

2024 学年第一学期八年级第二次阶段质量监控

(完卷时间: 90 分钟, 满分: 100 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt{x+y^3}$ D. $\sqrt{xy^3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的化简, 最简二次根式的定义, 熟练掌握二次根式的性质是解题的关键. 根据最简二次根式的定义判断即可.

【详解】解: A. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ 不是最简二次根式, 不符合题意;

B. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 不是最简二次根式, 不符合题意;

C. $\sqrt{x+y^3}$, 被开方数为多项式, 无法分解成含完全平方的因式, $\sqrt{x+y^3}$ 是最简二次根式, 符合题意,

D. $\sqrt{xy^3} = |y|\sqrt{xy}$ 不是最简二次根式, 不符合题意.

故选: C.

2. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 没有实数根, 那么在下列各数中, k 的取值只能是 ()

- A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的判别式的应用, 根据关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 没有实数根, 得出

$\Delta = 4 - 4k < 0$, 得 $k > 1$, 即可作答.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 没有实数根,

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times k = 4 - 4k < 0,$$

$$\therefore k > 1,$$

观察 4 个选项, 唯有 2 符合条件,

故选: A.

3. 下列问题中，两个变量成反比例的是（ ）

- A. 直角三角形的周长一定时，它的两条直角边；
- B. 直角三角形的一条直角边一定时，它的周长与另一条直角边；
- C. 直角三角形的面积一定时，它的两条直角边；
- D. 直角三角形的一条直角边一定时，它的面积与另一条直角边.

【答案】C

【解析】

【分析】设直角三角形的周长为 l ，面积为 S ，一条直角边为 x ，另一条直角边为 y ，分别表示出各选项中的关系式，根据反比例的定义即乘积为定值的两个量成反比例进行判断即可.

【详解】解：设直角三角形的周长为 l ，面积为 S ，一条直角边为 x ，另一条直角边为 y ，斜边是 $\sqrt{x^2 + y^2}$ ，

A、直角三角形的周长 l 确定，则有 $l = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ ， l 与 y 不成反比例，故不符合题意；

B、直角三角形的一条直角边 x 确定，则有 $l = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $l = 2y + 2x$ ，周长 l 与宽 y 不成反比例，故不符合题意；

C、直角三角形的面积 S 确定，则有 $S = \frac{1}{2}xy$ ，即 $xy = 2S$ $y = \frac{2S}{x}$ ， x 与 y 的解析式为反比例函数，故符合题意；

D、直角三角形的长 x 确定，则有 $S = \frac{1}{2}xy$ ，面积 S 与 y 不成反比例，故不符合题意；

故选：C.

4. 下列命题中，如果其逆命题是真命题，那么这个命题是（ ）

- A. 对顶角相等；
- B. 关于某个点中心对称的两个三角形全等；
- C. 全等三角形的对应角相等；
- D. 在一个三角形中，等边对等角.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了真假命题的判断，写出原命题的逆命题，掌握相关性质定理是解题的关键. 根据题意，分别写出逆命题，再逐项判断即可求解.

【详解】解：A. 对顶角相等，逆命题为：相等的角是对顶角，原命题的逆命题是假命题，故该选项不正确，不符合题意；

B. 关于某个点中心对称的两个三角形全等，逆命题为：两个全等三角形是关于某个点中心对称，原命题

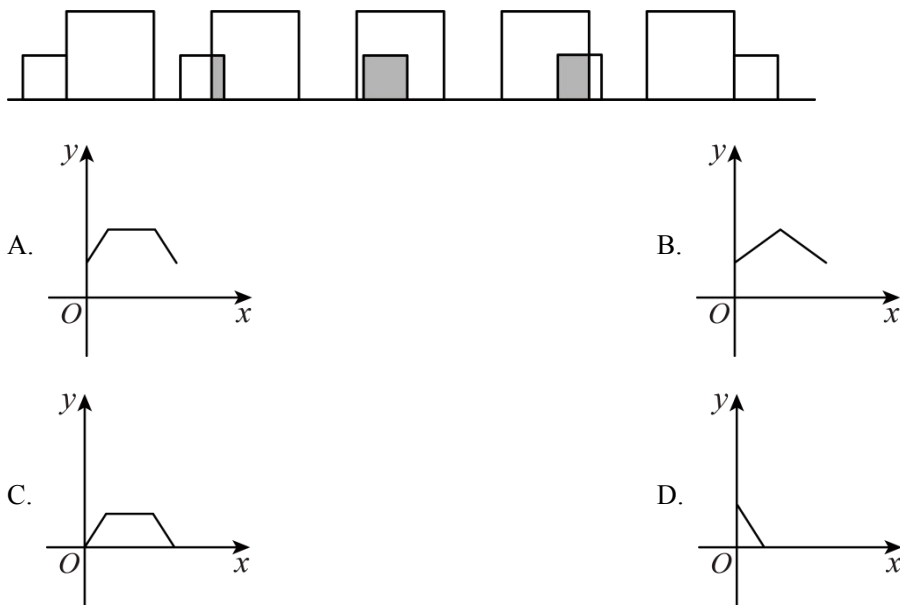
的逆命题是假命题，故该选项不正确，不符合题意；

C. 全等三角形的对应角相等，逆命题为：对应角相等的两个三角形全等，原命题的逆命题是假命题，故该选项不正确，不符合题意；

D. 在一个三角形中，等边对等角，逆命题为：在一个三角形中，等角对等边，原命题的逆命题是真命题，故该选项正确，符合题意；

故选：D.

