

淞谊实验学校八年级数学第二次练习卷

一、单选题

1. 方程 $x^2 = 4x$ 的解是 ()

A. $x = 4$

B. $x = 2$

C. $x = 4$ 或 $x = 0$

D. $x = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题可先进行移项得到： $x^2 - 4x = 0$ ，然后提取出公因式 x ，两式相乘为 0，则这两个单项式必有一项为 0.

【详解】解：原方程可化为： $x^2 - 4x = 0$ ，提取公因式： $x(x - 4) = 0$,

$\therefore x = 0$ 或 $x = 4$

故选：C.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的计算，准确分析计算是解题的关键.

2. 到三角形三个顶点距离都相等的点是 ()

A. 三角形的三条角平分线的交点

B. 三角形的三边垂直平分线的交点

C. 三角形的三条高线的交点

D. 三角形的三条中线的交点

【答案】B

【解析】

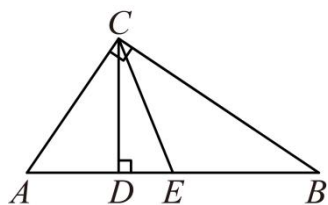
【分析】本题考查了线段垂直平分线的判定，根据到线段的端点距离相等的点在线段的垂直平分线上进行作答即可.

【详解】解： $\because$ 到三角形三个顶点距离都相等的点，

$\therefore$ 该点是三角形的三边垂直平分线的交点，

故选：B

3. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$. 线段 CD 、 CE 分别为 $\triangle ABC$ 的高和中线，下列说法中错误的是 ()



A. $\angle B = \angle ACD$

B. $\angle BCE = \angle ACD$

C. $2CE = AB$

D. $2AC = AB$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形的高和中线的性质，熟练掌握三角形高和中线的性质是解题的关键；根据三角形高和中线的性质，结合图形对选项一一判断即可求解.

【详解】 解：线段 CD 、 CE 分别为 ABC 的高和中线，

$$\therefore \angle CDB = \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle DCB = \angle B + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACD, \text{ 故 A 选项正确, 不符合题意;}$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB = BE = AE,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle B,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle ACD, \text{ 故 B 选项正确, 不符合题意;}$$

$$\because CE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AB = 2CE, \text{ 故选项 C 正确, 不符合题意;}$$

根据题中条件无法推出 $AC = AE = CE$, 故无法推出 $2AC = AB$, 故选项 D 错误, 符合题意;

故选: D

4. 已知下列命题中:

- ①有两条边分别相等的两个直角三角形全等;
- ②有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等;
- ③有一条边与一个锐角分别相等的两个直角三角形全等;
- ④顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等.

其中真命题的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】 根据全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质逐个排查即可.

【详解】解：①由于 SSA 不能判定三角形全等，则有两边分别相等的两个直角三角形不一定全等，故原命题是假命题；

②由于满足 ASA ，则有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等，故原命题是真命题；

③有一条边与一个锐角分别对应相等的两个直角三角形全等，故原命题是假命题；

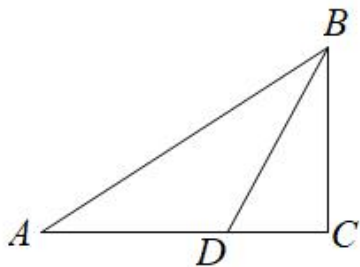
④由于两等腰三角形顶角相等，则他们的底角对应相等，再结合底相等，满足 ASA ，故原命题是真命题。

其中真命题的个数是 2 个。

故选：B.

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质等知识点，灵活应用相关知识成为解答本题的关键。

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=2BC$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ， $BD=2$ ，则以下结论错误的是（ ）



A. 点 D 在 AB 的垂直平分线上；

B. 点 D 到直线 AB 的距离为 1；

C. 点 A 到直线 BD 的距离为 2；

D. 点 B 到直线 AC 的距离为 $\sqrt{3}$ 。

【答案】C

【解析】

【分析】如图，取 AB 中点 E ，连接 DE ，证明 $\triangle EBD \cong \triangle CBD$ ，可得 $\angle DEB = \angle C = 90^\circ$ ， $\angle BAD = \angle ABD = \angle CBD = 30^\circ$ ，则 $BC = \frac{1}{2}AB$ ， $DE = \frac{1}{2}BD = 1$ ，然后根据勾股定理可求出 BC ，过 A 作 $AF \perp BD$ 交 BD 的延长线于 F ，求出 $AF = \frac{1}{2}AB = BC = \sqrt{3}$ ，进而可得答案。

