

存志学校 2024 学年第一学期初二数学阶段测试卷

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 在下列方程中, 整理后是一元二次方程的是 ()

A. $3x^2 = (x-2)(3x+1)$

B. $(x-2)(x+2)+4=0$

C. $x(x^2-1)=0$

D. $\frac{1}{x^2} + x + 3 = 1$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题根据一元二次方程的定义解答.

【详解】 A.整理得: $5x+2=0$, 不是一元二次方程;

B. 整理得: $x^2=0$, 是一元二次方程;

C. 整理得: $x^3-x=0$, 不是一元二次方程;

D. $\frac{1}{x^2} + x + 3 = 1$, 是分式方程.

故选 B.

【点睛】 一元二次方程必须满足四个条件:

(1) 未知数的最高次数是 2;

(2) 二次项系数不为 0;

(3) 是整式方程;

(4) 含有一个未知数. 由这四个条件对四个选项进行验证, 满足这四个条件者为正确答案.

2. 在下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{0.2a}$

B. $\sqrt{\frac{x}{3}}$

C. $\sqrt{a^2+a^4}$

D. $\sqrt{a^2-b^2}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了最简二次根式的定义, 化简二次根式, 满足被开方数不含有分母, 或被开方数不含有开得尽方的因数或因式的二次根式叫做最简二次根式, 据此求解即可.

【详解】解：A、 $\sqrt{0.2a} = \frac{\sqrt{5a}}{5}$ ，被开方数含有分母，不是最简二次根式，不符合题意；

B、 $\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{3x}}{3}$ ，被开方数含有分母，不是最简二次根式，不符合题意；

C、 $\sqrt{a^2 + a^4} = |a|\sqrt{1 + a^2}$ ，被开方数含有开得尽的因式，不是最简二次根式，不符合题意；

D、 $\sqrt{a^2 - b^2}$ 是最简二次根式，符合题意；

故选：D.

3. 已知 $a > 0$, $b > 0$ ，下列二次根式中，与 $\sqrt{ab}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{\frac{2}{ab}}$

B. $\sqrt{\frac{a^2b^2}{4}}$

C. $\sqrt{\frac{b}{a}}$

D. $\sqrt{a^2b^3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式的定义，化简二次根式，先化简四个选项中的二次根式，再根据被开方数相同的两个最简二次根式叫做同类二次根式进行求解即可.

【详解】解：A、 $\sqrt{\frac{2}{ab}} = \frac{\sqrt{2ab}}{ab}$ 与 $\sqrt{ab}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

B、 $\sqrt{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{ab}{2}$ 与 $\sqrt{ab}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

C、 $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a}$ 是同类二次根式，符合题意；

D、 $\sqrt{a^2b^3} = ab\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{ab}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

故选：C.

4. 化简二次根式 $a\sqrt{-\frac{a+1}{a^2}}$ ，结果是 ()

A. $\sqrt{a+1}$

B. $-\sqrt{a-1}$

C. $-\sqrt{-a-1}$

D. $-\sqrt{-a+1}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查二次根式的性质与化简，由二次根式的性质可得： $-(a+1) \geq 0$ ，从而有 $a+1 \leq 0$ ，即 $a \leq -1$ ，再化简得出结果.

【详解】解： $\because -\frac{a+1}{a^2} \geq 0, a^2 > 0,$

$\therefore -(a+1) \geq 0,$ 得 $a \leq -1,$

$$\begin{aligned} &\therefore a\sqrt{-\frac{a+1}{a^2}} \\ &= a \times \frac{\sqrt{-a-1}}{-a} \\ &= -\sqrt{-a-1}. \end{aligned}$$

故选：C.

5. 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 - 2x + m^2 - 2m - 3 = 0$ 有一根为零，则 m 的值为 ()

A. -1 或 3

B. 3

C. -1

D. 0

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的根的定义，因式分解法解一元二次方程. 把 $x=0$ 代入方程式，再解关于 m 的一元二次方程即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 - 2x + m^2 - 2m - 3 = 0$ 有一根为零，

把 $x=0$ 代入得到， $m^2 - 2m - 3 = 0,$

解得 $m=3$ 或 $-1,$

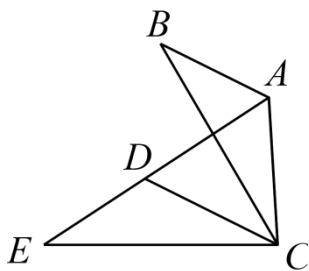
$\because m+1 \neq 0,$

$\therefore m \neq -1,$

$\therefore m=3.$

故选：B.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB \neq AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转，点 A 、 B 分别落在点 D 、 E 处，如果点 A 、 D 、 E 在同一直线上，那么下列结论错误的是 ()



