} = \left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2$ 的变形.

13. 不等式 $(2 - \sqrt{5})x > 1$ 的解集是_____.

【答案】 $x < -2 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据一元一次不等式的解法, 利用不等式的性质即可求解.

【详解】 $\because (2 - \sqrt{5})x > 1$, $2 - \sqrt{5} < 0$,

$$\therefore x < \frac{1}{2 - \sqrt{5}},$$

$$\text{即 } x < -2 - \sqrt{5},$$

故答案为: $x < -2 - \sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了一元一次不等式的解法，掌握一元一次不等式的解法是解题的关键.

14. 如果最简根式 $2\sqrt{m^2-7}$ 与 $4\sqrt{8m+2}$ 是同类二次根式，那么 $m=$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，这几个二次根式叫做同类二次根式，根据定义可知， $m^2-7=8m+2$ ，解方程即可，但需注意的是求出 m 的值还需保证二次根式有意义.

【详解】 $\because$ 最简根式 $2\sqrt{m^2-7}$ 与 $4\sqrt{8m+2}$ 是同类二次根式

$$\therefore m^2-7=8m+2$$

解得 $m_1=9$, $m_2=-1$

将 $m_1=9$ 代入原二次根式中，被开方数均 >0 ，故正确；

将 $m_2=-1$ 代入原二次根式中，被开方数均 <0 ，故舍去.

故答案为 9.

【点睛】 此题考查的是同类二次根式的概念、一元二次方程的解法及二次根式有意义的条件，需注意的是求出 m 的值需代回到原分式中分析是否有意义.

15. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx-2024=0$ 有一个根为 1，则 $a+b=$ _____.

【答案】 2024

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解，把 $x=1$ 代入 $ax^2+bx-2024=0$ 求解即可.

【详解】 解： $\because$ 一元二次方程 $ax^2+bx-2024=0$ 有一个根为 1，

$$\therefore a+b-2024=0,$$

$$\therefore a+b=2024,$$

故答案为：2024.

16. 已知 $(x^2+y^2)(x^2+y^2-5)=6$ ，则 $x^2+y^2=$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 设 $x^2+y^2=m$ ，把原方程转化为含 m 的一元二次方程，先用因式分解法求解，再确定 x^2+y^2 的值.

【详解】 设 $x^2+y^2=m$ ，原方程可变形为： $m(m-5)=6$ ，

$$\text{即 } m^2-5m-6=0.$$

$$\therefore (m-6)(m+1)=0,$$

解得 $m_1=6$, $m_2=-1$.

$$\because m=x^2+y^2 \geq 0,$$

$$\therefore x^2+y^2=6.$$

故答案为: 6.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解法, 掌握换元法和因式分解法解一元二次方程是解决本题的关键.

17. 已知三角形两边长分别是 2 和 9, 第三边的长为一元二次方程 $x^2 - 14x + 48 = 0$ 的一个根, 则这个三角形的周长为_____.

【答案】 19

【解析】

【分析】 利用因式分解法可得方程的两根, 那么根据三角形的三边关系, 得到符合题意的边, 进而求得三角形周长即可.

【详解】 解: 解方程 $x^2 - 14x + 48 = 0$ 得第三边的边长为 6 或 8,

依据三角形三边关系, 不难判定边长 2, 6, 9 不能构成三角形, 2, 8, 9 能构成三角形,

$$\therefore \text{三角形的周长} = 2 + 8 + 9 = 19.$$

故答案为: 19.

【点睛】 本题考查了解一元二次方程——因式分解法和三角形三边关系, 求三角形的周长, 不能盲目地将三边长相加起来, 而应养成检验三边长能否成三角形的好习惯.