【详解】解：如图，取 AB 中点 E ，连接 DE ，

$$\because AB=2BC,$$

$$\therefore BE=BC,$$

$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle CBD,$$

$$\text{又 } \because BD=BD,$$

$$\therefore \triangle EBD \cong \triangle CBD \text{ (SAS),}$$

$$\therefore \angle DEB = \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore DE \perp AB$, 即点 D 在 AB 的垂直平分线上, A 正确;

$$\therefore AD = DB,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ABD = \angle CBD = 30^\circ,$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2} AB, DE = \frac{1}{2} BD = 1, \text{ 即点 } D \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离为 } 1, B \text{ 正确;}$$

$$\therefore DE = DC = 1,$$

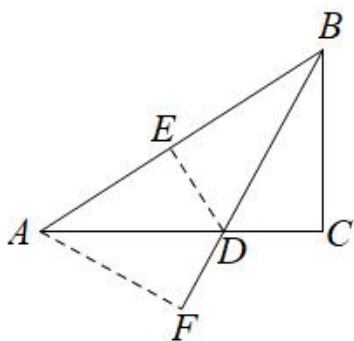
$$\therefore BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}, \text{ 即点 } B \text{ 到直线 } AC \text{ 的距离为 } \sqrt{3}, D \text{ 正确,}$$

过 A 作 $AF \perp BD$ 交 BD 的延长线于 F ,

$$\therefore AF = \frac{1}{2} AB = BC = \sqrt{3},$$

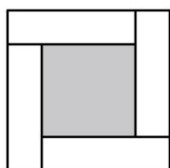
$\therefore$ 点 A 到 BD 的距离为 $\sqrt{3}$, C 错误,

故选: C .



【点睛】本题考查了全等三角形的判定和性质, 线段垂直平分线的判定和性质, 含 30° 角的直角三角形的性质以及勾股定理, 作出合适的辅助线是解答本题的关键.

6. 对于一元二次方程, 我国古代数学家还研究过其几何解法. 以方程 $x(x+6)=72$ 为例加以说明. 数学家赵爽在其所著的《勾股圆方注》中记载的方法是: 如图, 将四个长为 $x+6$, 宽为 x 的长方形纸片拼成一个大正方形, 则大正方形的边长是 $x+6+x$, 面积是四个矩形的面积与中间小正方形的面积之和, 即 $4 \times 72 + 6^2$, 据此易得 $x = \frac{18-6}{2} = 6$. 小明用此方法解关于 x 的方程 $x(3x-n)=24$, 其中 $3x-n > x$ 构造出同样的图形, 已知小正方形的面积为 4, 则 n 的值为 ()



A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

【答案】 C**【解析】**

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，仿照题干，正确理解一元二次方程的几何解法是解题关键. 参照已知方法，将四个长为 $3x-n$ ，宽为 x 的长方形纸片拼成一个大正方形，求出大正方形的边长为 10，得到 $n=4x-10$ ，再根据小正方形的边长为 $10-2x$ ，小正方形的边长的面积是 4，求出 $x=4$ ，即可得到 n 的值.

【详解】 解：由题意可知，将四个长为 $3x-n$ ，宽为 x 的长方形纸片拼成一个大正方形，则大正方形的边长是 $3x-n+x$ ，面积是四个矩形的面积与中间小正方形的面积之和，

$$\therefore x(3x-n)=24, \text{ 小正方形的面积为 } 4,$$

$$\therefore \text{大正方形的面积为 } 4 \times 24 + 4 = 100,$$

$$\therefore \text{大正方形的边长为 } 10,$$

$$\therefore 3x-n+x=4x-n=10,$$

$$\therefore n=4x-10,$$

$$\therefore \text{小正方形的边长为 } 3x-n-x, \text{ 即 } 10-2x,$$

$$\therefore 3x-n > x,$$

$$\text{即 } 10-2x > 0,$$

$$\text{故 } (10-2x)^2 = 4,$$

$$\therefore 10-2x = \pm 2,$$

$$\therefore 10-2x > 0,$$

$$\therefore x = 4,$$

$$\therefore n = 4 \times 4 - 10 = 6,$$

故选：C.

二、填空题

7. 计算 $\sqrt{18} \times \sqrt{\frac{1}{2}}$ 的结果是_____.

【答案】 3**【解析】**

【分析】 本题考查了二次根式的乘法，根据二次根式的乘法法则进行计算，即可作答.

【详解】解： $\sqrt{18} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{18 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$ ，

故答案为：3

8. 已知 $x=3$ 是方程 $x^2-2x+m=0$ 的一个根，那么 $m=$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】将 $x=3$ 代入方程 $x^2-2x+m=0$ ，即可得到答案.

【详解】把 $x=3$ 代入 $x^2-2x+m=0$ 得 $9-6+m=0$ ，解得 $m=-3$.故答案为-3.

【点睛】 本题考查是有关一元二次方程的应用和一元一次方程的解法，解题的关键是熟悉有关一元二次方程的应用和一元一次方程的解法，要能够熟练灵活的应用.

9. 定理“直角三角形的两个锐角互余”的逆定理是_____.

