

上宝中学 2024 学年第一学期初二年级数学阶段性练习 2

(答题时间: 100 分钟, 满分: 100 分) 2024 年 12 月 10 日

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 函数 $y = (2m-1)x$ 是正比例函数, 且 y 随着 x 的增大而减小, 那么 m 的取值范围是 ()

A. $m < \frac{1}{2}$

B. $m > \frac{1}{2}$

C. $m \leq \frac{1}{2}$

D. $m \geq \frac{1}{2}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数图象的性质: 它是经过原点的一条直线. 当 $k > 0$ 时, 图象经过一、三象限, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, 图象经过二、四象限, y 随 x 的增大而减小. 根据正比例函数图象的增减性可求出 m 的取值范围.

【详解】 解: $\because$ 函数 $y = (2m-1)x$ 是正比例函数, 且 y 随 x 的增大而减小,

$$\therefore 2m-1 < 0,$$

$$\text{解得 } m < \frac{1}{2}.$$

故选: A.

2. 关于反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图像, 下列说法错误的是 ()

A. y 随着 x 的增大而增大

B. 图像位于第二、四象限

C. 图像关于直线 $y = -x$ 对称

D. 图像关于直线 $y = x$ 对称

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数的性质, 根据反比例函数的性质进行逐一判断即可, 熟练掌握反比例函数的性质是解决此题的关键.

【详解】 解: A、 $\because$ 在同一象限内, y 随 x 的增大而增大,

故 A 错误, 符合题意;

$$\text{B、} \because k = -2 < 0,$$

$\therefore$ 图像位于第二, 四象限,

故 B 正确, 不符合题意;

C、 $\because$ 图像关于直线 $y = -x$ 对称,

故 C 正确, 不符合题意;

D、 $\therefore$ 图象关于直线 $y = x$ 对称，

故 D 正确，不符合题意；

故选：A.

3. 下列直线中，经过第一、二、三象限的是（ ）

A. 直线 $y = x - 1$ ； B. 直线 $y = -x + 1$ ； C. 直线 $y = x + 1$ ； D. 直线 $y = -x - 1$.

【答案】C

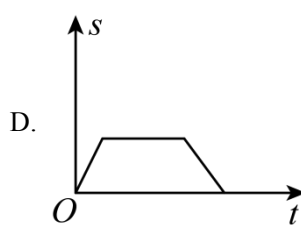
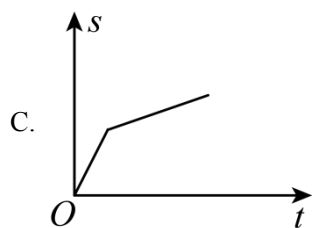
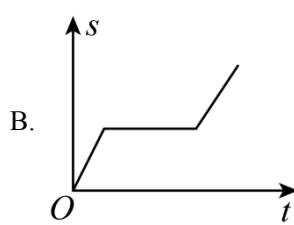
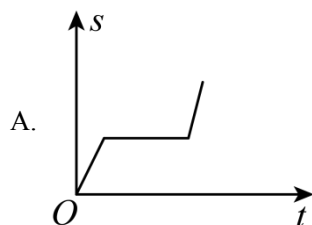
【解析】

【详解】分析：根据一次函数的图像与 k 和 b 的关系即可得出答案.

详解： $y = x - 1$ 经过一、三、四象限； $y = -x + 1$ 经过一、二、四象限； $y = x + 1$ 经过一、二、三象限； $y = -x - 1$ 经过二、三、四象限； 故选 C.

点睛：本题主要考查的是一次函数图像的性质，属于基础题型. 对于一次函数 $y = kx + b$ ，当 $k > 0$ ， $b > 0$ ，图像经过一、二、三象限；当 $k > 0$ ， $b < 0$ ，图像经过一、三、四象限；当 $k < 0$ ， $b > 0$ ，图像经过一、二、四象限；当 $k < 0$ ， $b < 0$ ，图像经过二、三、四象限.

4. 一艘轮船在长江航线上往返于甲、乙两地.若轮船在静水中的速度不变，轮船先从甲地顺水航行到乙地，停留一段时间后，又从乙地逆水航行返回到甲地.设轮船从甲地出发后所用时间为 t (小时)，航行的路程为 S (千米)，则 S 与 t 的函数图象大致是（ ）



【答案】B

【解析】

【详解】分析：轮船先从甲地顺水航行到乙地，速度大于静水速度，图象陡一些，停留一段时间，路程没有变化，图象平行于横轴，又从乙地逆水航行返回到甲地，路程逐步增加，速度小于静水速度，图象平缓一些.

解答：解：依题意，函数图象分为三段，陡-平-平缓，且路程逐渐增大.

故选 B.

5. 若一个三角形三个内角度数之比为 $1:2:3$, 则此三角形的三条边之比为 ()

A. $1:2:3$

B. $1:\sqrt{3}:2$

C. $1:4:9$

D. $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】

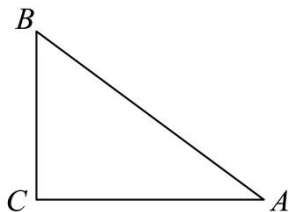
【分析】 本题考查了三角形的内角和定理, 勾股定理, 含 30° 角的直角三角形的性质的应用等知识点, 设三角形的三个角的度数是 $x^\circ, 2x^\circ, 3x^\circ$, 根据 $x + 2x + 3x = 180$, 求出三角形三个角的度数, 根据含 30° 角的直角三角形性质求出 $AB = 2BC$, 根据勾股定理求出 $AC = \sqrt{3}BC$, 代入求出即可, 熟练掌握勾股定理, 含 30° 角的直角三角形的性质是解决此题的关键.

【详解】 解: 设三角形的三个角的度数是 $x^\circ, 2x^\circ, 3x^\circ$,

$$\therefore x + 2x + 3x = 180,$$

$$\therefore x = 30, 2x = 60, 3x = 90,$$

如图,



$$\therefore \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore AB = 2BC,$$

由勾股定理得: $AC = \sqrt{3}BC,$

$$\therefore BC : AC : AB = 1 : \sqrt{3} : 2,$$

故选: B.

