

2024 学年第一学期阶段性练习 (一)

八年级数学

(本卷满分 100 分, 完成时间 90 分钟)

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 正比例函数 $y = ax$ 中, y 随 x 的增大而增大, 则直线 $y = (-a-1)x$ 经过 ()

- A. 第一、三象限
B. 第二、三象限
C. 第二、四象限
D. 第三、四象限

【答案】C

【解析】

【分析】根据正比例函数的增减性, 可得 $a > 0$; 则 $-a-1 < 0$, 据此判断直线 $y = (-a-1)x$ 经过的象限.

【详解】解: $\because$ 正比例函数 $y = ax$ 中, y 随 x 的增大而增大,

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore -a-1 < 0,$$

$\therefore$ 直线 $y = (-a-1)x$ 经过第二、四象限.

故选: C.

【点睛】此题考查了正比例函数, 熟练掌握正比例函数的性质是解题的关键.

2. 下列函数中, 如果 $x > 0$, y 的值随 x 的值增大而增大, 那么这个函数是 ()

- A. $y = -2x$
B. $y = \frac{2}{x}$
C. $y = -x+1$
D. $y = -\frac{1}{x}$

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了一次函数、正比例函数以及反比例函数的性质等知识. 分别利用一次函数和反比例函数的性质分析得出即可.

【详解】解: A、 $y = -2x$, y 随 x 的增大而减小, 故本选项不符合题意;

B、 $y = \frac{2}{x}$, 当 $x > 0$, 则 y 随 x 的增大而减小, 故本选项不符合题意;

C、 $y = -x+1$, y 值随 x 值的增大而减小, 故本选项不符合题意;

D、 $y = -\frac{1}{x}$, 当 $x > 0$ 时, y 值随 x 值的增大而增大, 故本选项符合题意;

故选: D.

3. 已知 $A(2,5)$ 、 $B(1,1)$ 、 $C(-2,-5)$ 、 $D(-6,-15)$ 四点中, 只有一点不在同一个正比例函数的图象上, 这个点是 ()

A. A 点

B. B 点

C. C 点

D. D 点

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数的性质. 根据各点的坐标分别求得 k 的值, 再比较即可求解.

【详解】 解: 设正比例函数的解析式为 $y = kx (k \neq 0)$, 则 $k = \frac{y}{x}$,

对于 $A(2,5)$, $k = \frac{5}{2}$;

对于 $B(1,1)$, $k = 1$;

对于 $C(-2,-5)$, $k = \frac{5}{2}$;

对于 $D(-6,-15)$, $k = \frac{5}{2}$.

$\therefore$ 只有点 B 不在同一个正比例函数的图象上.

故选: B.

4. 在下列叙述中, 正确的个数有 ()

①正比例函数 $y = 2x$ 的图象经过二、四象限;

②一次函数 $y = 2x - 3$ 中, y 随 x 的增大而增大;

③函数 $y = 3x + 1$ 中, 当 $x = -1$ 时, 函数值为 $y = -2$;

④一次函数 $y = x + 1$ 图象与 x 轴交点为 $(-1, 0)$.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 ①根据 $y = 2x$ 中 $k = 2 > 0$, 可知函数图象经过第一、三象限; ②根据 $y = 2x - 3$ 中 $k = 2 > 0$, 可知 y 随 x 的增大而增大; ③当 $x = -1$ 时, $y = 3x + 1 = 3 \times (-1) + 1 = -2$; ④ $y = x + 1$ 中, 当 $x = -1$ 时, $y = 0$, 可知一次函数 $y = x + 1$ 与 x 轴交点为 $(-1, 0)$, 正确的叙述有 3 个.

【详解】 解: ① $\because$ 正比例函数 $y = 2x$ 中, $k = 2 > 0$,

$\therefore$ 有该函数图象经过第一、三象限,

故错误;

② $\because$ 一次函数 $y = 2x - 3$ 中, $k = 2 > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

故正确;

③ $\because x = -1$ 时,

$\therefore y = 3x + 1$ 中, $y = 3 \times (-1) + 1 = -2$,

故正确;

④ $\because$ 一次函数 $y = x + 1$ 中, $x = -1$ 时,

$y = 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = x + 1$ 图象与 x 轴交点为 $(-1, 0)$,

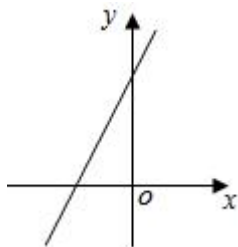
故正确.

$\therefore$ 综上所述: 正确的叙述是 3 个.

故选: C.

【点睛】 本题主要考查一次函数的图象和性质, 熟练掌握由一次函数的图象特征判定函数性质, 由解析式的系数特征判定函数图象特征, 点和图象位置关系的判定, 是解题的关键.

5. 如图, 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(-1, 0)$ 与 $(0, 2)$, 则关于 x 的不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 ()



A. $x > -1$

B. $x < -1$

C. $x > 2$

D. $x < 2$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(-1, 0)$, 且 y 随 x 的增大而增大, 得出当 $x > -1$ 时, $y > 0$, 即可得到关于 x 的不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 $x > -1$.