【答案】 两个锐角互余的三角形是直角三角形

【解析】

【分析】找出原命题的条件和结论，再把原命题的条件变为逆命题的结论，把原命题的结论变为逆命题的条件即可求解. 本题考查了写出原命题的逆命题，熟练掌握命题的条件和结论是解题的关键.

【详解】解：命题“直角三角形的两个锐角互余”的逆命题是：两个锐角互余的三角形是直角三角形，故答案为：两个锐角互余的三角形是直角三角形.

10. 和线段 AB 两个端点距离相等的轨迹是_____.

【答案】 线段 AB 的垂直平分线

【解析】

【分析】根据线段垂直平分线的性质解题即可.

【详解】到线段 AB 两个端点的距离相等的点的轨迹是线段 AB 的垂直平分线，

故答案为：线段 AB 的垂直平分线.

【点睛】 本题考查线段垂直平分线的性质，是重要考点，难度容易，掌握相关知识是解题关键.

11. 如果一个直角三角形的两条直角边的长分别为 5、12，则斜边上的高的长度为_____.

【答案】 $\frac{60}{13}$

【解析】

【分析】利用勾股定理求出斜边长，再利用面积法求出斜边上的高即可.

【详解】解： $\because$ 直角三角形的两条直角边的长分别为 5，12，

$$\therefore \text{斜边为 } \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$\therefore \text{三角形的面积} = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13h \quad (h \text{ 为斜边上的高}),$$

$$\therefore h = \frac{60}{13}.$$

$$\text{故答案为 } \frac{60}{13}.$$

【点睛】考查了勾股定理，以及三角形面积公式，熟练掌握勾股定理是解本题的关键.

12. 国庆期间，南京东路某商场为了吸引游客，对某种商品连续两次降价，每次下降百分率相同. 已知该商品原售价为 875 元，降价两次后的售价为 560 元，若设下降的百分率为 x ，那么根据题意可以列方程为_____.

$$\text{【答案】 } 875(1-x)^2 = 560$$

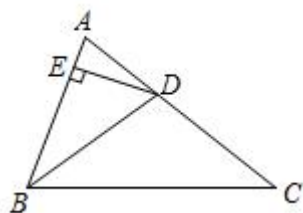
【解析】

【分析】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，利用经过两次降价后的售价=原售价 $\times(1-\text{每次下降的百分率})^2$ ，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解.

$$\text{【详解】解：根据题意得 } 875(1-x)^2 = 560.$$

$$\text{故答案为： } 875(1-x)^2 = 560.$$

13. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = 8\text{cm}$ ， $BC = 10\text{cm}$ ， BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ 于点 E ，若 $DE = 4\text{cm}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____ cm^2 .



$$\text{【答案】 } 36$$

【解析】

【分析】如图（见解析），由角平分线的性质可得 $DF = DE$ ，再根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$ 即可得.

【详解】如图，过点 D 作 $DF \perp BC$

由题意得， BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线

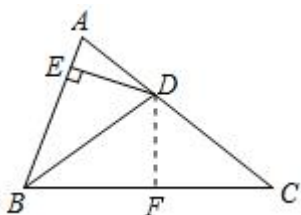
$$\because DE \perp AB, DE = 4\text{cm}$$

$$\therefore DF = DE = 4\text{cm}$$

$$\because AB = 8\text{cm}, BC = 10\text{cm}$$

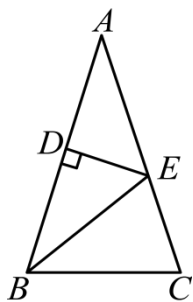
$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}AB \cdot DE + \frac{1}{2}BC \cdot DF \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 4 + \frac{1}{2} \times 10 \times 4 \\ &= 16 + 20 \\ &= 36\end{aligned}$$

故答案为：36.



【点睛】本题考查了角平分线的性质，熟记角平分线的性质是解题关键.

14. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AC = AB = 5$ ， $BC = 3$ ， DE 垂直平分 AB ，点 D 为垂足，交 AC 于点 E . 那么 $\triangle EBC$ 的周长为_____.



【答案】8

【解析】

【分析】由线段垂直平分线的性质可得 $AE = BE$ ，则 $BE + CE = AC$ ， $\triangle EBC$ 的周长为 $AC + BC$ ，从而可得结果.

【详解】解： $\because AB$ 的垂直平分线交 AC 于点 E ，垂足为点 D ，

$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore BE + CE = AC,$$

$$\because AB = AC, AB = 5, BC = 3,$$

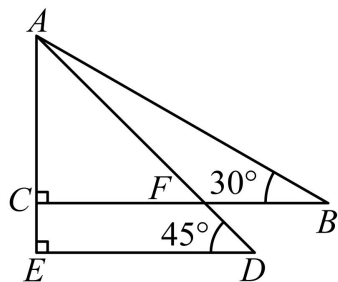
$$\therefore \triangle EBC \text{ 的周长} = (BE + CE) + BC = AC + BC = 5 + 3 = 8.$$

故答案为：8.