6. 下列命题中, 正确命题的个数有 ()

①点 P 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点, 点 M 、 N 分别在边 OA 、 OB 上, 则 $PM = PN$;

②在 $\triangle ABC$ 中, CD 是边 AB 的中线, 且 $CD = \frac{1}{2}AB$, 则 $\triangle ABC$ 是直角三角形;

③在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A = 30^\circ$, 则 $BC = \frac{1}{2}AC$;

④已知点 C 是线段 AB 上的一点, 点 D 是线段 AB 外的一点, 且 $DA = DB$, 则直线 CD 是线段 AB 的垂直

平分线.

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据直角三角形的判定、角平分线的性质、含 30° 角的直角三角形的性质、线段垂直平分线的判定即可作出判断.

【详解】 解: ①点 P 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点, 点 M 、 N 分别在边 OA 、 OB 上, 且 $PM \perp OA, PN \perp OB$, 则 $PM = PN$, 故原命题错误;

②在 $\triangle ABC$ 中, CD 是边 AB 的中线, 且 $CD = \frac{1}{2}AB$,

$\therefore AD = CD = BD$,

$\therefore \angle A = \angle ACD, \angle B = \angle BCD$,

$\therefore \angle A + \angle ACD + \angle B + \angle BCD = 180^\circ$,

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

故原命题正确;

③在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, 则 $BC = \frac{1}{2}AC$, 故原命题错误;

④已知点 C 是线段 AB 上的中点, 点 D 是线段 AB 外的一点, 且 $DA = DB$, 则直线 CD 是线段 AB 的垂直平分线, 故原命题错误.

故选: B.

【点睛】 本题主要考查命题的真假判断, 正确的命题叫真命题, 错误的命题叫做假命题. 判断命题真假的关键是要熟悉课本中的定理.

二. 填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 直线 $y = \frac{2x-1}{3}$ 在 y 轴上的截距是_____

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数图象上点的坐标特征以及一次函数的性质, 代入 $x = 0$ 求出与之对应的 y 值, 即可得解, 熟练掌握截距的定义是解决此题的关键.

【详解】解：当 $x = 0$ 时， $y = \frac{2x-1}{3} = -\frac{1}{3}$ ，

$\therefore$ 直线 $y = \frac{2x-1}{3}$ 的截距为 $-\frac{1}{3}$ ，

故答案为： $-\frac{1}{3}$ 。

8. 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 均在反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象上，当 $0 < x_1 < x_2$ 时， y_1 _____ y_2 。

【答案】 $<$

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数图象上点的坐标特点，先根据反比例函数的性质判断出函数图象所在的象限，再根据反比例函数的性质即可作出判断，熟知反比例函数图象的增减性是解答此题的关键。

【详解】解： $\because$ 反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 中 $k = -1 < 0$ ，

$\therefore$ 此函数图象在二、四象限且 y 随 x 的增大而增大，

$\because 0 < x_1 < x_2$ ，

$\therefore$ 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 均在第四象限，

$\therefore y_1 < y_2 < 0$ ，

故答案为： $<$ 。

9. 已知 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ，那么 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f(-1) =$ _____。

【答案】 $-\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求函数值，分别用 $\frac{1}{2}$ ， -1 代替函数解析式中的 x ，进行计算即可得解，熟练掌握函数值的计算是解决此题的关键。

【详解】 $\because f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = -4$ ， $f(-1) = \frac{2 \times (-1) + 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) + f(-1) = -4 + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$ ，

故答案为： $-\frac{7}{2}$ 。

10. 已知 y 与 x 成反比例， z 与 y 成正比，如果当 $x = 1$ 时， $z = 2$ ，那么当 $x = 3$ 时， $z =$ _____。

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数的定义，正比例函数的定义，反比例函数 $y = \frac{k_1}{x} (k_1 \neq 0)$ ，正比例函数 $z = k_2 y (k_2 \neq 0)$ ，将所给数据代入求出系数再代入 x 的值即可，用待定系数法求函数表达式求出 z 与 x 的函数关系是解题关键.

【详解】 解： $\because y$ 与 x 成反比例，即设 $y = \frac{k_1}{x} (k_1 \neq 0)$ ， z 与 y 成正比例，即设 $z = k_2 y (k_2 \neq 0)$ ，

$\therefore z = \frac{k_1 k_2}{x}$ ，即 z 与 x 成反比例关系，

$\therefore$ 把 $x=1, z=2$ 代入 $z = \frac{k_1 k_2}{x}$ 得 $k_1 k_2 = 2$ ，

$\therefore z$ 与 x 成反比例关系式为 $z = \frac{2}{x}$ ，

$\therefore$ 当 $x=3$ 时， $z = \frac{2}{3}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$

11. 经过已知线段 AB 的两个端点的圆的圆心轨迹是_____.

【答案】 线段 AB 的垂直平分线

【解析】

【分析】 本题考查了线段垂直平分线的判定定理；由题意知，圆心到线段 AB 的两个端点的距离相等，由线段垂直平分线的判定定理即可求解.

【详解】 解：由题意知，圆心到线段 AB 的两个端点的距离相等，

表明圆心在线段 AB 的垂直平分线上；

故答案为： 线段 AB 的垂直平分线.

12. 已知直线 $y = (m + 2n)x$ 与双曲线 $y = \frac{3n-m}{x}$ 相交于点 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ ，那么它们的另一个交点为_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

【解析】

【分析】 主要考查了一次函数与反比例函数的交点问题，解决本题的关键是熟练掌握一次函数与反比例函数的交点. 先把点 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ 分别代入两函数关系式，列出方程组，求出 n 、 m 的值，代入函数解析式，再

解关于两函数组成的方程组即可.