18. 人们把 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 这个数叫做黄金分割数, 著名数学家华罗庚优选法中的 0.618 法就应用了黄金分割数. 设

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \text{则 } ab = 1, \quad \text{记 } S_1 = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b}, \quad S_2 = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}, \quad \dots,$$

$$S_{10} = \frac{1}{1+a^{10}} + \frac{1}{1+b^{10}}. \quad \text{则 } S_1 + S_2 + \dots + S_{10} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 10

【解析】

【分析】 先根据 $ab = 1$ 求出 $S_n = \frac{1}{1+a^n} + \frac{1}{1+b^n}$ (n 为正整数) 的值, 从而可得 $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ 的值, 再求和即可得.

【详解】 解: $\because ab = 1$,

$$\therefore S_n = \frac{1}{1+a^n} + \frac{1}{1+b^n} = \frac{1}{1+a^n} + \frac{a^n}{a^n(1+b^n)} \quad (n \text{ 为正整数}),$$

$$= \frac{1}{1+a^n} + \frac{a^n}{a^n + (ab)^n},$$

$$= \frac{1}{1+a^n} + \frac{a^n}{a^n + 1},$$

$$= 1,$$

$$\therefore S_1 = S_2 = \cdots = S_{10} = 1,$$

$$\text{则 } S_1 + S_2 + \cdots + S_{10} = 10,$$

故答案为：10.

【点睛】本题考查了二次根式的运算、分式的运算，正确发现一般规律是解题关键.

三. 解答题 (共 64 分)

19. 计算:

$$(1) \sqrt{1\frac{2}{3}} - 2\sqrt{45} - \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$(2) (3\sqrt{3} + 2\sqrt{7})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}) + (3\sqrt{5} - 2)^2$$

【答案】(1) $\frac{\sqrt{15}}{3} - 5\sqrt{5} + \sqrt{3}$

(2) $48 - 12\sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的运算，解题的关键是：

(1) 先化简各式，然后计算加减即可；

(2) 根据平方差公式、完全平方公式展开，然后计算加减即可；

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \sqrt{1\frac{2}{3}} - 2\sqrt{45} - \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{3}} - 2\sqrt{9 \times 5} - \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{3} - 6\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{3} - 5\sqrt{5} + \sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & (3\sqrt{3} + 2\sqrt{7})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{7}) + (3\sqrt{5} - 2)^2 \\ &= 27 - 28 + 45 - 12\sqrt{5} + 4 \\ &= 48 - 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

20. 化简:

$$(1) \quad 4\sqrt{xy^2} \times \sqrt{\frac{x}{y^3}} \div 10\sqrt{\frac{y}{x^2}}$$

$$(2) \quad \frac{xy - \sqrt{xy}}{\sqrt{xy} - 1} \div \frac{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}}{4x - 4\sqrt{xy} + y}$$

【答案】 (1) $\frac{2x^2}{5y}$

(2) $y\sqrt{x} - 2x\sqrt{y}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的运算，解题的关键是：

- (1) 根据二次根式的乘除混合运算法则计算即可；
- (2) 把各式子的分子、分母进行因式分解，然后把除法转换为乘法，再进行约分，最后根据二次根式的乘法、二次根式的性质化简计算即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & 4\sqrt{xy^2} \times \sqrt{\frac{x}{y^3}} \div 10\sqrt{\frac{y}{x^2}} \\ &= (4 \times 1 \div 10) \cdot \sqrt{xy^2 \times \frac{x}{y^3} \div \frac{y}{x^2}} \\ &= \frac{2}{5} \sqrt{\frac{x^4}{y^2}} \\ &= \frac{2x^2}{5y}; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解: } & \frac{xy - \sqrt{xy}}{\sqrt{xy} - 1} \div \frac{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}}{4x - 4\sqrt{xy} + y} \\
 &= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{xy} - 1)}{\sqrt{xy} - 1} \div \frac{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}}{(2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2} \\
 &= \sqrt{xy} \times \frac{(2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{y} - 2\sqrt{x}} \\
 &= \sqrt{xy} \times (\sqrt{y} - 2\sqrt{x}) \\
 &= y\sqrt{x} - 2x\sqrt{y}.
 \end{aligned}$$

21. 解方程

$$(1) \quad \frac{x^2 - 1}{3} + \frac{x}{2} = x$$

$$(2) \quad 4x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (\text{用配方法})$$

【答案】 (1) $x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 2$

$$(2) \quad x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，解题的关键是：

- (1) 把原方程化成一般式，然后根据因式分解法求解即可；
- (2) 根据配方法求解即可.