5. 如图，边长为 3 和 4 的两个正方形，其一边在同一水平线上，小正方形自左向右匀速穿过大正方形，设穿过的时间为 x ，阴影部分面积为 y ，那么 y 与 x 的函数图象大致是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了动点问题的函数图象. 分三个阶段：①小正方形向右未完全穿入大正方形，②小正方形穿入大正方形但未穿出大正方形，③小正方形穿出大正方形，分别判断出阴影部分面积的情况，可得答案.

【详解】解：小正方形未穿大正方形之前，阴影部分面积最小，为 0；

开始穿入时， S 随时间的增加而增大；

完全穿入之后， S 最大，即为小正方形的面积，且保持一段时间不变，

开始离开后， S 随时间的增加而减小，直到最小，为 0.

故选：C.

6. 如图，从 ABC 内一点 O 出发，把 ABC 剪成三个三角形(如图 1)，边 AB, BC, AC 放在同一直线上，点 O 都落在直线 MN 上 (如图 2)，直线 $MN \parallel AC$ ，则点 O 是 ABC 的 ()

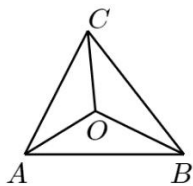


图1

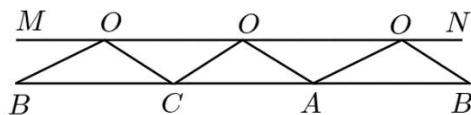


图2

- A. 三条角平分线的交点
- B. 三条高的交点
- C. 三条中线的交点
- D. 三边中垂线的交点

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据平行线的性质可得点 O 到三边的距离相等，点 O 是三角形三条角平分线的交点即可.

【详解】 解: $\because$ 直线 $MN \parallel AC$,

根据平行线性质知点 O 到 BC 距离, 点 O 到 AC 距离, 点 O 到 BA 距离相等,

$\therefore$ 点 O 到三边的距离相等

$\therefore$ 点 O 是三角形三条角平分线的交点,

故选择 A.

【点睛】 本题考查角平分线的性质, 掌握角平分线的性质是解题关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 函数 $y = \frac{\sqrt{2+x}}{x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq -2$ 且 $x \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义, 自变量的取值范围, 分式有意义, 根据被开方数为非负数以及分母不为 0 进行列式计算, 即可作答.

【详解】 解: $\because y = \frac{\sqrt{2+x}}{x}$,

$\therefore x \neq 0$, 且 $2+x \geq 0$,

解得 $x \geq -2$ 且 $x \neq 0$,

故答案为: $x \geq -2$ 且 $x \neq 0$,

8. 在实数范围内分解因式: $4x^2 - x - 1 =$ _____.

【答案】 $4\left(x - \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8}\right)\left(x - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{17}}{8}\right)$

【解析】

【分析】 先提公因式，再配方，最后根据平方差公式分解因式即可。本题考查了实数范围内分解因式，掌握 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 是解题的关键。

【详解】 解： $4x^2 - x - 1$

$$= 4\left(x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 4\left(x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{64} - \frac{1}{64} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= 4\left(x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{64} - \frac{17}{64}\right)$$

$$= 4\left[\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{17}{64}\right]$$

$$= 4\left[\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{17}}{8}\right)^2\right]$$

$$= 4\left(x - \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8}\right)\left(x - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{17}}{8}\right),$$

故答案为： $4\left(x - \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8}\right)\left(x - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{17}}{8}\right)$.

9. 关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2 + x + m^2 - 4 = 1$ 有一个根为 0， m 的值是_____.

【答案】 $\pm\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解，根据一个根为 0，得出 $m^2 - 4 = 1$ ，解得 $m = \pm\sqrt{5}$ ，即可作答。

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2 + x + m^2 - 4 = 1$ 有一个根为 0，

$\therefore$ 把 $x = 0$ 代入 $(m-2)x^2 + x + m^2 - 4 = 1$ ，

得 $m^2 - 4 = 1$ ，

解得 $m = \pm\sqrt{5}$ ，

故答案为: $\pm\sqrt{5}$

10. 某种型号的优盘经过两次降价后, 每只由原来的 200 元下降至 128 元, 则这种型号的优盘平均每次降价的百分率为_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 解题的关键是理解题意, 正确找出等量关系. 设这种型号的优盘平均每次降价的百分率为 x , 根据题意列方程即可求解.

【详解】 解: 设这种型号的优盘平均每次降价的百分率为 x ,

根据题意得: $200(1-x)^2 = 128$,

$$(1-x)^2 = 0.64,$$

$$1-x = \pm 0.8,$$

$$x_1 = 0.2 = 20\%, \quad x_2 = 1.8 \quad (\text{不合题意, 舍去}),$$

答: 这种型号的优盘平均每次降价的百分率为 20%.

故答案为: 20%

11. 已知反比例函数 $y = \frac{k-3}{x} (x > 0)$ 的图象上有两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, $y_1 < y_2$, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 3$

【解析】

【分析】 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, 有 $y_1 < y_2$, 可知 y 随 x 的增大而增大, 由此可知图象经过第四象限, 本题主要考查根据函数值的大小判断反比例函数图形的位置, 掌握根据反比例系数判断反比例函数图形的位置是解题的关键.