【详解】解: 把点 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ 分别代入两函数关系式得,

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(m+2n)=2 \\ 3n-m=-\frac{1}{2}\times 2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} m=-2 \\ n=-1 \end{cases},$$

故一次函数为 $y=-4x$ ①,

反比例函数为 $y=-\frac{1}{x}$ ②,

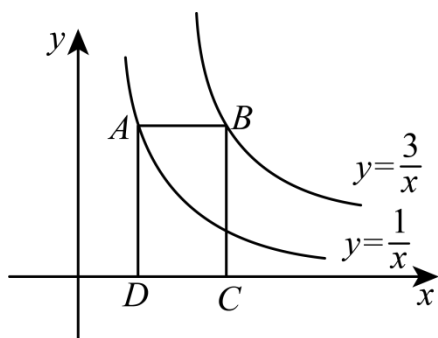
$$\text{①②联立解得} \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases}, \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=2 \end{cases},$$

经检验符合解析式,

故该直线与双曲线的另一个交点为 $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

故答案为: $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

13. 如图, 点A在双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上, 点B在双曲线 $y=\frac{3}{x}$ 上, 且 $AB \parallel x$ 轴, 过点A、B分别向x轴作垂线, 垂足分别为点D、C, 那么四边形ABCD的面积是_____.

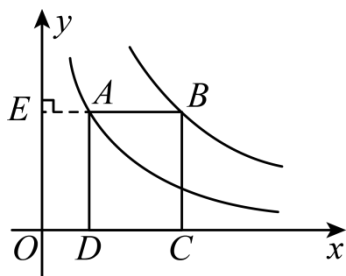


【答案】2

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数关系 k 的几何意义, 根据反比例函数系数 k 的几何意义得出矩形EODA的面积为1, 矩形BCOE的面积是3, 则矩形ABCD的面积为 $3-1=2$.

【详解】解: 过点A作 $AE \perp y$ 轴于点E, $AB \parallel x$ 轴,



则点 E 、 A 、 B 在同一直线上，

$\therefore$ 点 A 在双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 上，点 B 在双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上，

$\therefore$ 矩形 $EODA$ 的面积为 1，矩形 $BCOE$ 的面积是 3，

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积为 $3 - 1 = 2$ ，

故答案为：2.

14. 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 与一次函数 $y = x + 4$ 的图像交于 A 、 B 两点的横坐标分别是 -3 、 -1 ，则关于

x 的不等式 $\frac{k}{x} > x + 4 (x < 0)$ 的解集 x 的范围是_____.

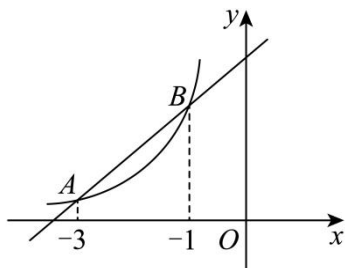
【答案】 $x < -3$ 或 $-1 < x < 0$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数与一次函数的交点问题，求关于 x 的不等式 $\frac{k}{x} > x + 4 (x < 0)$ 的解集可

转化为一次函数的图象在反比例函数图象的下方所对应的自变量 x 取值范围问题，即可得解，熟练掌握反比例函数与一次函数的性质是解决此题的关键.

【详解】 解：由题意画图如下，



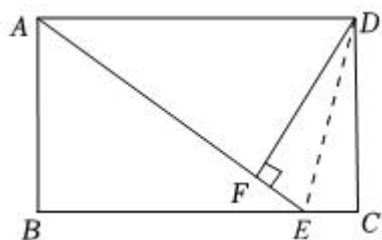
观察图象可知，当 $x < -3$ 或 $-1 < x < 0$ 时，一次函数的图象在反比例函数图象的下方，

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $\frac{k}{x} > x + 4 (x < 0)$ 的解集为： $x < -3$ 或 $-1 < x < 0$ ，

故答案为： $x < -3$ 或 $-1 < x < 0$.

15. 如图，长方形 $ABCD$ 中， $BC=5$ ， $AB=3$ ，点 E 在边 BC 上，将 $\triangle DCE$ 沿着 DE 翻折后，点 C 落在线段 AE

上的点 F 处, 那么 CE 的长度是_____.



【答案】 1

【解析】

【分析】 由对折先证明 $DE = DC = 3$, $\angle DFE = 90^\circ$, $\angle DEF = \angle DEC$, $CE = EF$, 再利用勾股定理求解 AF , 再证明 $AE = AD = 5$, 从而求解 EF , 于是可得答案.

【详解】 解: $\because$ 长方形 $ABCD$ 中, $BC=5$, $AB=3$,
 $\therefore AD = BC = 5, CD = AB = 3, \angle C = 90^\circ, AD \parallel BC$,
 由折叠可得: $DE = DC = 3, \angle DFE = 90^\circ, \angle DEF = \angle DEC, CE = EF$,
 $\therefore \angle AFD = 90^\circ, AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = 4$,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle ADE = \angle CED$,
 $\therefore \angle ADE = \angle AED$,
 $\therefore AE = AD = 5$,
 $\therefore EF = AE - AF = 1$,
 $\therefore CE = 1$.

故答案为: 1

【点睛】 本题考查的是长方形的性质, 勾股定理的应用, 轴对称的性质, 求解 $AF = 4, AE = AD = 5$ 是解本题的关键.

16. 在平面直角坐标系中, 点 $A(-2, 1)$, $B(3, 2)$, $C(-6, m)$ 分别在三个不同的象限. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过其中两点, 则 m 的值为_____.

【答案】 -1.

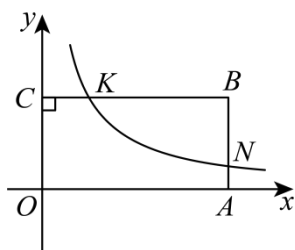
【解析】

【分析】根据已知条件得到点 $A(-2,1)$ 在第二象限，求得点 $C(-6,m)$ 一定在第三象限，由于反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过其中两点，于是得到反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过 $B(3,2)$ ， $C(-6,m)$ ，于是得到结论.