【小问 1 详解】

解：原方程可化为 $2x^2 - 3x - 2 = 0$,

$$\therefore (2x + 1)(x - 2) = 0,$$

$$\therefore 2x + 1 = 0 \text{ 或 } x - 2 = 0,$$

$$\therefore x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 2;$$

【小问 2 详解】

解： $4x^2 - 2x - 1 = 0$,

$$\therefore 4x^2 - 2x = 1,$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4},$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16},$$

$$\therefore x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

22. 设 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 的整数部分为 x ，小数部分为 y ，试求 $x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2$ 的值.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了无理数的估算，二次根式的化简求值，先对二次根式化简，再利用夹逼法求出 x 、 y 的值，最后代入代数式计算即可求解，利用夹逼法求出 x 、 y 的值是解题的关键.

$$\text{【详解】 解: } \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}-1) \times (\sqrt{5}+1)} = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+3}{2},$$

$$\because 2 < \sqrt{5} < 3,$$

$$\therefore 5 < \sqrt{5}+3 < 6,$$

$$\therefore 2.5 < \frac{\sqrt{5}+3}{2} < 3,$$

$$\text{即 } 2.5 < \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} < 3$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \text{ 的整数部分为 } x, \text{ 小数部分为 } y,$$

$$\therefore x = 2, \quad y = \frac{\sqrt{5}+3}{2} - 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2$$

$$= 2^2 + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2,$$

$$= 4 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4},$$

$$= 4 + 1,$$

$$= 5.$$

23. 已知: $a+b=3$, $ab=1$, 且 $a>b$, 求 $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 的值.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方方式的变形运用, 二次根式的化简求值, 利用完全平方公式可得 $a-b=\sqrt{5}$, 再对二次根式进行化简, 最后把式子的值代入计算即可求解, 掌握以上知识点是解题的关键.

【详解】 解: $\because a+b=3$, $ab=1$,

$$\therefore (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 3^2 - 4 \times 1 = 5,$$

$$\therefore a > b,$$

$$\therefore a-b=\sqrt{5},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$$

$$= \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b},$$

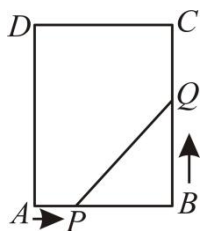
$$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b},$$

$$= \frac{3-2 \times 1}{\sqrt{5}},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

24. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, 点 P 从 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1 厘米/秒的速度移动, 点 Q 从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2 厘米/秒的速度移动, 如果 P 、 Q 分别是 A 、 B 同时出发, 当其中一个点到达终点时, 两个点都停止运动.



(1) 求经过几秒时, $\triangle PBQ$ 的面积等于 8 平方厘米?

(2) $\triangle PBQ$ 的面积能否等于 10 平方厘米, 如果能求出运动的时间, 如果不能, 请说明理由.

【答案】 (1) 2 秒或 4 秒

(2) 不能, 理由见解析

【解析】

【分析】 一元二次方程的实际应用, 根据题意, 正确表示出线段长度及, 利用三角形面积公式列出方程求解, 是解答本题的关键.

(1) 设运动时间为 x 秒, 根据三角形面积公式构建方程求解即可;

(2) 设运动时间为 x 秒, $\triangle PBQ$ 的面积等于 10 平方厘米, 根据三角形面积公式构建方程, 解方程即可判断.