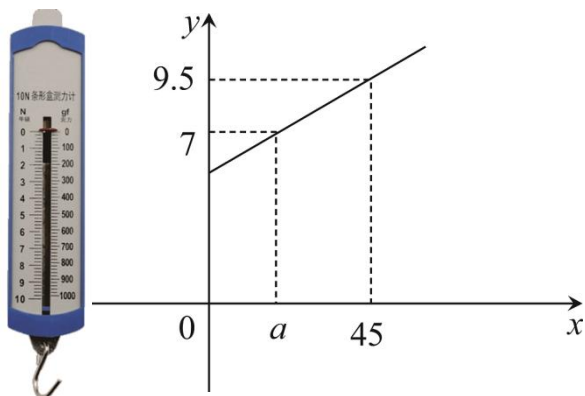
【详解】 由题意可得: 一次函数 $y = kx + b$ 中, $y > 0$ 时, 图象在 x 轴上方, $x > -1$, 则关于 x 的不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 $x > -1$,

故选 A.

【点睛】 此题主要考查了一次函数与一元一次不等式, 关键是掌握数形结合思想. 认真体会一次函数与一

元一次不等式之间的内在联系.

6. 如图, 一个条形测力计不挂重物时长 5cm, 挂上重物后, 在弹性限度内弹簧伸长的长度与所挂重物的质量成正比. 弹簧总长 y (单位: cm) 关于所测力的大小 x (单位: N) 的函数图象如图所示, 则图中 a 的值是 ()



A. 15

B. 18

C. 19

D. 20

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意条形测力计不挂重物时长 5cm, 可得函数图象与 y 轴的交点为 $(0, 5)$, 由于函数图象过点 $(45, 9.5)$, 故运用待定系数法可求得函数解析式为 $y = 0.1x + 5$, 最后将点 $(a, 7)$ 代入函数解析式中, 可求得 a 的值.

【详解】解: $\because$ 条形测力计不挂重物时长 5cm,

$\therefore$ 函数图象与 y 轴的交点为 $(0, 5)$,

故函数图象过点 $(0, 5)$, $(45, 9.5)$,

设函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\text{则有} \begin{cases} 0 + b = 5 \\ 45k + b = 9.5 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 5 \\ k = 0.1 \end{cases},$$

$\therefore$ 函数解析式为 $y = 0.1x + 5$,

$\because$ 点 $(a, 7)$ 在函数图象上,

$\therefore$ 将点 $(a, 7)$ 代入函数解析式 $y = 0.1x + 5$, 可得, $0.1a + 5 = 7$,

解得， $a = 20$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查了实际问题中的函数问题，通过读取题目已知条件，运用待定系数法求得函数解析式是解题的关键.

二、填空题（每题 2 分，共 24 分）

7. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是_____

【答案】 $x > 1$

【解析】

【分析】本题考查了函数的定义域，二次根式和分式有意义的条件. 根据二次根式和分式有意义的条件列不等式即可.

【详解】解：根据题意可得， $x-1 > 0$ ，

解得， $x > 1$ ，

故答案为： $x > 1$.

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ，那么 $f(\sqrt{2}-1) =$ _____.

【答案】 $2 + \sqrt{2}$

【解析】

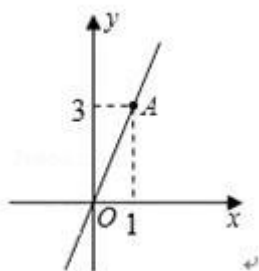
【分析】根据题意可知 $x = \sqrt{2}-1$ ，代入原函数即可解答.

【详解】因为函数 $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ，

所以当 $x = \sqrt{2}-1$ 时， $f(x) = \frac{\sqrt{2}-1+1}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查了代数式求值问题，熟练掌握相关知识点以及二次根式的运算是解题关键.

9. 如图，正比例函数图象经过点 A，该函数解析式是_____.



【答案】 $y=3x$.

【解析】

【详解】 试题分析：设该正比例函数的解析式为 $y=kx$ ，把点 A (1, 3) 代入 $y=kx$ ， $\therefore 3=k$ ，
即该正比例函数的解析式为 $y=3x$.

考点：待定系数法求正比例函数解析式.

10. 已知 $y = (m+3)x^{m^2+2m-2} - 5$ 是 y 关于 x 的一次函数，则 $m =$ _____

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的定义，形如 $y = kx + b (k \neq 0, k, b \text{ 为常数})$ 的函数为一次函数. 根据定义得：

$m^2 + 2m - 2 = 1$ 且 $m + 3 \neq 0$ ，求出 m 的值即可.

【详解】 解： $\because y = (m+3)x^{m^2+2m-2} - 5$ 是 y 关于 x 的一次函数，

$\therefore m^2 + 2m - 2 = 1$ 且 $m + 3 \neq 0$ ，

解 $m^2 + 2m - 2 = 1$ 得 $m = -3$ 或 $m = 1$ ，

解 $m + 3 \neq 0$ 得 $m \neq -3$ ，

$\therefore m = 1$.

故答案为：1.