由此即可求解.

【详解】 解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k-3}{x} (x > 0)$ 的图象上有两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, $y_1 < y_2$,

$$\therefore \text{当 } 0 < x_1 < x_2 \text{ 时, } y_1 < y_2,$$

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 反比例函数图象经过第四象限,

$$\therefore k-3 < 0,$$

$$\therefore k < 3,$$

故答案为: $k < 3$.

12. 在平面直角坐标系中, 如果一个点的横坐标与纵坐标相等, 则称该点为“雁点”. 例如 $(1,1)$,

$(2023,2023)$,, 都是“雁点”, 函数 $y = \frac{4}{x}$ 图像的“雁点”坐标为_____.

【答案】 $(2,2), (-2,-2)$

【解析】

【分析】 根据一个点的横坐标与纵坐标相等, 则称该点为“雁点”, 即可得到答案.

【详解】 解: $\because$ 一个点的横坐标与纵坐标相等, 则称该点为“雁点”,

$\therefore$ 函数 $y = \frac{4}{x}$ 图像的“雁点”坐标为: $(2,2), (-2,-2)$,

故答案为: $(2,2), (-2,-2)$.

【点睛】 本题主要考查了坐标系的新定义问题, 理解“雁点”的定义, 是解题的关键.

13. 命题“等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是_____.

【答案】 两个角相等的三角形是等腰三角形

【解析】

【分析】 本题主要考查了写出一个命题的逆命题, 对于两个命题, 如果一个命题的条件和结论分别是另外一个命题的结论和条件, 那么这两个命题叫做互逆命题, 其中一个命题叫做原命题, 另外一个命题叫做原命题的逆命题, 据此求解即可.

【详解】 解: 命题“等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是两个角相等的三角形是等腰三角形,

故答案为: 两个角相等的三角形是等腰三角形.

14. 等腰三角形周长 18, 腰长为 x , 底边为 y , 写出 y 关于 x 的函数解析式是_____, 定义域是_____.

【答案】 ①. $y = -2x + 18$ ②. $\frac{9}{2} < x < 9$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数关系式, 三角形的周长公式, 三角形的三边关系, 熟练掌握以上知识点是解答本题的关键. 根据三角形的周长公式可得函数关系式, 根据底边长是正数以及三角形的三边关系可确定自变量的取值范围, 即可求解.

【详解】 解: 由三角形的周长公式, 得 $y = -2x + 18$,

由底边长是正数, 得 $-2x + 18 > 0$,

解得: $x < 9$,

由两边之和大于第三边，得 $2x > -2x + 18$ ，

解得： $x > \frac{9}{2}$ ，

$\therefore y$ 关于 x 的关系式及定义域是 $y = -2x + 18 \left(\frac{9}{2} < x < 9 \right)$ ，

故答案为： $y = -2x + 18, \frac{9}{2} < x < 9$

15. 以线段 MN 为底边的等腰三角形的顶角顶点的轨迹是 _____.

【答案】 线段 MN 的垂直平分线（线段 MN 的中点除外）

【解析】

【分析】 满足 $\triangle MNC$ 以线段 MN 为底边且 $CM = CN$ ，根据线段的垂直平分线判定得到点 C 在线段 AB 的垂直平分线上，除去与 MN 的交点（交点不满足三角形的条件）.

【详解】 解： $\because \triangle MNC$ 以线段 MN 为底边， $CM = CN$ ，

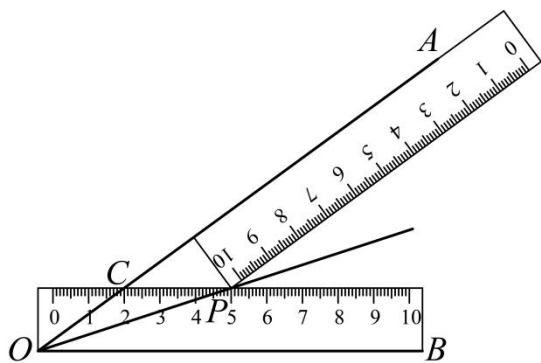
$\therefore$ 点 C 在线段 MN 的垂直平分线上，除去与 MN 的交点（交点不满足三角形的条件），

$\therefore$ 以线段 MN 为底边的等腰三角形的顶点 C 的轨迹是：线段 MN 的垂直平分线（线段 MN 的中点除外）.

故答案为：线段 MN 的垂直平分线（线段 MN 的中点除外）.

【点睛】 此题主要考查垂直平分线的判定，解题的关键是熟知等腰三角形的性质及垂直平分线的判定定理.

16. 小明将两把完全相同的长方形直尺如图放置在 $\angle AOB$ 上，两把直尺的接触点为 P ，边 OA 与其中一把直尺边缘的交点为 C ，点 C 、 P 在这把直尺上的刻度读数分别是 2、5，则 OC 的长度是_____.