【详解】解：∵点 $A(-2,1)$ ， $B(3,2)$ ， $C(-6,m)$ 分别在三个不同的象限，点 $A(-2,1)$ 在第二象限，
 ∴点 $C(-6,m)$ 一定在第三象限，
 ∵ $B(3,2)$ 在第一象限，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过其中两点，
 ∴反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过 $B(3,2)$ ， $C(-6,m)$ ，
 ∴ $3 \times 2 = -6m$ ，
 ∴ $m = -1$ ，
 故答案为：-1.

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，正确的理解题意是解题的关键.

17. 如图，矩形 $OABC$ 的顶点 $B(m,2)$ 在正比例函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图像上，点 A 在 x 轴上，点 C 在 y 轴上，反比例函数的图像与 BC 边相交于点 K ，与 AB 边交于 N ，且 $BK = 3CK$ ，则点 N 的坐标是_____.



【答案】 $\left(4, \frac{1}{2}\right)$

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数的综合应用问题，本题需先根据题意求出 m 的值，再求出点 B 的坐标，再根据 $BK = 3CK$ ，得出点 K 的坐标，即可求出反比例函数的解析式，然后设 N 点的坐标为 $(4,y)$ ，代入反比例函数的解析式即可求出点 N 的坐标，熟练掌握反比例函数的性质求出反比例函数的解析式和点 N 的坐标是解决此题的关键.

【详解】解：∵ $B(m,2)$ 在正比例函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象上，
 ∴ $m = 4, B(4,2)$ ，
 ∴ $CB = 4$ ，

$$\therefore BK = 3CK,$$

$$\therefore CK = 1,$$

$$\therefore K(1, 2),$$

设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

$\therefore K、N$ 在反比例函数的图象上,

$$\therefore k = 2, \text{ 即反比例函数的解析式为 } y = \frac{2}{x},$$

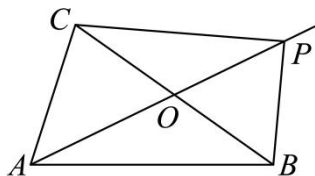
设 N 点的坐标为 $(4, y)$,

$$\therefore y = \frac{1}{2}$$

$$\therefore N \text{ 点的坐标为 } \left(4, \frac{1}{2}\right),$$

故答案为: $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

18. 如图, 在锐角 ABC 中, $AB = BC = 6$, 点 O 为 BC 上一动点 (点 O 与点 B, C 不重合), 点 P 是射线 AO 上的一个动点, 连接 PC, PB , 若 $\angle AOC = 60^\circ$, 点 O 为 BC 的中点, 且 $\triangle BCP$ 为直角三角形时, 则 $CP = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{7}$ 或 3

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形的性质、勾股定理、等边三角形的判定与性质, 掌握以上知识点, 正确分类三种情况讨论是解题的关键. 由题意得, $\triangle BCP$ 为直角三角形, 分三种情况: ①若点 P 在 BC 右侧, 且 $\angle BPC = 90^\circ$; ②若点 P 在 BC 右侧, 且 $\angle CBP = 90^\circ$; ③若点 P 在 BC 左侧, 且 $\angle BPC = 90^\circ$, 根据直角三角形、等边三角形的性质及勾股定理, 对每一种情况分别求解即可.

【详解】 解: ①如图 1, 若点 P 在 BC 右侧, 且 $\angle BPC = 90^\circ$,

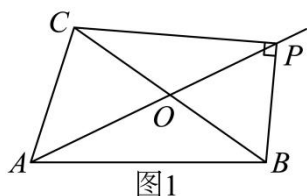


图1

∵ 点 O 为 BC 的中点,

$$\therefore PO = BO = \frac{1}{2}BC = 3,$$

∵ $\angle AOC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BOP = 60^\circ,$$

∴ $\triangle BOP$ 是等边三角形,

$$\therefore BP = BO = 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCP$ 中, $CP = \sqrt{BC^2 - BP^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$;

② 如图 2, 若点 P 在 BC 右侧, 且 $\angle CBP = 90^\circ$,

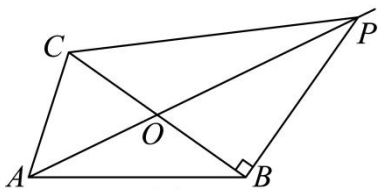


图2

∵ 点 O 为 BC 的中点,

$$\therefore BO = \frac{1}{2}BC = 3,$$

∵ $\angle AOC = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BOP = 60^\circ,$$

又 ∵ $\angle CBP = 90^\circ$,

$$\therefore \angle OPB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore OP = 2BO = 6,$$

在 $\text{Rt}\triangle OBP$ 中, $BP = \sqrt{OP^2 - BO^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle BCP$ 中, $CP = \sqrt{BP^2 + BC^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 6^2} = 3\sqrt{7}$;

③ 如图 3, 若点 P 在 BC 左侧, 且 $\angle BPC = 90^\circ$,

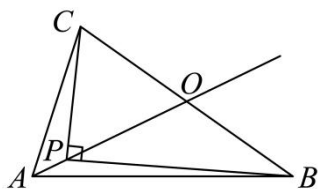


图3

∵ 点 O 为 BC 的中点,

$$\therefore PO = CO = \frac{1}{2}BC = 3,$$

∵ $\angle AOC = 60^\circ$,

∴ $\triangle COP$ 是等边三角形,

$$\therefore CP = CO = 3;$$

∴ 综上所述, CP 的长为 $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{7}$ 或 3.

故答案为: $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{7}$ 或 3.

三. 计算题 (本大题共 2 题, 每题 6 分, 满分 12 分)

19. (1) 解方程: $\frac{x(x-4)}{2} = x+8$

(2) 用配方法解方程: $3x^2 - 6x + 1 = 0$.

【答案】 (1) $x_1 = 8, x_2 = -2$ (2) $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 熟练掌握配方法的方法步骤是解决此题的关键.