11. 直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 平行于直线 $y = \frac{1}{2}x$ 且经过点 $(0, 2)$ ，那么这条直线的解析式是_____.

【答案】 $y = \frac{1}{2}x + 2$

【解析】

【分析】 根据直线平行的性质：一次项系数相等得到直线解析式为 $y = \frac{1}{2}x + b$ ，再将 $(0, 2)$ 代入即可得到 b ，
即可得到这条直线解析式

【详解】 解：根据题意得 $k = \frac{1}{2}$ ，

将 $(0, 2)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x + b$ 得 $b = 2$ ，

$\therefore$ 直线解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 2$ ，

故答案为： $y = \frac{1}{2}x + 2$.

【点睛】 本题考查了两直线平行的问题：直线 $y = k_1x + b_1$ ($k_1 \neq 0$) 和直线 $y = k_2x + b_2$ ($k_2 \neq 0$) 平行，则 $k_1 = k_2$ ，并涉及到待定系数法求函数的解析式，熟练掌握两条直线平行的性质是解决问题的关键.

12. 函数 $y = 3(x - 2) + 5$ 的图象在 y 轴上的截距为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的性质. 先根据一次函数的解析式判断出 b 的值，再根据一次函数的性质进行解答.

【详解】 解：令 $x = 0$ ，则 $y = 3(0 - 2) + 5 = -6 + 5 = -1$ ，

$\therefore$ 此函数图象在 y 轴上的截距是 -1 .

故答案为： -1 .

13. 若直线 $y = 3x + b$ 与坐标轴围成的三角形面积是 6，则 $b =$ _____.

【答案】 ± 6

【解析】

【分析】 由直线 $y = 3x + b$ 与坐标轴围成的三角形面积是 6，得 $b \neq 0$ ，则 $b > 0$ 或 $b < 0$ ，故需分这两种情况讨论.

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = 3x + b$ 与坐标轴围成的三角形面积是 6，

$\therefore b \neq 0$.

①当 $b > 0$ 时， $y = 3x + b$ 的图象如图 1.

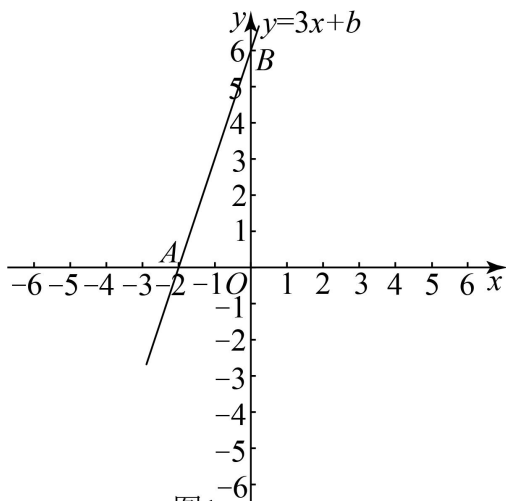


图1

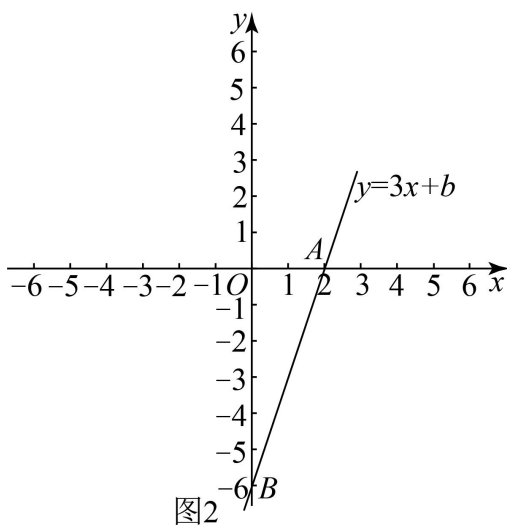
当 $x = 0$ 时， $y = 3 \times 0 + b = b$ ，则 $B(0, b)$ ，此时 $OB = b$.

当 $y = 0$ 时， $3x + b = 0$ ，故 $x = -\frac{b}{3}$ ，则 $A\left(-\frac{b}{3}, 0\right)$ ，此时 $OA = \frac{b}{3}$.

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot b = \frac{b^2}{6} = 6.$$

$\therefore b = 6$ 或 $b = -6$ (不合题意, 故舍去).

②当 $b < 0$ 时, $y = 3x + b$ 的图象如图 2.



当 $x = 0$ 时, $y = 3 \times 0 + b = b$, 则 $B(0, b)$, 此时 $OB = -b$.

当 $y = 0$ 时, $3x + b = 0$, 故 $x = -\frac{b}{3}$, 则 $A\left(-\frac{b}{3}, 0\right)$, 此时 $OA = -\frac{b}{3}$.

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{b}{3}\right) \cdot (-b) = 6.$$

$\therefore b = 6$ (不合题意, 故舍去) 或 $b = -6$.

综上: $b = \pm 6$.

故答案为: ± 6 .

【点睛】 本题主要考查一次函数图象上点的坐标的特征以及三角形面积, 熟练掌握一次函数图象上点的坐标的特征以及三角形面积公式是解决本题的关键.