【点睛】本题考查了线段垂直平分线的性质定理，求图形的周长，关键是线段垂直平分线的性质定理的应

用.

15. 如图,将一副三角尺如图所示叠放在一起,如果 $AB=10\text{cm}$,那么 AF 的长度为_____cm.



【答案】 $5\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据直角三角形的性质求出 AC ，根据勾股定理计算即可.

【详解】 在 $Rt\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，

$$\therefore AC = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$\because FC \parallel DE$ ，

$$\therefore \angle AFC = \angle D = 45^\circ,$$

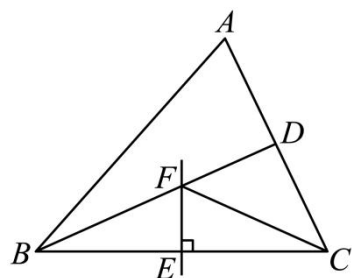
$$\therefore FC = AC = 5,$$

由勾股定理得： $AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = 5\sqrt{2}$ (cm) .

故答案为 $5\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查的是勾股定理，直角三角形的性质，如果直角三角形的两条直角边长分别是 a 、 b ，斜边长为 c ，那么 $a^2 + b^2 = c^2$.

16. 如图， $\triangle ABC$ 中， BD 平分 $\angle ABC$ ， BC 的中垂线交 BC 于点 E ，交 BD 于点 F ，连接 CF ，若 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle ACF = 48^\circ$ ，则 $\angle ABC$ 的度数为_____.



【答案】 48° ## 48 度

【解析】

【分析】 由角平分线的定义可得 $\angle ABD = \angle CBD$ ，由垂直平分线的性质可得 $BF = CF$ ，从而得到

$\angle FBC = \angle FCB$ ，进而得到 $\angle ABD = \angle FBC = \angle FCB$ ，由三角形内角和定理进行计算即可得到答案．本题主要考查了垂直平分线的性质、三角形内角和定理，熟练掌握以上知识点是解题的关键．

【详解】解： $\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC,$$

$\because EF$ 垂直平分 BC ，

$$\therefore BF = CF,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle FCB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle FBC = \angle FCB,$$

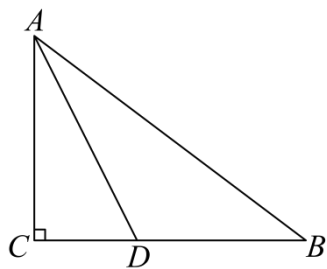
$$\because \angle A + \angle ACF + \angle ABD + \angle CBD + \angle BCF = 180^\circ, \quad \angle A = 60^\circ, \quad \angle ACF = 48^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle BCF = 24^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle ABD = 48^\circ,$$

故答案为： 48° ．

17. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， AD 平分 $\angle CAB$ ，如果 $CD = 1$ ，那么 $BD = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，根据角平分线上的点到角的两边的距离相等可得 $DE = CD$ ，再求出 $\triangle BDE$ 是等腰直角三角形，然后根据等腰直角三角形斜边等于直角边的 $\sqrt{2}$ 倍解答．

【详解】解：如图，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，

$$\because AD \text{ 平分 } \angle CAB, \quad \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = CD = 1,$$

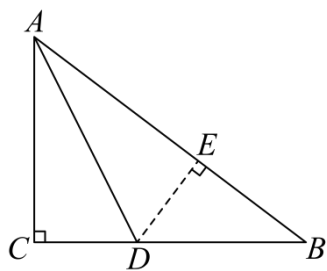
$$\because AC = BC, \quad \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BDE$ 是等腰直角三角形，

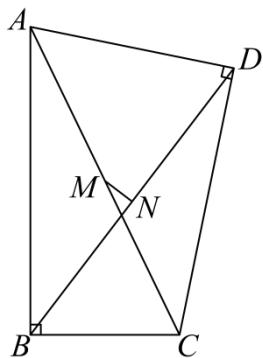
$$\therefore BD = \sqrt{2} DE = \sqrt{2}.$$

故答案为: $\sqrt{2}$.



【点睛】 本题主要考查了角平分线上的点到角的两边的距离相等的性质，等腰直角三角形的直角边与斜边的关系.

18. 如图，在四边形 ABCD 中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $AC = 26$ ， $BD = 24$ ，M、N 分别是 AC、BD 的中点，则线段 MN 的长为_____.

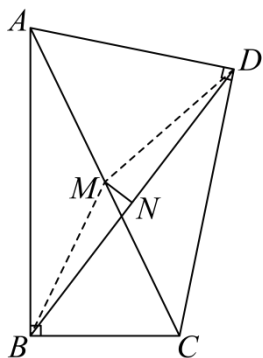


【答案】 5

【解析】

【分析】 根据在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半得到 $BM = DM = 13$ ，根据等腰三角形的性质得到 $BN = 12$ ，根据勾股定理得到答案.