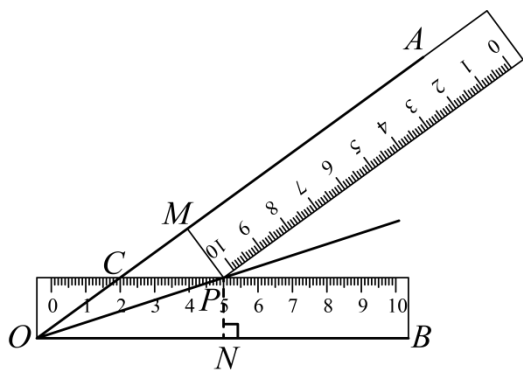


【答案】 3cm

【解析】

【分析】 本题考查角平分线性质的逆定理，平行线的性质，过 P 作 $PN \perp OB$ 于 N ，由角平分线性质的逆定理推出 PO 平分 $\angle AOB$ ，得到 $\angle COP = \angle NOP$ ，由平行线的性质推出 $\angle CPO = \angle NOP$ ，得到 $\angle COP = \angle CPO$ ，因此 $OC = PC$ ，由 $PC = 5 - 2 = 3$ (cm)，即可得到 OC 的长度是 3cm.

【详解】 解： 过 P 作 $PN \perp OB$ 于 N ，



由题意得： $PM = PN$ ， $PC \parallel OB$ ， $PM \perp OA$ ，

$\therefore PO$ 平分 $\angle AOB$ ，

$\therefore \angle COP = \angle NOP$ ，

$\because PC \parallel OB$ ，

$\therefore \angle CPO = \angle NOP$ ，

$\therefore \angle COP = \angle CPO$ ，

$\therefore OC = PC$ ，

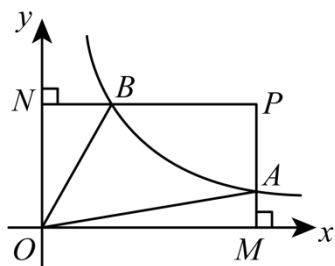
$\because C$ 、 P 在这把直尺上的刻度读数分别是 2、5，

$\therefore PC = 5 - 2 = 3(\text{cm})$ ，

$\therefore OC$ 的长度是 3cm .

故答案为： 3cm .

17. 如图，已知点 $P(6, 3)$ ，过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M ， $PN \perp y$ 轴于点 N ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交 PM 于点 A ，交 PN 于点 B 。若四边形 $OAPB$ 的面积为 12，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 6.

【解析】

【分析】 根据点 $P(6, 3)$ ，可得点 A 的横坐标为 6，点 B 的纵坐标为 3，代入函数解析式分别求出点 A 的纵坐标和点 B 的横坐标，然后根据四边形 $OAPB$ 的面积为 12，列出方程求出 k 的值.

【详解】 $\because$ 点 $P(6, 3)$ ，

$\therefore$ 点 A 的横坐标为 6，点 B 的纵坐标为 3，

代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 得,

点 A 的纵坐标为 $\frac{k}{6}$, 点 B 的横坐标为 $\frac{k}{3}$,

即 $AM = \frac{k}{6}$, $NB = \frac{k}{3}$,

$\therefore S_{\text{四边形 OAPB}} = 12$,

即 $S_{\text{矩形 OMPN}} - S_{\triangle OAM} - S_{\triangle NBO} = 12$,

$$6 \times 3 - \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{k}{6} - \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{k}{3} = 12,$$

解得: $k = 6$.

故答案为: 6.

18. $\triangle ABC$ 的两边 AB 、 AC 的垂直平分线分别交直线 BC 于 D 、 E , 且 $\angle BAC + \angle DAE = 150^\circ$, 则 $\angle BAC$ 的度数 = _____.

【答案】 30° 或 110°

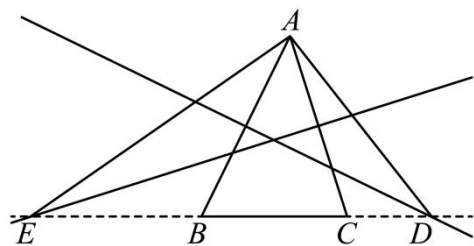
【解析】

【分析】 本题主要考查了线段垂直平分线的性质, 三角形内角和定理, 等边对等角,

分三种情况: 当 $\angle BAC$ 是锐角时, 根据线段垂直平分线的性质得 $AD = BD$, $AE = CE$, 再根据等腰三角形的性质得 $\angle ABD = \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$, $\angle CAE = \angle ACE$, 然后表示

$\angle CAE = \angle ACE = 150^\circ - \angle BAC - \angle CAD$, 最后根据三角形的内角和定理得出答案; 当 $\angle BAC$ 是直角, 不符合题意; 当 $\angle BAC$ 是钝角时, 先表示出 $\angle ABD = \angle BAD = \angle BAC - \angle CAD$, 再表示出 $\angle ACE = \angle CAD - 150^\circ + \angle BAC$, 然后根据三角形内角和定理得出答案.

【详解】 解: 当 $\angle BAC$ 是锐角时, 如图所示,



$\therefore ABC$ 的两边 AB , AC 的垂直平分线分别交于直线 BC 于点 D , E ,

$\therefore AD = BD$, $AE = CE$,

$\therefore \angle ABD = \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$, $\angle CAE = \angle ACE$.

$\therefore \angle DAE = 150^\circ - \angle BAC$,

$$\therefore \angle CAE = \angle ACE = 150^\circ - \angle BAC - \angle CAD$$

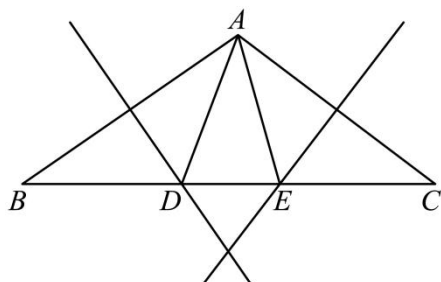
$$\because \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore (\angle BAC + \angle CAD) + \angle BAC + (150^\circ - \angle BAC - \angle CAD) = 180^\circ,$$

解得 $\angle BAC = 30^\circ$.