(1) 去分母, 去括号, 因式分解解方程, 即可得解;

(2) 移项, 系数化为 1, 配方, 开方, 即可得解.

【详解】 解: (1) ∵ $\frac{x(x-4)}{2} = x+8$,

$$\therefore x(x-4) = 2(x+8),$$

$$\therefore x^2 - 4x = 2x + 16,$$

$$\therefore x^2 - 6x - 16 = 0,$$

$$\therefore (x-8)(x+2) = 0,$$

$$\therefore x-8=0 \text{ 或 } x+2=0,$$

解得, $x_1 = 8, x_2 = -2$;

$$(2) \because 3x^2 - 6x + 1 = 0,$$

$$\therefore 3x^2 - 6x = -1,$$

$$\therefore x^2 - 2x = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = -\frac{1}{3} + 1,$$

$$\therefore (x-1)^2 = \frac{2}{3},$$

$$\therefore x-1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\therefore x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

四. 解答题 (20-21 每题 6 分, 22-24 每题 8 分, 25 题 10 分, 满分 46 分)

20. 已知 $y = y_1 + y_2$, y_1 与 x 成正比例, y_2 与 x 成反比例, 且当 $x = -1$ 时, $y = -4$; 当 $x = 3$ 时, $y = 4$.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 当 $x = -2$ 时, 求 y 的值.

【答案】(1) $y = x + \frac{3}{x}$

(2) $-\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据正比例函数和反比例函数的定义设 $y_1 = mx, y_2 = \frac{n}{x}$, 则 $y = mx + \frac{n}{x}$, 再把两组对应值代入得到关于 m, n 的方程组, 然后解方程组求出 m, n 即可.

(2) 把 $x = -2$ 代入 (1) 中求得的解析式即可求得.

【小问 1 详解】

解: (1) 设 $y_1 = mx, y_2 = \frac{n}{x}$,

则 $y = mx + \frac{n}{x}$,

根据题意得
$$\begin{cases} -m - n = -4 \\ 3m + \frac{n}{3} = 4 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} m=1 \\ n=3 \end{cases}$.

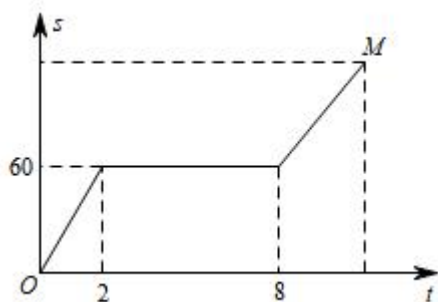
所以 y 与 x 的函数表达式为 $y = x + \frac{3}{x}$.

【小问 2 详解】

把 $x = -2$ 代入得, $y = -2 + \frac{3}{-2} = -\frac{7}{2}$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求正比例函数和反比例函数的解析式, 函数图象上点的坐标特征, 图象上点的坐标适合解析式是解题的关键.

21. 一艘轮船在长江航线上往返于甲、乙两地. 若轮船在静水中的速度不变, 轮船先从甲地顺水航行到乙地, 停留一段时间后, 又从乙地逆水航行返回到甲地. 设轮船从甲地出发后所用的时间为 t (小时), 航行的路程为 s (千米), s 与 t 的函数图像如图所示.



- (1) 甲乙两地相距 ____ 千米;
- (2) 轮船顺水航行时航行的路程 s 关于所用时间 t 的函数关系式为 ____, 定义域是 ____;
- (3) 如果轮船从乙地逆水航行返回到甲地时的速度为 20 千米/小时, 那么点 M 的坐标是 ____.

【答案】 (1) 60 (2) $s = 30t$, $0 < t \leq 2$

(3) (11,120)

【解析】

【分析】 (1) 根据函数图象可知, 从甲地到乙地, 轮船行驶了 2 小时, 行驶路程为 60 千米, 由此即可得;

(2) 先判断出轮船顺水航行段对应的是图象中 $0 < t \leq 2$ 部分, 再设此时 s 关于 t 的函数关系式为 $s = at$, 利用待定系数法即可得;

(3) 根据图象可得返回时, 行驶到点 M 处所用时间, 从而可得从乙地行驶到点 M 的路程, 由此即可得.

【小问 1 详解】

解: 由函数图象可知, 从甲地到乙地, 轮船行驶了 2 小时, 行驶路程为 60 千米,

故答案为: 60;

【小问 2 详解】

解：由题意得：轮船顺水航行段对应的是图象中 $0 < t \leq 2$ 部分，

设此时 s 关于 t 的函数关系式为 $s = at$ ，

将点 $(2, 60)$ 代入得： $2a = 60$ ，解得 $a = 30$ ，

则 s 关于 t 的函数关系式为 $s = 30t$ ，定义域为 $0 < t \leq 2$ ，

故答案为： $s = 30t$ ， $0 < t \leq 2$ ；

【小问 3 详解】

解：由图象可知，返回时，行驶到点 M 处所用时间为 $11 - 8 = 3$ （小时），

则从乙地到点 M 的路程为 $20 \times 3 = 60$ （千米），

所以点 M 的纵坐标为 $60 + 60 = 120$ ，

所以点 M 的坐标为 $(11, 120)$ ，

故答案为： $(11, 120)$ 。

【点睛】 本题考查了利用待定系数法求正比例函数的解析式、从函数图象获取信息，读懂函数图象是解题关键。

22. 如图 (1) 长方形 $OABC$ 的顶点 A, C 分别在 x, y 轴的正半轴上，点 D 为对角线 OB 的中点。点 $E(4, n)$ 在边 AB 上，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在第一象限内的图象经过点 D, E ，且 $OA = 2AB$ 。

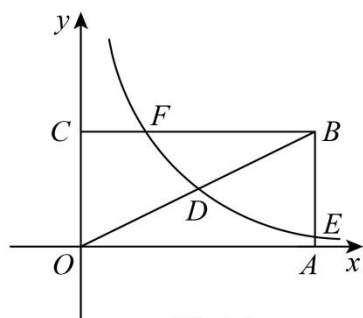


图 (1)