【详解】 连接 BM、DM,



$\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，M 是 AC 的中点，

$\therefore BM = \frac{1}{2} AC$ ， $DM = \frac{1}{2} AC$ ，

$\therefore BM = DM = 13$ ，又 N 是 BD 的中点，

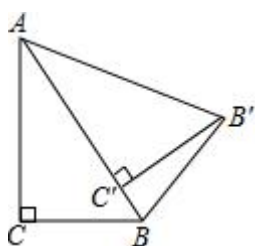
$$\therefore BN=DN=\frac{1}{2}BD=12,$$

$$\therefore MN=\sqrt{BM^2-BN^2}=5,$$

故答案为 5.

【点睛】 本题考查的是直角三角形的性质、等腰三角形的性质，掌握在直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

19. 如图，将 $Rt\triangle ABC$ 绕着顶点 A 逆时针旋转使得点 C 落在 AB 上的 C' 处，点 B 落在 B' 处，连接 BB' ，如果 $AC=4$ ， $AB=5$ ，那么 $BB'=\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 根据旋转的性质和勾股定理，在 $Rt\triangle BC'B'$ 中，求出 BC' ， $B'C'$ 即可解决问题.

【详解】 解：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\because AC=4$ ， $AB=5$ ， $\angle C=90^\circ$ ，

$$\therefore BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3,$$

$$\because AC=AC'=4, \quad BC=B'C'=3,$$

$$\therefore BC'=AB-AC'=5-4=1,$$

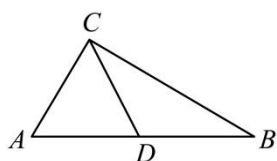
$$\because \angle BC'B'=90^\circ,$$

$$\therefore BB'=\sqrt{BC'^2+B'C'^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},$$

故答案为 $\sqrt{10}$.

【点睛】 此题考查的是旋转的性质和勾股定理，掌握旋转的性质和利用勾股定理理解直角三角形是解决此题的关键.

20. 如图，已知 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$ ， $BC=3$ ， D 是边 AB 上的一点，将 $\triangle BCD$ 沿直线 CD 翻折，使点 B 落在点 B_1 的位置，若 $B_1D \perp BC$ ，则 BD 的长度为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



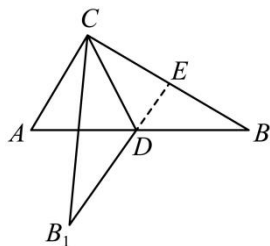
【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【详解】延长 B_1D 交 BC 于 E , 由 $B_1D \perp BC$, 根据含 30° 角直角三角形和勾股定理的性质, 推导得 $DE = \frac{1}{2}BD$,

$BE = \frac{\sqrt{3}}{2}BD$, 设 $BD = x$, 在 $\text{Rt}\triangle B_1CE$ 中根据轴对称、勾股定理的性质, 建立方程计算即可解得答案.

【解答】 延长 B_1D 交 BC 于 E , 如图:



$\because B_1D \perp BC$,

$\therefore \angle BED = \angle B_1EC = 90^\circ$,

$\because \angle B = 30^\circ$,

$\therefore DE = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}BD$,

设 $BD = x$,

$\therefore$ 将 $\triangle BCD$ 沿直线 CD 翻折, 使点 B 落在点 B_1 的位置,

$\therefore B_1D = x$,

$\because BC = 3$,

$\therefore CE = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $B_1C = BC = 3$,

在 $\text{Rt}\triangle B_1CE$ 中, $B_1E^2 + CE^2 = B_1C^2$,

$\therefore (x + \frac{1}{2}x)^2 + (3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 = 3^2$

$\therefore x(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore x = 0$ (舍去) 或 $x = \sqrt{3}$

$\therefore BD = \sqrt{3}$

故答案为: $\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了勾股定理、一元二次方程、轴对称、含 30° 角直角三角形的知识; 解题的关键是熟练掌握勾股定理; 轴对称、含 30° 角直角三角形、一元二次方程的性质, 从而完成求解.

三、解答题

21. 计算: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{3} \times (\sqrt{3} - \sqrt{6}) + \sqrt{8}$

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算, 分母有理化, 二次根式的性质, 先根据分母有理化, 二次根式的乘法、二次根式的性质化简, 再运算加减, 即可作答.

【详解】解: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{3} \times (\sqrt{3} - \sqrt{6}) + \sqrt{8}$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + 3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2} + 1 + 3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$
$$= 4.$$

22. 解方程: $2y(y-2) = y^2 - 3$

【答案】 $y_1 = 3, y_2 = 1$

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程, 先去括号, 移项合并同类项得 $y^2 - 4y + 3 = 0$, 再运用因式分解法进行方程, 即可作答.