当 $\angle BAC$ 是直角, 不符合题意;

当 $\angle BAC$ 是钝角时, 如图所示,



$\because$ ABC 的两边 AB, AC 的垂直平分线分别交于直线 BC 于点 D, E ,

$$\therefore AD = BD, AE = CE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BAD = \angle BAC - \angle CAD, \angle CAE = \angle ACE.$$

$$\therefore \angle DAE = 150 - \angle BAC,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ACE = \angle CAD - (150^\circ - \angle BAC) = \angle CAD - 150^\circ + \angle BAC.$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore (\angle BAC - \angle CAD) + \angle BAC + (\angle CAD - 150^\circ + \angle BAC) = 180^\circ,$$

解得 $\angle BAC = 110^\circ$.

所以 $\angle BAC$ 的度数是 30° 或 110° .

故答案为: 30° 或 110° .

三、简答题 (本大题共 6 题, 每题 6 分, 满分 36 分)

19. 计算: $\sqrt{12} + \sqrt{0.5} - 3\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

【答案】 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 分母有理化, 二次根式的性质, 先根据二次根式的性质化简,

结合分母有理化性质化简，再运用加减，即可作答.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \sqrt{12} + \sqrt{0.5} - 3\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

20. 解方程: $2x(x-2)=5$.

$$\text{【答案】 } x_1 = 1 + \sqrt{14}, x_2 = 1 - \sqrt{14}$$

【解析】

【分析】根据公式法解得即可.

$$\text{【详解】解: } 2x^2 - 4x - 5 = 0$$

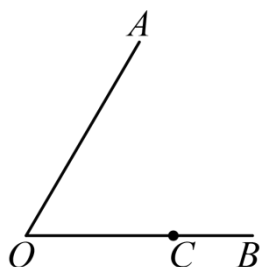
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 56$$

$$x = 1 \pm \sqrt{14}$$

$$\therefore x_1 = 1 + \sqrt{14}, x_2 = 1 - \sqrt{14}$$

【点睛】此题考查了一元二次方程的解法，解题的关键是熟悉公式法.

21. 如图, $\angle AOB = 60^\circ$, 点 C 在 OB 上.



(1) 求作: 点 P , 使点 P 到 OA 、 OB 的距离相等, 且 $PO = PC$. (不要求写出作法和证明, 但要求保留作图痕迹, 并写出结论)

(2) 若线段 OC 的垂直平分线交 OA 于点 D , 四边形 $DOCP$ 的面积等于 $32\sqrt{3}$, 点 P 到 OA 的距离是 4cm , 则 OC 的长是 _____ cm .

【答案】(1) 见解析 (2) $8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的性质及作法、线段垂直平分线的性质及作法.

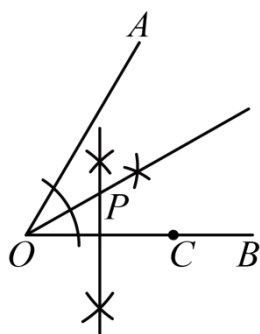
(1) 作 $\angle AOB$ 的角平分线, 线段 OC 的垂直平分线, 两者的交点即为点 P ;

(2) 如图, 根据角平分线的性质可得 $PE = 4\text{cm}$, 再证明 $\triangle ODP \cong \triangle OCP (\text{AAS})$, 可得

$$S_{\triangle OPC} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形} DOPC} = 16\sqrt{3}, \text{ 根据三角形面积公式, 即可得出 } OC = 8\sqrt{3}\text{cm}.$$

【小问 1 详解】

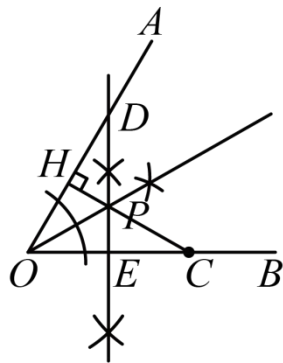
解: 如图, 点 P 即为所求;



【小问 2 详解】

若线段 OC 的垂直平分线交 OA 于点 D , 四边形 $DOCP$ 的面积等于 $32\sqrt{3}$, 点 P 到 OA 的距离是 4cm , 则 OC 的长是 _____ cm .

解: 如图, 线段 OC 的垂直平分线交 OC 于点 E , 过点 P 作 $PH \perp OA$ 垂足为 H ,



又 $\because PE \perp OC$,

$\because \angle AOB = 60^\circ$, 由作图知 OP 是 $\angle AOB$ 的角平分线,

$$\therefore \angle POC = \angle POD = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ,$$

又 $\because PE \perp OE$, 点 P 到 OA 的距离是 4cm , 即 $PH = 4\text{cm}$,

$$\therefore PH = PE = 4\text{cm}, \quad \angle ODE = 90^\circ - \angle AOB = 30^\circ,$$

$\therefore PE$ 是线段 OC 的垂直平分线,

$$\therefore OP = PC$$

$$\therefore PC = PO = 8\text{cm},$$

$$\therefore \angle OCP = \angle POC = 30^\circ,$$

$$\therefore OP = OP,$$

$$\therefore \triangle ODP \cong \triangle OCP (\text{AAS}),$$

$$\therefore S_{\triangle OPC} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形DOPC}} = \frac{1}{2} \times 32\sqrt{3} = 16\sqrt{3},$$

$$\text{又} \because S_{\triangle OPC} = \frac{1}{2} OC \cdot PE, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 4 \cdot OC = 16\sqrt{3},$$

$$\therefore OC = 8\sqrt{3}$$

22. 关于 x 的方程 $2x^2 + (a+2b)x + ab = 0$, a, b 为实数.