14. 如果正比例函数 $y = (k-2)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小, 且它的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象没有公共点, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $0 < k < 2$

【解析】

【分析】 先根据正比例函数 $y = (k-2)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小, 可知 $k-2 < 0$; 再根据它的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象没有公共点, 说明反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过一、三象限, $k > 0$, 从而可以求出 k 的取值范围.

【详解】 $\because y = (k-2)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小,

$$\therefore k-2 < 0$$

$$\therefore k < 2$$

而 $y = (k-2)x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$

的图象没有公共点,

$$\therefore k > 0$$

综合以上可知: $0 < k < 2$.

故答案为 $0 < k < 2$.

【点睛】 本题考查的是一次函数与反比例函数的相关性质, 清楚掌握函数中的 k 的意义是解决本题的关键.

15. 已知直线 L 平行于 $y = -3x - 1$, 且与 y 轴的交点到原点的距离是 3, 则直线 L 的解析式是_____.

【答案】 $y = -3x + 3$ 或 $y = -3x - 3$

【解析】

【分析】 本题考查了两条直线相交或平行的问题. 设所求直线解析式为 $y = kx + b$, 根据两直线平行的问题得到 $k = -3$, 再根据直线 $y = kx + b$ 与 y 轴交点到原点的距离为 3, 得到 $b = \pm 3$, 于是可确定所求直线解析式.

【详解】 解: 设所求直线解析式为 $y = kx + b$,

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 与 $y = -3x - 1$ 平行,

$$\therefore k = -3,$$

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 与 y 轴交点到原点的距离为 3,

$$\therefore b = 3 \text{ 或 } -3,$$

$$\therefore \text{所求直线解析式为 } y = -3x + 3 \text{ 或 } y = -3x - 3.$$

故答案为: $y = -3x + 3$ 或 $y = -3x - 3$.

16. 已知一次函数 $y = (5m - 7)x - 20 + m$ 的图象不经过第二象限, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $\frac{7}{5} < m \leq 20$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与系数的关系: 对于一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$, 当 $k > 0, b > 0$ 函数图象经过一、二、三象限; 当 $k > 0, b < 0$ 时, 函数图象经过一、三、四象限; $k < 0, b > 0$ 时, 函数图象经过一、二、四象限; 当 $k < 0, b < 0$ 时, 函数图象经过二、三、四象限. 依据一次函数 $y = (5m - 7)x - 20 + m$

的图象不经过第二象限，可得函数表达式中一次项系数大于 0，常数项不大于 0，进而得到 m 的取值范围.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = (5m - 7)x - 20 + m$ 的图象不经过第二象限，

$$\therefore \begin{cases} 5m - 7 > 0 \\ -20 + m \leq 0 \end{cases},$$

解得 $\frac{7}{5} < m \leq 20$.

故答案为： $\frac{7}{5} < m \leq 20$.

17. 一次函数 $y = kx - b$ (k, b 为常数且 $k \neq 0, b \neq 0$) 与 $y = 3x$ 的图象相交于点 $N(m, -6)$ ，则关于 x 的方程 $kx - b = 3x$ 的解为 $x =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数与一元一次方程，根据题意得 $m = -2$ ，进而可得 $N(-2, -6)$ ，再根据一次函数 $y = kx - b$ (k, b 为常数且 $k \neq 0, b \neq 0$) 与 $y = 3x$ 的图象相交于点 $N(m, -6)$ 即可求解，熟练掌握基础知识是解题的关键.

【详解】解：依题意得： $y = 3x$ 的图象经过点 $N(m, -6)$ ，

$$\therefore -6 = 3m,$$

解得： $m = -2$,

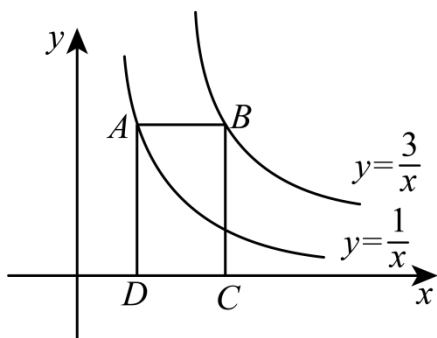
$$\therefore N(-2, -6),$$

$\because$ 一次函数 $y = kx - b$ (k, b 为常数且 $k \neq 0, b \neq 0$) 与 $y = 3x$ 的图象相交于点 $N(-2, -6)$ ，

$$\therefore \text{方程 } kx - b = 3x \text{ 的解为 } x = -2,$$

故答案为： -2.

18. 如图，点 A 在双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上，点 B 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上，且 $AB \parallel x$ 轴，过点 A、B 分别向 x 轴作垂线，垂足分别为点 D、C，那么四边形 ABCD 的面积是_____.

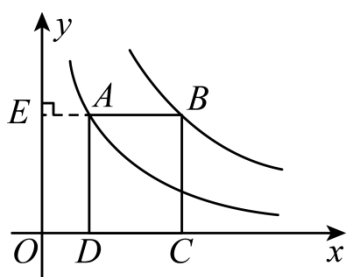


【答案】 2

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数关系 k 的几何意义, 根据反比例函数系数 k 的几何意义得出矩形 $EODA$ 的面积为 1, 矩形 $BCOE$ 的面积是 3, 则矩形 $ABCD$ 的面积为 $3-1=2$.