【详解】解: $\because 2y(y-2) = y^2 - 3$,

$$\therefore 2y^2 - 4y = y^2 - 3,$$

则 $y^2 - 4y + 3 = 0$,

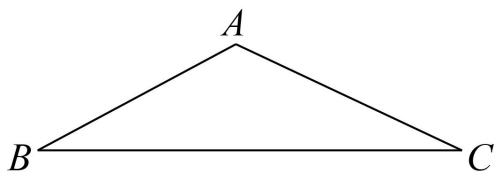
$$\therefore (y-3)(y-1) = 0,$$

解得 $y_1 = 3, y_2 = 1$

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle B = 30^\circ$.

(1) 在 BC 边上求作一点 N , 使得 $AN=BN$; (不要求写作法, 但要保留作图痕迹)

(2) 在 (1) 的条件下, 求证: $CN=2BN$.



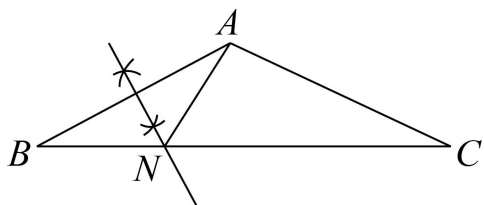
【答案】(1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【详解】(1) 作线段 AB 的垂直平分线交 BC 于点 N , 点 N 即为所求;

(2) 根据等腰三角形的性质计算出 $\angle C$ 的度数, 再计算出 $\angle CAN$ 的度数, 然后根据在直角三角形中, 30° 角所对的直角边等于斜边的一半, 可得 $CN=2AN$, 进而得到 $CN=2BN$.

【解答】(1) 解: 如图, 点 N 即为所求;



(2) 证明: 连接 AN .

$$\because AB=AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 2\angle B = 120^\circ.$$

$$\because AN=BN,$$

$$\therefore \angle BAN = \angle B = 30^\circ$$

$$\therefore \angle NAC = \angle BAC - \angle NAB = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

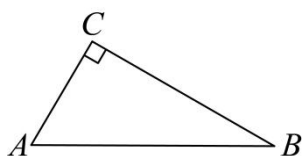
$$\because \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore CN=2AN.$$

$$\therefore CN=2BN.$$

【点睛】此题主要考查了作图, 等腰三角形的性质以及含 30° 度角的直角三角形, 关键是正确画出图形, 掌握在直角三角形中, 30° 角所对的直角边等于斜边的一半.

24. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 4$, $BC = 4\sqrt{3}$.



(1) 求点 C 到边 AB 的距离;

(2) 若点 P 在边 AB 上, 联结 CP , CP 平分 $\angle ACB$, 求线段 AP 的长.

【答案】(1) $2\sqrt{3}$

(2) $AP = 4\sqrt{3} - 4$

【解析】

【分析】(1) 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D , 由含 30° 度直角三角形的性质得 $CD = \frac{1}{2}BC$ 即可求解;

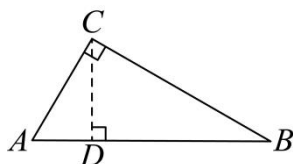
(2) 过点 P 作 $PE \perp AC$ 于 E , 由已知易得 $PE = CE$; 设 $AP = 2x$, 则得 $AE = x$, $PE = \sqrt{3}x$, 由题意得 $CE = PE = \sqrt{3}x$; 根据 $AE + CE = AC = 4$, 即可求得 x 的值, 从而求得线段 AP 的长.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle B = 30^\circ, BC = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3};$$



即点 C 到边 AB 的距离为 $2\sqrt{3}$;

【小问 2 详解】

解: 如图, 过点 P 作 $PE \perp AC$ 于 E ,

$$\because CP \text{ 平分 } \angle ACB, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECP = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ;$$

$$\therefore \angle EPC = \angle ECP = 45^\circ;$$

$$\therefore PE = CE;$$

$$\because PE \perp AC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle PEA = 90^\circ,$$

$$\therefore PE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle APE = \angle B = 30^\circ;$$

$$\text{设 } AP = 2x, \text{ 则 } AE = \frac{1}{2}AP = x,$$

$$\text{由勾股定理得: } PE = \sqrt{3}x,$$

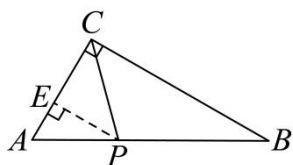
$$\therefore CE = PE = \sqrt{3}x;$$

$$\therefore AE + CE = AC = 4,$$

$$\therefore x + \sqrt{3}x = 4,$$

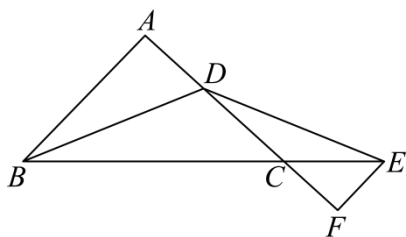
$$\therefore x = 2(\sqrt{3} - 1),$$

$$\therefore AP = 2 \times 2(\sqrt{3} - 1) = 4(\sqrt{3} - 1) = 4\sqrt{3} - 4.$$



【点睛】本题考查了含 30° 直角三角形的性质，勾股定理，等腰三角形的判定，平行线的判定与性质等知识，构造适当辅助线是解题的关键.

25. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 在边 AC 上, 点 E 在 BC 的延长线上, $BD = DE$, $EF \perp AC$, 交 AC 延长线于点 F , $AD = EF$.



(1) 求证: $\angle ABD = \angle FDE$;

(2) 求证: $AB = CD + EF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质，证明三角形全等是解题的关键.

(1) 由“HL”可证 $\text{Rt}\triangle BAD \cong \text{Rt}\triangle DEF$, 可得 $\angle ABD = \angle FDE$;

(2) 由全等三角形的性质可得 $AB = DF$, $\angle DFB = \angle DEF$, 由等腰三角形的性质和外角性质可证 $CF = EF$, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because EF \perp AC$,

$$\therefore \angle F = 90^\circ = \angle BAC,$$

在 $\text{Rt}\triangle BAD$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} BD = DE \\ AD = EF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BAD \cong \text{Rt}\triangle DEF (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle ABD = \angle FDE;$$

【小问 2 详解】

证明: $\because \text{Rt}\triangle BAD \cong \text{Rt}\triangle DEF (\text{HL}),$

$$\therefore AB = DF, \quad \angle DFB = \angle DEF,$$

$$\because BD = DE,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DEB,$$

$$\therefore \angle ADB - \angle DBE = \angle DEF - \angle DEB,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle CEF,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle CEF,$$

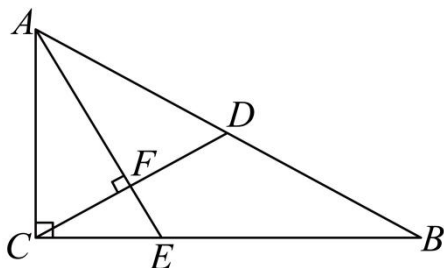
$$\therefore CF = EF,$$

$$\therefore AB = DF = DC + CF = DC + EF.$$

26. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是斜边 AB 上的中线, 过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 F , 交 CB 于点 E , 且 $\angle EAB = \angle DCB$.

(1) 求 $\angle B$ 的度数:

(2) 求证: $BC = 3CE$.



【答案】(1) $\angle B = 30^\circ$; (2) 详见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据余角的性质得到 $\angle ECF = \angle CAF$, 求得 $\angle CAD = 2\angle DCB$, 由 CD 是斜边 AB 上的中线, 得

到 $CD = BD$ ，推出 $\angle CAB = 2\angle B$ ，于是得到结论；

(2) 根据直角三角形的性质即可得到结论.

【详解】解：(1) $\because AE \perp CD$,

$$\therefore \angle AFC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAF + \angle ACF = \angle ACF + \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle CAF,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle CAD = 2\angle DCB,$$

$\because CD$ 是斜边 AB 上的中线,

$$\therefore CD = BD,$$

$$\therefore \angle B = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle CAB = 2\angle B,$$

$$\therefore \angle B + \angle CAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ;$$

$$(2) \because \angle B = \angle BAE = \angle CAE = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = BE, CE = \frac{1}{2}AE,$$

$$\therefore BC = 3CE.$$

【点睛】本题主要考查了直角三角形的性质，解题的关键是灵活运用直角三角形的性质进行边角关系的推导.

27. 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，点 P 在边 AC 上，连接 BP .

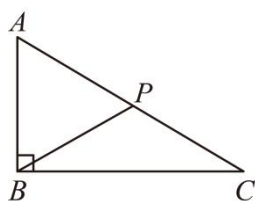


图1

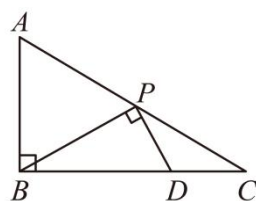
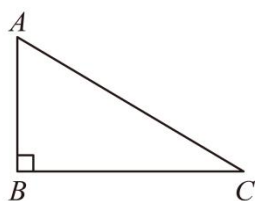


图2



备用图

(1) 如图 1，如果点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，求证： $AP = PC$ ；

(2) 过点 P 作 $PD \perp BP$ ，交边 BC 于点 D ，

①如图 2，如果点 P 是线段 AC 的中点，且 $BD = 2CD$ ，求 $\angle C$ 的度数；

②填空：如果 $AB = 6$ ， $BC = 8$ ，且 $\triangle ABP$ 是以 BP 为腰的等腰三角形，那么 PD 的长等于 _____.