(1) 此方程一定有实数根吗? 为什么?

(2) 当 $a = 4$ 时, 方程有两个相等的实数根, 求这两个根.

【答案】 (1) 此方程一定有实数根, 理由见详解

$$(2) \quad x_1 = x_2 = -2$$

【解析】

【分析】 (1) 根据方程的 $\Delta = (a+2b)^2 - 4 \times 2ab = (a-2b)^2 \geq 0$, 即可作答.

(2) 先把 $a = 4$ 代入 $2x^2 + (a+2b)x + ab = 0$, 得 $2x^2 + (4+2b)x + 4b = 0$, 结合方程有两个相等的实数根, 求出 $b = 2$, 再运用因式分解法解方程, 即可作答.

本题考查的是一元二次方程根的判别式的应用, 利用因式分解的方法解一元二次方程, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 此方程一定有实数根, 理由如下:

$$\therefore 2x^2 + (a+2b)x + ab = 0,$$

$$\therefore \Delta = (a+2b)^2 - 4 \times 2ab = a^2 + 4ab + 4b^2 - 8ab = a^2 - 4ab + 4b^2 = (a-2b)^2 \geq 0$$

$\therefore$ 此方程一定有实数根

【小问 2 详解】

解: 把 $a = 4$ 代入 $2x^2 + (a+2b)x + ab = 0$,

$$\text{得 } 2x^2 + (4 + 2b)x + 4b = 0,$$

$\because$ 当 $a = 4$ 时, 方程有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (4 + 2b)^2 - 4 \times 2 \times 4b = 16 + 16b + 4b^2 - 32b = 16 - 16b + 4b^2 = (4 - 2b)^2 = 0,$$

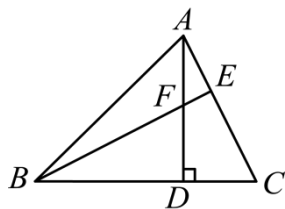
$$\therefore b = 2,$$

$$\therefore 2x^2 + 8x + 8 = 0,$$

$$\therefore x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0,$$

$$\therefore x_1 = x_2 = -2.$$

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于点 D , E 为 AC 上一点, 且 $BF = AC$, $DF = DC$.



(1) 求证: $\triangle BDF \cong \triangle ADC$;

(2) 若 $AF = 6$, $FD = 2$, 试求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 40

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形全等的判定, 解题的关键是熟练掌握直角三角形的判定方法,

(1) 利用 HL 即可证明;

(2) 根据 $\triangle BDF \cong \triangle ADC$, 可得 $AD = BD = AF + FD$, 进而求出 $BD = AD = 8$, $BC = BD + CD = 10$, 再根据三角形面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD \perp BC$

$$\therefore \angle BDF = \angle ADC = 90^\circ$$

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle ADC$ 中

$$\begin{cases} BF = AC \\ DF = DC \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle BDF \cong \text{Rt} \triangle ADC (\text{HL})$$

【小问 2 详解】

解: $\because BDF \cong ADC$

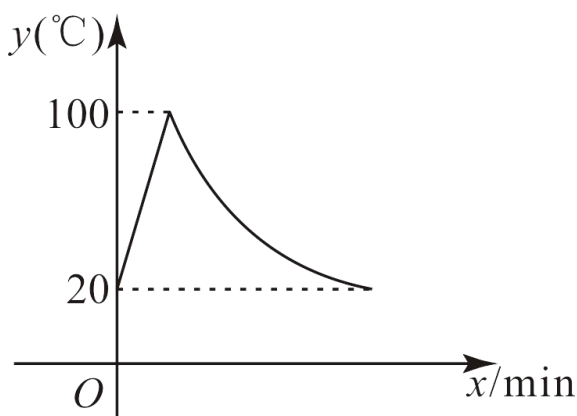
$$\therefore AD = BD = AF + FD,$$

$$\therefore AF = 6, FD = 2, DF = DC,$$

$$\therefore BD = AD = 8, BC = BD + CD = 8 + 2 = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 10 \times 8 = 40.$$

24. 办公区域的自动饮水机, 开机加热时水温每分钟上升 20°C , 水温到 100°C 时停止加热, 此后水温开始下降. 水温 $y (^{\circ}\text{C})$ 与开机通电时间 $x(\text{min})$ 成反比例关系. 若水温在 20°C 时接通电源, 一段时间内, 水温 y 与通电时间 x 之间的函数关系如图所示.



(1) 水温从 20°C 加热到 100°C , 需要_____min;

(2) 求水温下降过程中, y 与 x 的函数关系式, 并写出定义域;

(3) 如果上午 8 点接通电源, 那么 8:20 之前, 不低于 80°C 的时间有多少?