【详解】解: 过点 A 作 $AE \perp y$ 轴于点 E , $AB \parallel x$ 轴,



则点 E 、 A 、 B 在同一直线上,

$\because$ 点 A 在双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上, 点 B 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上,

$\therefore$ 矩形 $EODA$ 的面积为 1, 矩形 $BCOE$ 的面积是 3,

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积为 $3-1=2$,

故答案为: 2.

三、解答题 (19 题 6 分, 20-22 题每题 10 分, 23 题 8 分, 24 题 14 分, 共 58 分)

19. 已知正比例函数 $y = ax$ 和反比例函数 $y = \frac{4-a}{x}$ 的图象有两个交点, 如果其中一个交点的横坐标为 1, 求 a 及两个交点的坐标.

【答案】 $a = 2$, $(-1, -2)$, $(1, 2)$.

【解析】

【分析】本题主要考查正比例函数, 反比例函数交点的综合运用. 根据函数有交点, 联立方程组, 将一个交点的横坐标为 1 代入, 即可求出 a 的值, 从而求出函数解析式, 联立两个函数, 即可求解出两个交点坐标.

【详解】解: 函数 $y = ax$ 和 $y = \frac{4-a}{x}$ 的图象有两个交点, 且一个交点的横坐标为 1,

联立得, $a = 4 - a$,

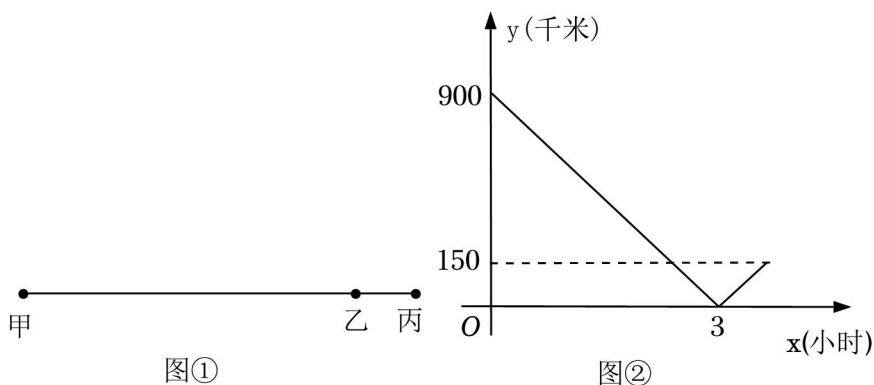
则 $a = 2$,

$\therefore$ 函数的解析式为, $y = 2x$, $y = \frac{2}{x}$,

$$\therefore \begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}, \text{解方程组得, } x_1 = -1, x_2 = 1,$$

$\therefore$ 这两个函数图象的交点坐标分别是 $(-1, -2)$, $(1, 2)$.

20. 如图 1 所示, 某乘客乘高速列车从甲地经过乙地到丙地, 假设列车匀速行驶. 如图 2 所示的是列车离乙地路程 y (千米) 与列车从甲地出发后行驶时间 x (时) 之间的函数关系图象.



- (1) 甲、丙两地间的路程为 ____ 千米, 从甲地到丙地共用 ____ 小时;
(2) 求高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数关系式, 并写出 x 的取值范围.

【答案】 (1) 1050; 3.5

$$(2) y = \begin{cases} -300x + 900 (0 \leq x \leq 3) \\ 300x - 900 (3 < x \leq 3.5) \end{cases}$$

【解析】

【分析】 (1) 由图可知, 甲地到乙地距离 900 千米, 3 小时后列车到达乙地, 乙地与丙地距离 150 千米, 进而得到甲、丙间的距离, 从甲地到丙地共用的时间;

(2) 用待定系数法分别求出从甲到乙、从乙到丙时, y 与 x 的函数关系式.

【小问 1 详解】

解: 由函数图象可知, 当 $x = 0$ 时, $y = 900$,

$\therefore$ 甲与乙的距离为 900 千米,

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时, $y = 0$, 表示 3 小时后列车到达乙地,

$\therefore$ 列车速度为: $900 \div 3 = 300$ (千米/小时),

$$\therefore 150 \div 300 = 0.5 \text{ (小时)},$$

$\therefore$ 到达乙地后 0.5 小时列车到达丙地, 乙与丙间的距离为 150 千米,

$\therefore$ 甲、丙两地间的路程为 1050 千米, 从甲地到丙地共用 3.5 小时,

故答案为: 1050, 3.5;

【小问 2 详解】

解: 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 设函数关系式为: $y = k_1x + b_1$,