【答案】(1) 见解析 (2) ① 30° ；② $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】(1) 由线段垂直平分线的性质得 $AP = BP$ ，则 $\angle A = \angle ABP$ ，再证 $\angle CBP = \angle C$ ，得 $PC = BP$ ，即可得出结论；

(2) ①取 BD 的中点 E ，连接 PE ，由直角三角形斜边上的中线性质的得 $PE = \frac{1}{2}BD = BE = DE$ ，再证 $\triangle BPE \cong \triangle CPD (SAS)$ ，得 $\angle BPE = \angle CPD$ ，则 $\angle EPD = \angle EDP = \angle C + \angle CPD = 2\angle C$ ，即可解决问题；
②分两种情况， a 、 $BP = AP$ 时， b 、 $BP = AB = 6$ 时，由直角三角形的性质和勾股定理分别求出 PD 的长即可。

【小问 1 详解】

证明：∵ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，

$$\therefore AP = BP,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABP,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP + \angle CBP = 90^\circ, \quad \angle A + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBP = \angle C,$$

$$\therefore PC = BP,$$

$$\therefore AP = PC;$$

【小问 2 详解】

解：①如图 2，取 BD 的中点 E ，连接 PE ，

则 $BE = DE$ ， $BD = 2BE = 2DE$ ，

$$\because PD \perp BP,$$

$$\therefore \angle BPD = 90^\circ,$$

$$\therefore PE = \frac{1}{2}BD = BE = DE,$$

$$\therefore \angle BPE = \angle PBC, \quad \angle EPD = \angle EDP,$$

$$\because BD = 2CD,$$

$$\therefore BE = CD,$$

∵ $\angle ABC = 90^\circ$ ，点 P 是线段 AC 的中点，

$$\therefore BP = \frac{1}{2}AC = CP,$$

$$\therefore \angle PBE = \angle C,$$

在 $\triangle BPE$ 和 $\triangle CPD$ 中，

$$\begin{cases} BP = CP \\ \angle PBE = \angle C, \\ BE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BPE \cong \triangle CPD (SAS),$$

$$\therefore \angle BPE = \angle CPD,$$

$$\therefore \angle BPE = \angle CPD = \angle PBC = \angle C,$$

$$\therefore \angle EPD = \angle EDP = \angle C + \angle CPD = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle BPD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPE + \angle EPD = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle C + 2\angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ,$$

即 $\angle C$ 的度数为 30° ;

$$\textcircled{2} \because AB = 6, BC = 8, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

分两种情况:

a、如图 3, $BP = AP$ 时,

$$\text{由 (1) 可知, } BP = AP = PC = \frac{1}{2}AC = 5,$$

过点 P 作 $PM \perp BC$ 于点 M ,

$$\text{则 } BM = CM = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\therefore PM = \sqrt{BP^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

设 $DM = x$, 则 $BD = 4 + x$,

在 $Rt\triangle BPD$ 和 $Rt\triangle PDM$ 中, 由勾股定理得: $PD^2 = BD^2 - BP^2 = PM^2 + DM^2$,

$$\text{即 } (4+x)^2 - 5^2 = 3^2 + x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{9}{4},$$

$$\therefore DM = \frac{9}{4},$$

$$\therefore PD = \sqrt{PM^2 - DM^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{15}{4};$$

b、如图 4, $BP = AB = 6$ 时, $\angle A = \angle BPA$,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore PD \perp BP,$$

$$\therefore \angle BPD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPA + \angle CPD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle CPD,$$

$$\therefore PD = CD,$$

设 $PD = CD = m$ ，则 $BD = 8 - m$ ，

在 $Rt\triangle BPD$ 中，由勾股定理得： $BP^2 + PD^2 = BD^2$ ，

$$\text{即 } 6^2 + m^2 = (8 - m)^2,$$

$$\text{解得： } m = \frac{7}{4},$$

$$\therefore PD = \frac{7}{4};$$

综上所述， PD 的长等于 $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{7}{4}$ ，

故答案为： $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{7}{4}$.

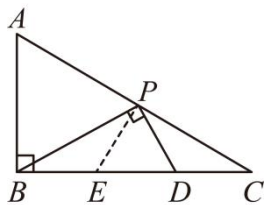


图2

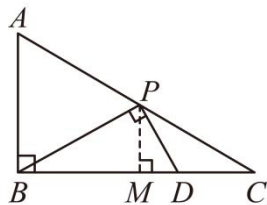


图3

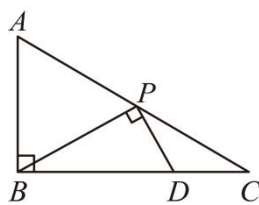


图4

【点睛】 本题是三角形综合题，考查了线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质、全等三角形的判定与性质、直角三角形斜边上的中线性质的性质、勾股定理以及分类讨论等知识，本题综合性强，熟练掌握全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质以及勾股定理是解题的关键，属于中考常考题型.