【小问 1 详解】

解: 设运动时间为 x 秒, 则 $AP = x\text{cm}$, $BQ = 2x\text{cm}$,

又 $AB = 6\text{cm}$,

$$\therefore BP = (6 - x)\text{cm},$$

$$\text{根据题意, 得 } \frac{1}{2}(6 - x) \cdot 2x = 8,$$

$$\text{解得 } x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$$

$\therefore$ 经过 2 秒或 4 秒后, $\triangle PBQ$ 的面积等于 8 平方厘米;

【小问 2 详解】

解: 设运动时间为 x 秒, $\triangle PBQ$ 的面积等于 10 平方厘米,

$$\text{根据题意, 得 } \frac{1}{2}(6 - x) \cdot 2x = 10,$$

$$\text{整理得 } x^2 - 6x + 10 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \times 10 = -4 < 0,$$

∴ 方程无解,

∴ $\triangle PBQ$ 的面积不能等于 10 平方厘米.

25. 配方法是数学中重要的一种思想方法, 这种方法是根据完全平方公式的特征进行代数式的变形, 并结合非负数的意义来解决一些问题. 我们规定: 一个整数能表示成 $a^2 + b^2$ (a, b 是整数) 的形式, 则称这个数为“完美数”. 例如, 10 是“完美数”, 理由: 因为 $10 = 3^2 + 1^2$, 所以 10 是“完美数”.

解决问题:

(1) 下列各数中, “完美数”有_____ (填序号);

①29 ②48 ③13 ④28

(2) 若 $a^2 - 6a + 18$ 可配方成 $(a - m)^2 + n^2$ (m, n 为常数), 则 mn 的值_____;

(3) 已知 $S = a^2 + 4ab + 5b^2 - 12b + k$ (a, b 是整数, k 是常数), 要使 S 为“完美数”, 试求出符合条件的一个 k 值, 并说明理由.

拓展应用:

(4) 已知实数 a, b 满足 $-a^2 + 5a + b - 3 = 0$, 求 $a + b$ 的最小值.

【答案】 (1) ①③ (2) ± 9

(3) 当 $k = 36$ 时, S 是完美数, 理由见解析

(4) $a + b$ 的最小值为 -1

【解析】

【分析】 (1) 根据“完美数”的定义依次进行判断即可;

(2) 利用配方法进行转化, 然后求得对应系数的值, 进而得出结果;

(3) 利用完全平方式把原式变形, 根据“完美数”的定义, 即可证明结论;

(4) 利用配方法和非负数的性质, 即可求得 $a + b$ 的最小值.

【小问 1 详解】

解: $\because 29 = 25 + 4 = 5^2 + 2^2$, $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$, 48 和 28 不能表示成两个数的平方和,

∴ “完美数”有 29 和 13,

故答案为: ①③;

【小问 2 详解】

解: $\because a^2 - 6a + 18 = (a - 3)^2 + 9 = (a - m)^2 + n^2$,

∴ $m = 3$, $n^2 = 9$,

∴ $n = \pm 3$,

$$\therefore mn = \pm 9.$$

故答案为： ± 9 ；

【小问 3 详解】

解：（答案不唯一，合理即可）

当 $k = 36$ 时， S 是完美数；

理由如下： $S = a^2 + 4ab + 5b^2 - 12b + 36$

$$= a^2 + 4ab + 4b^2 + b^2 - 12b + 36$$

$$= (a + 2b)^2 + (b - 6)^2$$

$\because a, b$ 是整数，

$\therefore a + 2b$ 和 $b - 6$ 也是整数，

$\therefore$ 当 $k = 36$ 时， S 是完美数；

【小问 4 详解】

解： $\because -a^2 + 5a + b - 3 = 0$ ，

$$\therefore a + b = a^2 - 4a + 3,$$

$$\therefore a + b = a^2 - 4a + 4 - 1,$$

$$\therefore a + b = (a - 2)^2 - 1,$$

$$\because (a - 2)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (a - 2)^2 - 1 \geq -1,$$

$\therefore a + b$ 的最小值为 -1 .

【点睛】 本题考查了配方法的应用，理解“完美数”的定义并能够灵活配方是解决问题的关键.