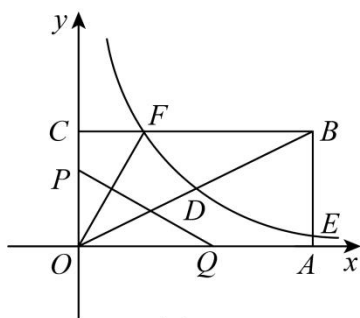


图 (2)

(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 如图 (2)，若反比例函数的图象与长方形的边 BC 交于点 F ，连结 OF ，作 OF 的垂直平分线交 OC 于点 P ， OA 于点 Q ，求线段 OP 的长。

【答案】 (1) $y = \frac{2}{x}$

(2) $OP = \frac{5}{4}$

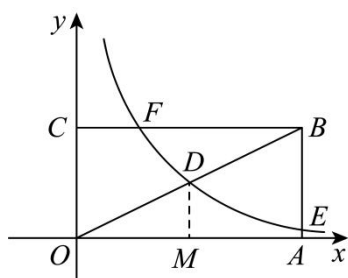
【解析】

【分析】(1) 作出 OA 的中点 M , 连接 DM , 由点 $E(4, n)$ 得 $OA = 4$, 再求得 $AB = 2$, 由点 D 为对角线 OB 的中点. $OM = AM$, 可得 $OM = \frac{1}{2}OA = 2, DM = \frac{1}{2}AB = 1, DM \parallel AB$, 得出 $D(2, 1)$, 把 $D(2, 1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 中, 得 $1 = \frac{k}{2}$, 即 $k = 2$, 得出答案;

(2) 连接 PF , 确定出 F 坐标, 进而求出 CF 的长, 在三角形 CFP 中, 设 $OP = FP = x$, 得到 $CP = 2 - x$, 利用勾股定理求出 x 的值, 即为 OP 的长.

【小问 1 详解】

解: 作出 OA 的中点 M , 连接 DM ,



$\because$ 点 $E(4, n)$,

$\therefore OA = 4$,

$\because OA = 2AB$,

$\therefore AB = 2$,

$\because$ 点 D 为对角线 OB 的中点. $OM = AM$,

$OM = \frac{1}{2}OA = 2, DM = \frac{1}{2}AB = 1, DM \parallel AB$,

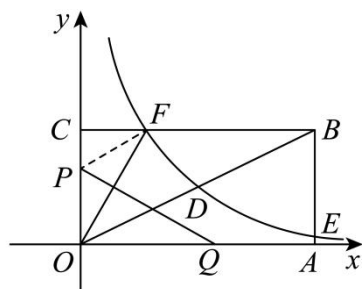
$\therefore D(2, 1)$,

把 $D(2, 1)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 中, 得 $1 = \frac{k}{2}$, 即 $k = 2$,

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y = \frac{2}{x}$;

【小问 2 详解】

解: 如图, 连接 PF ,



由 (1) 得 $B(4,2)$,

将把 $y=2$ 代入反比例解析式得: $2 = \frac{2}{x}$, 得 $x=1$,

$\therefore F(1,2)$, 得到 $CF=1$,

$\because OF$ 的垂直平分线交 OC 于点 P , OA 于点 Q ,

$\therefore OP=FP$,

设 $OP=FP=x$, 得到 $CP=2-x$,

在 $\text{Rt}\triangle CPF$ 中, 由勾股定理得: $FP^2 = CP^2 + CF^2$, 即 $x^2 = (2-x)^2 + 1$,

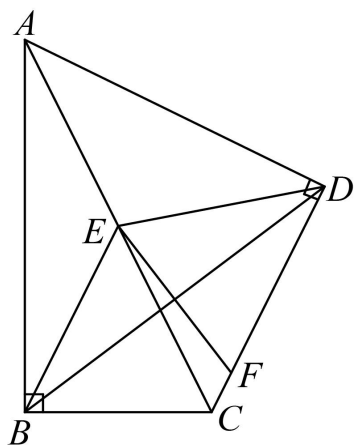
整理得: $4x=5$,

解得: $x = \frac{5}{4}$,

则 $OP = \frac{5}{4}$.

【点睛】此题属于反比例综合题, 涉及的知识有: 三角形中位线的性质, 勾股定理, 待定系数法确定反比例解析式, 以及线段垂直平分线的性质, 熟练掌握待定系数法是解本题的关键.

23. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$, 点 E 是 AC 的中点, 连接 BE , 过点 C 作 $CD \parallel BE$, 且 $\angle ADC=90^\circ$, 在 DC 取点 F , 使 $DF=BE$, 分别连接 BD 、 EF .



(1) 求证: $DE=BE$;

(2) 求证: EF 垂直平分 BD .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查直角三角形斜边中线的性质, 等腰三角形的判定和性质, 等腰三角形三线合一:

(1) 根据直角三角形斜边中线的性质求出 $BE = \frac{1}{2}AC$, $DE = \frac{1}{2}AC$, 可证 $DE = BE$;

(2) 证出 $DE = DF$, 得出 $\angle DEF = \angle DFE$, 证出 $\angle BEF = \angle DEF$, 根据等腰三角形三线合一即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ABC = 90^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$, 点 E 是 AC 的中点,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AC, \quad DE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore DE = BE;$$

【小问 2 详解】

证明: $\because CD \parallel BE$,

$$\therefore \angle BEF = \angle DFE,$$

$$\because DF = BE, \quad DE = BE,$$

$$\therefore DF = DE,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle DFE,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle BEF,$$

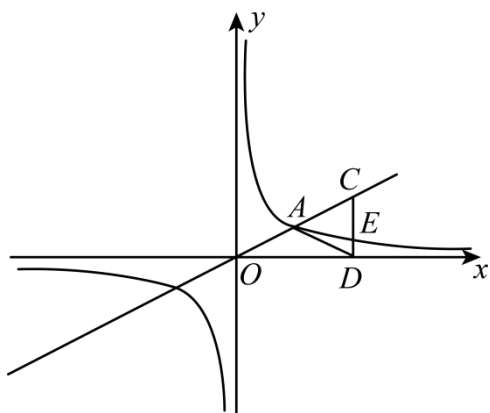
$\therefore EF$ 是 $\angle BED$ 的角平分线,

$$\text{又} \because DE = BE,$$

$$\therefore EF \perp BD, \quad EF \text{ 平分 } BD,$$

$$\therefore EF \text{ 垂直平分 } BD.$$

24. 如图, 在平面直角坐标系中, 正比例函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像都经过点 $A(2, m)$.