【答案】(1) 4 (2) $y = \frac{400}{x} (4 \leq x \leq 20)$

(3) 2 分钟

【解析】

【分析】(1) 根据开机加热时水温每分钟上升 20°C 即可求出水温从 20°C 加热到 100°C 所需时间;

(2) 根据反比例函数过点 $(4, 100)$ 可求出解析式;

(3) 分别计算出水温达到 100°C 前 80°C 和达到 100°C 后再降到 80°C 所需时间即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 开机加热时水温每分钟上升 20°C ,

$$\therefore \text{水温从 } 20^{\circ}\text{C} \text{ 加热到 } 100^{\circ}\text{C}, \text{ 所需时间为 } \frac{100 - 20}{20} = 4(\text{min}),$$

故答案为: 4;

【小问 2 详解】

由题可得, $(4,100)$ 在反比例函数图象上,

设反比例函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

代入点 $(4,100)$ 可得, $k = 400$,

$$\therefore y = \frac{400}{x},$$

当 $y = 20$ 时, $x = \frac{400}{20} = 20$,

$\therefore$ 水温下降过程中, y 与 x 的函数关系式是 $y = \frac{400}{x} (4 \leq x \leq 20)$;

【小问 3 详解】

当 $0 < x < 4$ 时, 设 $y = kx + 20$, 将 $(4,100)$ 代入函数解析式, 可得:

$$4k + 20 = 100, \text{ 解得: } k = 20,$$

$\therefore$ 当 $0 < x < 4$ 时, $y = 20x + 20$,

当 $y = 80$ 时, $20x + 20 = 80$, 解得 $x = 3$,

当 $y = 80$ 时, $\frac{400}{x} = 80$, 解得 $x = 5$,

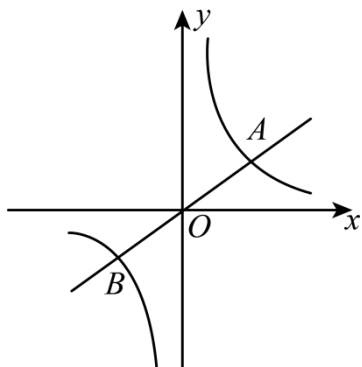
$\therefore$ 水温不低于 80°C 的时间为 $5 - 3 = 2$ (分钟),

答: 不低于 80°C 的时间有 2 分钟.

【点睛】 本题考查了反比例函数和一次函数的应用, 读懂函数图像, 获取信息是解决本题的关键.

四、解答题 (本大题共 3 题, 第 25 题 6 分, 第 26 题 8 分, 第 27 题 8 分, 共 22 分)

25. 如图, 已知直线 $y = \frac{1}{2}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 交于 A、B 两点, 且点 A 的横坐标为 4.



(1) 求 k 的值;

(2) 若双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 上的点 C 的纵坐标为 8, 求 $\triangle AOC$ 的面积.

【答案】 (1) 8 (2) 15

【解析】

【分析】(1) 求出点 A 代入解析式得到 k 的值,即可解答;

(2) 求出点 C , 再根据割补法即可求三角形的面积.

本题考查了求反比例函数以及反比例函数与一次函数的交点问题, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 直线 $y = \frac{1}{2}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 交于 A 、 B 两点, 且点 A 的横坐标为 4.

把 $x_A = 4$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$,

$$\text{得 } y = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

$$\therefore A(4, 2),$$

把 $A(4, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$,

$$\text{得 } 2 = \frac{k}{4},$$

解得 $k = 8$;

【小问 2 详解】

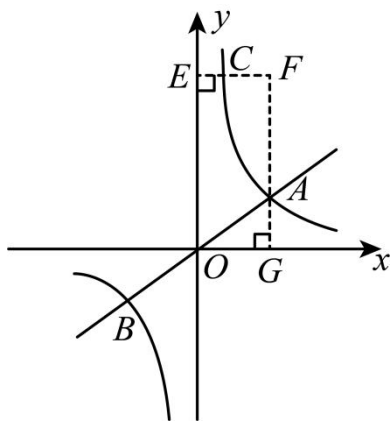
解: 如图,过 A 、 C 点分别作 x 轴、 y 轴的垂线垂足为 G 、 E ,两垂线交于点 F ,则四边形 $EFGO$ 是矩形,

由 (1) 得 $k = 8$,

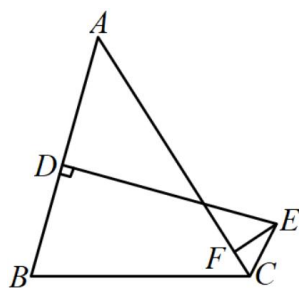
在 $y = \frac{8}{x}$ 中, 当 $y = 8$ 时, $x = 1$,

即 $C(1, 8)$,

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle AOC} &= S_{\text{矩形}EFGO} - S_{\triangle EOC} - S_{\triangle CFA} - S_{\triangle AOG} \\&= 4 \times 8 - \frac{1}{2} \times (8 - 2) \times (4 - 1) - \frac{1}{2} \times 8 \times 1 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \\&= 32 - 9 - 4 - 4 \\&= 15.\end{aligned}$$



26. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 的中点， $DE \perp AB$ ， $\angle ACE + \angle BCE = 180^\circ$ ， $EF \perp AC$ 于点 F ，若 $AC = 12$ ， $BC = 8$ ，求 AF 的长.