将 $(0, 900)$, $(3, 0)$ 代入得:

$$\begin{cases} b_1 = 900 \\ 3k_1 + b_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = -300 \\ b_1 = 900 \end{cases},$$

$$\therefore y = -300x + 900;$$

当 $3 < x \leq 3.5$ 时, 设函数关系式为: $y = k_2x + b_2$,

将 $(3, 0)$, $(3.5, 150)$ 代入得:

$$\begin{cases} 3k_2 + b_2 = 0 \\ 3.5k_2 + b_2 = 150 \end{cases},$$

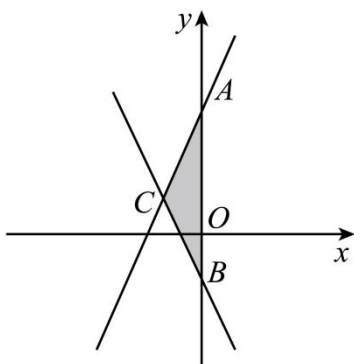
$$\text{解得: } \begin{cases} k_2 = 300 \\ b_2 = -900 \end{cases},$$

$$\therefore y = 300x - 900;$$

$$\therefore y = \begin{cases} -300x + 900 & (0 \leq x \leq 3) \\ 300x - 900 & (3 < x \leq 3.5) \end{cases}.$$

【点睛】 本题主要考查了一次函数的综合知识, 特别是本题中涉及到了分段函数的知识, 解题时要考虑自变量的取值范围.

21. 已知直线 $y = 2x + 3$ 与直线 $y = -2x - 1$.



- (1) 求两直线交点 C 的坐标;
- (2) 求 ABC 的面积.
- (3) 在直线 BC 上能否找到点 P , 使得 $S_{\triangle APC} = 6$, 若能, 请求出点 P 的坐标, 若不能请说明理由.

【答案】 (1) $C(-1, 1)$

(2) 2 (3) 点 P 有两个, 坐标为 $(-4, 7)$ 或 $(2, -5)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数综合题, 难度较大, 关键是掌握利用分类讨论的思想进行解题.

(1) 解方程组 $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ 即可得出交点坐标;

(2) 分别求出 A, B 的坐标即可求出三角形的面积;

(3) 假设在直线 $y = -2x - 1$ 上存在点 P 使得 $S_{\triangle APC} = 6$, 设点 $P(x, y)$, 分类讨论 x 的取值后即可得出答案;

【小问 1 详解】

解: 解方程组 $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$ 解得: $x = -1, y = 1$,

所以点 C 的坐标为 $(-1, 1)$;

【小问 2 详解】

解: 直线 $y = 2x + 3$ 与 y 轴的交点 A 的坐标为 $(0, 3)$,

直线 $y = -2x - 1$ 与 y 轴的交点 B 的坐标为 $(0, -1)$, 所以 $AB = 4$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times |-1| = 2;$$

【小问 3 详解】

解: 假设在直线 $y = -2x - 1$ 上存在点 P 使得 $S_{\triangle APC} = 6$,

设点 $P(x, y)$,

则①当 $x < -1$ 时, 有 $S_{APB} - S_{ABC} = 6$,

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 4 \times |x| - 2 = 6,$$

解得 $x = 4$ (舍去) 或 $x = -4$,

把 $x = -4$ 代入 $y = -2x - 1$, 得 $y = 7$;

②当 $x > -1$ 时, 有 $S_{APB} + S_{ABC} = 6$,

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 4 \times x + 2 = 6,$$

解得 $x = 2$, 把 $x = 2$ 代入 $y = -2x - 1$ 得 $y = -5$,

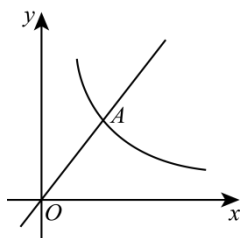
所以在直线 $y = -2x - 1$ 上存在点 $P(-4, 7)$ 和 $P(2, -5)$, 使得 $S_{\triangle APC} = 6$.

22.

已知: 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 正比例函数 $y = \frac{4}{3}x$ 的图像经过点 A , 点 A 的纵坐标为 4, 反比

例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图像也经过点 A , 第一象限内的点 B 在这个反比例函数的图像上, 过点 B 作 $BC \parallel x$ 轴,

交 y 轴于点 C , 且 $AC = AB$.



求: (1) 这个反比例函数的解析式; (2) 直线 AB 的表达式.

【答案】 (1) $y = \frac{12}{x}$; (2) $y = -\frac{2}{3}x + 6$

【解析】

【详解】 试题分析: (1) 先根据 A 在正比例函数图像上求出点 A 的坐标, 再根据 A 在反比例函数图像上, 代入求得反比例函数解析式; (2) 根据 B 在反比例函数图像上, 假设出点 B 坐标, 再根据 $BC \parallel x$ 轴, 得到点 C 坐标. 结合 $AC = AB$, 代入两点间距离公式, 得到方程, 解出即得点 B 坐标. 再利用待定系数法, 将 A 、 B 坐标代入, 求出直线 AB 的解析式.