(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 若直线 $y = \frac{1}{2}x$ 经过第一象限上的点 C , $CD \perp x$ 轴, 垂足为点 D , 交反比例函数图像于点 E , 且

$S_{\triangle ACE} = 2S_{\triangle ADE}$ ，求 C 点的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{2}{x}$

(2) $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

【解析】

【分析】此题是反比例函数与一次函数的交点问题，主要考查了待定系数法，一次函数图象上点的坐标特征，三角形的面积，解本题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

(1) 把 A 的坐标为 $(2, m)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$ ，求得 m ，然后根据待定系数法即可求得反比例函数的解析式；

(2) 根据题意设 $C(t, \frac{1}{2}t)$ ，由 $S_{\triangle ACE} = 2S_{\triangle ADE}$ ，可得 $DE = \frac{1}{3}CD$ ，现由 $CD \perp x$ 轴，可得

$CD = \frac{1}{2}t, DE = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{6}t$ ，可得 $E(t, \frac{1}{6}t)$ ，再由点 E 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上，可得 $\frac{1}{6}t = \frac{2}{t}$ ，求得

$t = 2\sqrt{3}$ ，即可得到 C 的坐标.

【小问 1 详解】

解：∵ 点 A 在函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象上，点 A 的坐标为 $(2, m)$ ，

$$\therefore m = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

∴ 点 A 坐标为 $(2, 1)$.

∵ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象上，

$$\therefore 1 = \frac{k}{2}, \text{ 解得 } k = 2.$$

∴ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{2}{x}$;

【小问 2 详解】

解：由题意可设 $C(t, \frac{1}{2}t)$ ，

$$\because S_{\triangle ACE} = 2S_{\triangle ADE},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{3}CD,$$

∵ $CD \perp x$ 轴，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}t, DE = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{6}t,$$

$$\therefore E\left(t, \frac{1}{6}t\right),$$

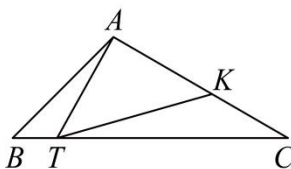
$\because$ 点 E 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上,

$$\therefore \frac{1}{6}t = \frac{2}{t},$$

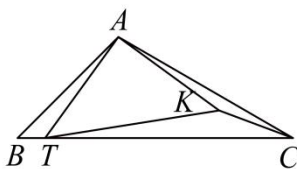
$$\therefore t = 2\sqrt{3} \text{ (负值舍去)},$$

$$\therefore C(2\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

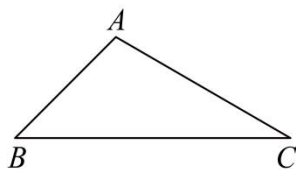
25. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle B = 45^\circ, \angle C = 30^\circ, AC = 8$, 点 T 是射线 CB 上一动点, 联结 AT , 在 AT 右侧作等腰直角 $\triangle ATK$, 即 $AT = AK, \angle TAK = 90^\circ$.



图(a)



图(b)



备用图

- (1) 如图 (a), 当点 K 落在线段 AC 上时, 求线段 BT 的长度;
- (2) 如图 (b), 当点 T 在线段 BC 上且点 K 在 $\triangle ABC$ 内部 (不包括边界) 时, 联结 CK , 设 $BT = x$, $\triangle AKC$ 面积为 y , 即 $S_{\triangle AKC} = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式及定义域;
- (3) 若点 K 落在 $\triangle ABC$ 某一边垂直平分线上时, 具体求出线段 BT 的长度.

【答案】 (1) $BT = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{3}$;

(2) $y = -2\sqrt{3}x + 8\sqrt{3} - 8, 0 < x < 4 - \frac{4}{3}\sqrt{3}$,

(3) $BT = 4\sqrt{3} - 4$ 或 $BT = 4$.

【解析】

【分析】 (1) 如图, 过 A 作 $AE \perp BC$ 交 BC 于点 E , 先求出三角形的另两边长, 根据勾股定理得到 $CT = \frac{16}{3}\sqrt{3}$, 进而即可解;

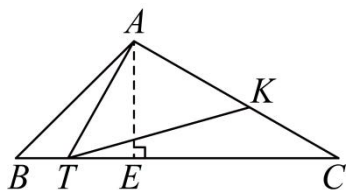
(2) 如图, 过 K 作 $KH \perp BC$ 交 BC 于点 H , 过 T 作 $TG \perp AB$ 交 AB 于点 G , 先证 $\triangle ATG \sim \triangle THK$, 得出 $\frac{AT}{TK} = \frac{TG}{KH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 进而可得出 AT, TG, KH 与 x 的关系, 用三角形面积的和差即可表示出 $\triangle AKC$ 面积,

最后利用 K 在 $\triangle ABC$ 内部 (不包括边界) 的条件即可得出定义域;