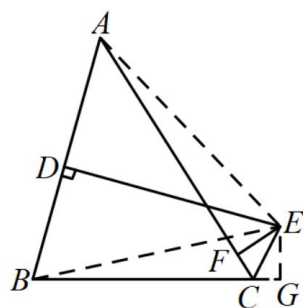


【答案】 10

【解析】

【分析】作 $EG \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 G ；连接 AE 、 BE ；构造 $\text{Rt}\triangle AEF \cong \text{Rt}\triangle BEG(\text{HL})$ 和 $\text{Rt}\triangle CEF \cong \text{Rt}\triangle CEG(\text{HL})$ ，通过全等三角形的性质转化线段求解即可；

【详解】解：如图，作 $EG \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 G ；连接 AE 、 BE ；



$$\because \angle ACE + \angle BCE = 180^\circ$$

$$\angle ECG + \angle BCE = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ECG$$

$$\because EF \perp AC, EG \perp BC$$

$$\therefore EF = EG$$

$\because D$ 是 AB 的中点, $DE \perp AB$

$$\therefore AE = BE$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 和 $\text{Rt}\triangle BEG$ 中

$$\begin{cases} EF = EG \\ AE = BE \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEF \cong \text{Rt}\triangle BEG(\text{HL})$$

$$\therefore AF = BG$$

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 和 $\text{Rt}\triangle CEG$ 中

$$\begin{cases} EF = EG \\ EC = EC \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CEF \cong \text{Rt}\triangle CEG(\text{HL})$$

$$\therefore CF = CG$$

设 $AF = BG = x$, 则 $CF = AC - AF = 12 - x$, $CG = BG - BC = x - 8$

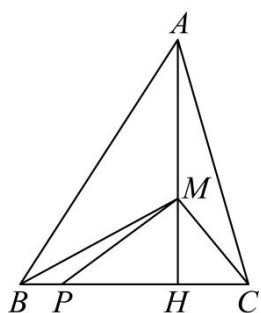
$$\therefore 12 - x = x - 8$$

解得: $x = 10$

故 $AF = 10$

【点睛】 本题考查了中垂线的性质, 角平分线的性质定理、全等三角形的判定与性质; 构造全等三角形转化线段是解题的关键.

27. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = \sqrt{17}$, $AH \perp BC$, 垂足为 H , $\angle ABC$ 的平分线交 AH 于点 M , 点 P 为 BC 边上的动点 (不与 B 、 C 重合), 连 MC 、 MP .



(1) 求 CH 的长;

(2) 设 $BP = x$, $S_{\triangle MPC} = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出函数的定义域;

(3) 当 $\triangle MPC$ 为以 MC 为腰的等腰三角形时, 求 BP 的长 (直接写出结果).

【答案】 (1) $CH = 1$

$$(2) \quad y = -\frac{3}{4}x + 3 (0 < x < 4)$$

$$(3) \quad 2 \text{ 或 } 4 - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

【解析】

【分析】对于 (1)，根据勾股定理可得 $AH^2 = AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2$ ，可得关于 CH 的方程，求出解即可；

对于 (2)，先求出 AH ，再根据三角形的面积相等求出 MH ，则关系式可得；

对于 (3)，分两种情况：当 $MC = MP$ 时， $MC = CP$ 时，分别求出答案即可．

【小问 1 详解】

$$\text{解：} \because AB = 5, BC = 4, AC = \sqrt{17},$$

$$\text{根据勾股定理可得 } AH^2 = AB^2 - BH^2 = AC^2 - CH^2,$$

$$\text{即 } 5^2 - (4 - CH)^2 = (\sqrt{17})^2 - CH^2,$$

$$\text{解得 } CH = 1;$$

【小问 2 详解】

解：如图所示，过点 M 作 $MD \perp AB$ ，交 AB 于点 D ，

$$\because BM \text{ 平分 } \angle ABC, MH \perp BC,$$

$$\therefore MH = MD.$$

$$\text{根据勾股定理，得 } AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - 1^2} = 4.$$

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot DM = \frac{1}{2} AM \cdot BH,$$

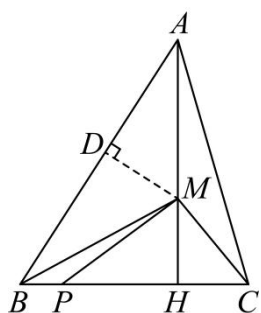
$$\therefore AB \cdot MH = (AH - MH) \times (BC - CH),$$

$$\text{即 } 5MH = (4 - MH) \times (4 - 1),$$

$$\text{解得 } MH = \frac{3}{2}.$$

$$\because BP = x, \text{ 则 } CP = 4 - x,$$

$$\therefore S_{\triangle MPC} = y = \frac{1}{2} CP \cdot MH = \frac{1}{2} (4 - x) \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}x + 3 (0 < x < 4);$$



【小问 3 详解】

解：当 $MC = MP$ 时， $CH = PH = 1$ ，

$$\therefore BP = 4 - 2 = 2;$$

$$\text{当 } MC = CP \text{ 时， } MC = \sqrt{MH^2 + CH^2} = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore BP = BC - CP = 4 - \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

所以当 $\triangle MPC$ 为以 MC 为腰的等腰三角形时， BP 的长为 2 或 $4 - \frac{\sqrt{13}}{2}$

【点睛】 本题主要考查了勾股定理，求函数关系式，等腰三角形的性质，角平分线的性质定理，勾股定理是求线段长的常用方法.