试卷解析: (1) 设 $A(x, 4)$, $\because y = \frac{4}{3}x$ 经过点 A , $\therefore \frac{4}{3}x = 4$, $\therefore x = 3$, $\therefore A(3, 4)$,

$\because y = \frac{m}{x}$ 经过点 A , $\therefore 4 = \frac{m}{3}$, $\therefore m = 12$, $\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{12}{x}$;

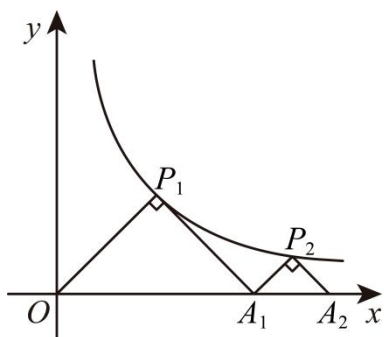
(2) 设 $B(a, \frac{12}{a})$, 则 $C(0, \frac{12}{a})$, $\because AB = AC$, $\therefore \sqrt{(a-3)^2 + (\frac{12}{a}-4)^2} = \sqrt{3^2 + (\frac{12}{a}-4)^2}$, 解得 $a_1 = 6$,

$a_2 = 0$ (舍), $\therefore B(6, 2)$, 设直线 AB 解析式为 $y = kx + b$, 得

$$\begin{cases} 3k + b = 4 \\ 6k + b = 2 \end{cases}, \text{解得 } k = -\frac{2}{3}, b = 6, \text{ 所以直线 } AB \text{ 解析式为 } y = -\frac{2}{3}x + 6.$$

考点: 1. 点在函数图像上的意义; 2. 勾股定理; 3. 待定系数法求函数解析式.

23. 如图, $\triangle P_1OA_1$, $\triangle P_2A_1A_2$ 都是等腰直角三角形, 点 P_1 , P_2 在 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象上, 斜边 OA_1 , A_1A_2 都在 x 轴上, 求点 A_2 的坐标.

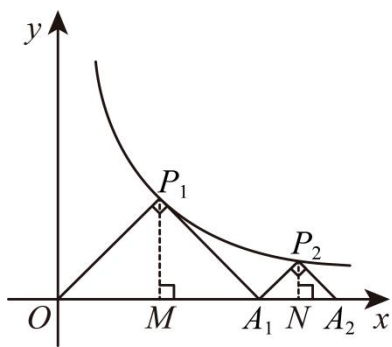


【答案】 点 A_2 的坐标为 $(4\sqrt{2}, 0)$.

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的图象和性质. 过点 P_1 作 $P_1M \perp x$ 轴, 由于 $\triangle OA_1P_1$ 是等腰直角三角形, 因而 $PA = OA$, 因而可以设 P_1 点的坐标是 (a, a) , 把 (a, a) 代入解析式即可求出 $a = 2$, 因而求出 P 的坐标是 $(2, 2)$, 进一步得到 $OA_1 = 4$, 再根据 $\triangle P_2A_1A_2$ 是等腰直角三角形, 设 P_2 的纵坐标是 b , 因而横坐标是 $b + 4$, 把 P_2 的坐标代入解析式 $y = \frac{4}{x}$, 即可求出 b , 然后即可求出点 A_2 的坐标.

【详解】 解: 如图, 过点 P_1 作 $P_1M \perp x$ 轴于 M ,



$\because \triangle OA_1P_1$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore OM = MA_1 = \frac{1}{2}OA_1,$$

$$\therefore P_1M = \frac{1}{2}OA_1,$$

$\therefore$ 设 P_1 点的坐标是 (a, a) ,

把 (a, a) 代入解析式得到 $a = 2$,

$\therefore P_1$ 的坐标是 $(2, 2)$,

则 $OA_1 = 4$,

$\because \triangle P_2A_1A_2$ 是等腰直角三角形, 过点 P_2 作 $P_2N \perp x$ 轴于 N ,

设 P_2 的纵坐标是 b ,

$\therefore$ 横坐标是 $b + 4$,

把 P_2 的坐标代入解析式 $y = \frac{4}{x}$,

$$\therefore b + 4 = \frac{4}{b},$$

$$\therefore b = 2\sqrt{2} - 2 \quad (\text{负值已舍}),$$

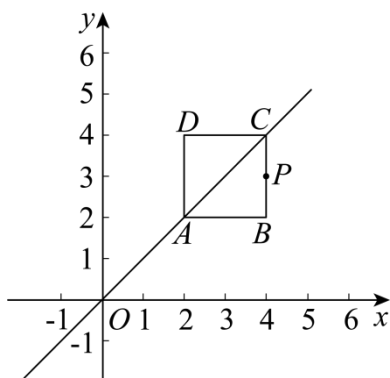
$$\therefore \text{点 } P_2 \text{ 的横坐标为 } 2\sqrt{2} + 2,$$

$$\therefore \text{点 } A_2 \text{ 的横坐标是 } 2b + 4 = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } A_2 \text{ 的坐标是 } (4\sqrt{2}, 0).$$

24. 在平面直角坐标系中, $P(a, b)$ 是第一象限内一点, 给出如下定义: $k_1 = \frac{a}{b}$ 和 $k_2 = \frac{b}{a}$ 两个值中的最大值

叫做点 P 的“倾斜系数” k .