(3) 点 K 落在 ABC 某一边垂直平分线上时, 分三种情况讨论即可得解.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过 A 作 $AE \perp BC$ 交 BC 于点 E ,



$$\because \angle B = 45^\circ, \angle C = 30^\circ, AC = 8,$$

$$\therefore AE = BE = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$\therefore \text{根据勾股定理得, } AB = 4\sqrt{2}, CE = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 4 + 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle CAT \text{ 中, } \angle C = 30^\circ, AC = 8, \angle TAK = 90^\circ,$$

$$\therefore AT = \frac{1}{2}TC,$$

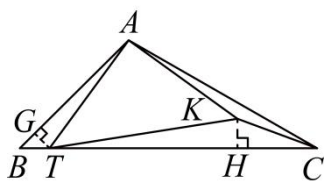
$$\therefore \text{根据勾股定理得, } CT^2 - \left(\frac{1}{2}CT\right)^2 = 8^2,$$

$$\therefore CT = \frac{16}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore BT = 4 + 4\sqrt{3} - \frac{16}{3}\sqrt{3} = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

解: 如图, 过 K 作 $KH \perp BC$ 交 BC 于点 H , 过 T 作 $TG \perp AB$ 交 AB 于点 G ,



$$\because AT = AK, \angle TAK = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ATK = \angle AKT = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{根据勾股定理得, } TK = \sqrt{2}AT,$$

$$\because \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAT + \angle BTA = \angle KTH + \angle BTA = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle BAT = \angle KTH,$$

$$\because \angle AGT = \angle KHT = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ATG \sim \triangle THK,$$

$$\therefore \frac{AT}{TK} = \frac{TG}{KH} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\because \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{根据勾股定理得, } BT = \sqrt{2}GT = x,$$

$$\therefore KH = x, \quad GT = BG = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore AG = AB - BG = 4\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore \text{根据勾股定理得, } AT^2 = x^2 - 8x + 32,$$

$$\therefore S_{\triangle AKC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABT} - S_{\triangle CKT}$$

$$= \frac{1}{2}(4 + 4\sqrt{3}) \times 4 - \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2} \times (4 + 4\sqrt{3} - x) \times x - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 32)$$

$$= -2\sqrt{3}x + 8\sqrt{3} - 8,$$

$$\therefore y = -2\sqrt{3}x + 8\sqrt{3} - 8,$$

$$\text{由 (1) 知, 当点 } K \text{ 落在线段 } AC \text{ 上时, } BT = x = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

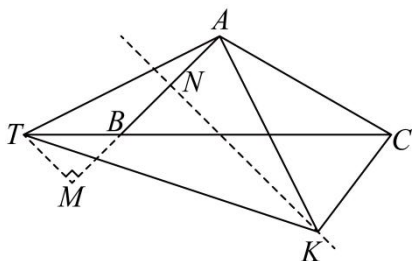
$$\text{当点 } K \text{ 落在线段 } BC \text{ 上时, } BT = x = 0,$$

$$\therefore \text{函数的定义域为 } 0 < x < 4 - \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

【小问 3 详解】

解: 点 K 落在 ABC 某一边垂直平分线上时, 可分三种情况,

①如图, 当点 K 落在 AB 边垂直平分线上时, 过点 T 作 $TM \perp AB$ 交 AB 的延长线于 M 点, 设 AB 的垂直平分线交 AB 于点 N ,



$$\therefore AN = BN = 2\sqrt{2}, \quad \angle TAM + \angle MAK = \angle MAK + \angle AKN = 90^\circ, \quad \angle AMT = \angle ANT = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle TAM = \angle AKN,$$

$$\therefore AT = AK,$$

$$\therefore \triangle ATM \cong \triangle KAN (AAS),$$

$$\therefore AN = TM = 2\sqrt{2},$$

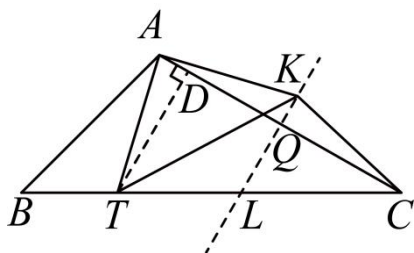
$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle TBM = \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore BM = MT = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BT = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4,$$

②如图, 当点 K 落在 AC 边垂直平分线上时, 过点 T 作 $TD \perp AC$ 交 AC 于 M 点, 设 AC 的垂直平分线交 AC 于点 Q ,



$$\therefore AQ = CQ = 4,$$

由①可证得 $\triangle ATD \cong \triangle KAQ (AAS)$,

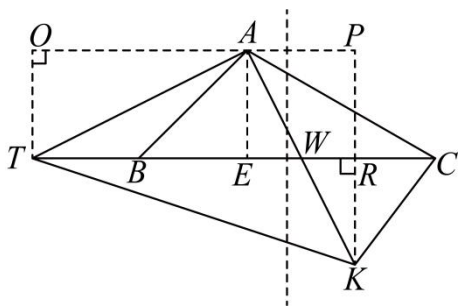
$$\therefore TD = AQ = 4,$$

在 $Rt\triangle CDT$ 中, $\angle ACB = 30^\circ$,

$$\therefore CT = 8,$$

$$\therefore BT = 4\sqrt{3} + 4 - 8 = 4\sqrt{3} - 4,$$

③如图, 当点 K 落在 BC 边垂直平分线上时, 过 A 作 BC 的平行线, 与过点 K 作 $KR \perp BC$ 交 BC 于 R 点的直线交于点 P , 过点 T 作 $TO \perp AP$ 交 PA 的延长线于 O 点,



$\therefore KP \parallel AE$,

$\therefore K$ 在直线 KP 上运动,

由①可证得 $\triangle ATO \cong \triangle KAP$ (AAS),

$\therefore TO = AP = ER = 4$,

$\therefore RC = BC - ER - EA = 4\sqrt{3} - 4 < \frac{1}{2}(4 + 4\sqrt{3})$,

$\therefore R$ 不是 BC 边的中点,

$\therefore \angle B = 45^\circ, \angle C = 30^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 为不等腰三角形,

$\therefore K$ 不可能落在 BC 边的垂直平分线上,

综上所述: $BT = 4\sqrt{3} - 4$ 或 $BT = 4$.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 等腰直角三角形的性质, 垂直平分线的性质, 一次函数的解析式等知识点, 熟练掌握其性质, 准确作出辅助线是解决此题的关键.