- (1) 求点 $P(6,2)$ 的“倾斜系数” k 的值;
- (2) ① 若点 $P(a,b)$ 的“倾斜系数” $k=2$, 请写出 a 和 b 的数量关系, 并说明理由;
- ② 若点 $P(a,b)$ 的“倾斜系数” $k=2$, 且 $a+b=3$, 求 OP 的长;
- (3) 如图, 边长为 2 的正方形 $ABCD$ 沿直线 $AC: y=x$ 运动, $P(a,b)$ 是正方形 $ABCD$ 上任意一点, 且点 P 的“倾斜系数” $k < \sqrt{3}$, 请直接写出 a 的取值范围.

【答案】 (1) 3 (2) ① $a-2b$ 或 $b=2a$, ② $OP=\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{3}+1 < a < 3+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数的图象和性质, 正方形的性质, 点的坐标的特征, 本题是新定义型题目, 解题的关键是: (1) (2) 问理解新定义, (3) 问求临界值.

(1) 直接由“倾斜系数”定义求解即可;

(2) ① 由点 $P(a,b)$ 的“倾斜系数” $k=2$, 由 $\frac{a}{b}=2$ 或 $\frac{b}{a}=2$ 求解即可;

② 由 $a=2b$ 或 $b=2a$, 又因 $a+b=3$, 求出 a, b 值, 即可得点 P 坐标, 从而由勾股定理可求解;

(3) 当点 P 与点 D 重合时, 且 $k=\sqrt{3}$ 时, a 有最小临界值, 此时, $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$, 则 $\frac{a+2}{a}=\sqrt{3}$, 求得 $a=\sqrt{3}+1$;
当点 P 与 B 点重合, 且 $k=\sqrt{3}$ 时, a 有最大临界值, 此时, $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$, 则 $\frac{a}{a-2}=\sqrt{3}$, 求得: $a=3+\sqrt{3}$;

即可求得 $k < \sqrt{3}$ 时, a 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 由题意, 得 $\frac{6}{2}=3$, $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

$\therefore 3 > \frac{1}{3}$,

$\therefore$ 点 $P(6,2)$ 的“倾斜系数” $k=3$;

【小问 2 详解】

解: ① $a=2b$ 或 $b=2a$,

$\because$ 点 $P(a,b)$ 的“倾斜系数” $k=2$,

当 $\frac{a}{b}=2$ 时, 则 $a=2b$;

当 $\frac{b}{a}=2$ 时, 则 $b=2a$,

$\therefore a=2b$ 或 $b=2a$;

② $\because P(a,b)$ 的“倾斜系数” $k=2$,

当 $\frac{a}{b}=2$ 时, 则 $a=2b$,

$\because a+b=3$,

$\therefore 2b+b=3$,

$\therefore b=1$,

$\therefore a=2$,

$\therefore P(2,1)$,

$\therefore OP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$;

当 $\frac{b}{a}=2$ 时, 则 $b=2a$,

$\because a+b=3$,

$\therefore a+2a=3$,

$\therefore a=1$,

$\therefore b=2$,

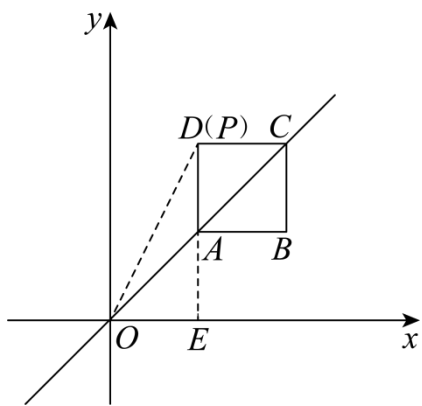
$\therefore P(1,2)$

$\therefore OP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$;

综上, $OP = \sqrt{5}$;

【小问 3 详解】

解: 由题意知, 当点 P 与点 D 重合时, 且 $k = \sqrt{3}$ 时, a 有最小临界值, 如图, 连接 OD , 延长 DA 交 x 轴于 E ,



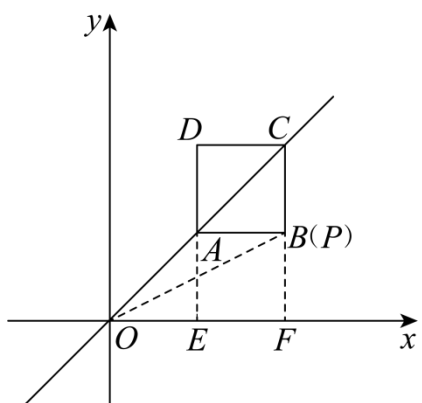
此时, $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$,

则 $\frac{a+2}{a} = \sqrt{3}$,

解得: $a = \sqrt{3} + 1$;

$\therefore k < \sqrt{3}$, 则 $a > \sqrt{3} + 1$;

当点 P 与 B 点重合, 且 $k = \sqrt{3}$ 时, a 有最大临界值, 如图, 连接 OB , 延长 CB 交 x 轴于 F ,



此时, $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$,

则 $\frac{a}{a-2} = \sqrt{3}$,

解得: $a = 3 + \sqrt{3}$,

$\therefore k < \sqrt{3}$, 则 $a < 3 + \sqrt{3}$;

综上, 若 P 的“倾斜系数” $k < \sqrt{3}$, 则 $\sqrt{3} + 1 < a < 3 + \sqrt{3}$.