A. $\angle ADC = 60^\circ$

B. $\angle ACD = 60^\circ$

C. $\angle BCD = \angle ECD$

D. $\angle BAD = \angle BCE$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了旋转的性质、等边三角形的判定与性质、全等三角形的性质等知识，解题关键是熟练运用旋转的性质．由旋转的性质可得 $\triangle BAC \cong \triangle EDC$ ， $\angle ACD = \angle BCE$ ，再结合已知条件逐一分析判断即可．

【详解】解：A. 由旋转的性质可知， $\angle EDC = \angle BAC = 120^\circ$ ，

$\therefore$ 当点 A 、 D 、 E 在同一条直线上时， $\angle ADC = 180^\circ - \angle EDC = 60^\circ$ ，

故选项 A 不符合题意；

B. 由旋转的性质可知， $\triangle BAC \cong \triangle EDC$ ，

$\therefore \angle BCA = \angle ECD$ ， $CA = CD$ ，

由 $\therefore \angle ADC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACD$ 为等边三角形，

$\therefore \angle ACD = 60^\circ$ ，

故选项 B 不符合题意；

C、 $\therefore \angle BCA = \angle ECD$ ， $\angle ACD = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 由旋转的性质可得： $\angle BCE = \angle ACD = 60^\circ$ ，

当 $\angle BCD = \angle ECD$ 时，

$\therefore \angle ACB = \angle BCD = \angle ECD = 30^\circ$ ，与题干条件矛盾，

$\therefore$ 选项 C 符合题意

D. $\therefore \triangle ACD$ 为等边三角形，

$\therefore \angle DAC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle BAC - \angle DAC = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BCE = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle BCE$ ，

故选项 D 不符合题意；

故选：C.

二、填空题（每题 3 分，共 36 分）

7. 若二次根式 $\sqrt{3x-1}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____

【答案】 $x \geq \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质，被开方数大于等于 0，就可以求解.

【详解】解：根据二次根式有意义，分式有意义得： $3x-1 \geq 0$,

解得： $x \geq \frac{1}{3}$.

故答案为 $x \geq \frac{1}{3}$.

8. 比较大小 $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ _____ $2\sqrt{2} - \sqrt{7}$

【答案】 >

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式比较大小，先根据分母有理化的方法得到 $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$,

$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$, 再 根 据 $\sqrt{6} < \sqrt{7} < 2\sqrt{2}$ 得 到 $\sqrt{7} - \sqrt{6} > 0, 2\sqrt{2} - \sqrt{7} > 0$,

$2\sqrt{2} + \sqrt{7} > \sqrt{7} + \sqrt{6}$, 即可得到 $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} < \frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$, 则 $2\sqrt{2} - \sqrt{7} < \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

【详解】解： $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$,

$\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{(2\sqrt{2}-\sqrt{7})(2\sqrt{2}+\sqrt{7})} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{8-7} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$,

$\therefore \sqrt{6} < \sqrt{7} < 2\sqrt{2}$,

$\therefore \sqrt{7} - \sqrt{6} > 0, 2\sqrt{2} - \sqrt{7} > 0$, $2\sqrt{2} + \sqrt{7} > \sqrt{7} + \sqrt{6}$,

$\therefore \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} < \frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$,

$\therefore 2\sqrt{2} - \sqrt{7} < \sqrt{7} - \sqrt{6}$,

故答案为： > .

9. 写出 $\sqrt{a+b}$ 的一个有理化因式_____

【答案】 $\sqrt{a+b}$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的性质和乘法法则，根据二次根式的性质 $(\sqrt{a})^2 = a$ 进行求解即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+b} = a+b$,

$\therefore \sqrt{a+b}$ 的一个有理化因式为 $\sqrt{a+b}$,

故答案为： $\sqrt{a+b}$ (答案不唯一).

10. 化简： $\sqrt{20a^3b^2} (b > 0) =$ _____.

【答案】 $2ab\sqrt{5a}$

【解析】

【分析】 本题考查了根据二次根式的性质进行化简，根据算术平方根的非负性可求得结果，正确求解是解题的关键.

【详解】 解： 根据二次根式的性质可知： $a \geq 0$,

$\because b > 0$,

$\therefore$ 原式 $= 2ab\sqrt{5a}$,

故答案为： $2ab\sqrt{5a}$.

11. 已知 $(m-1)x^{m^2+1} - 3x + 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 $m =$ _____

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的定义，一般地，形如 $ax^2 + bx + c = 0$ (其中 a, b, c 是常数且 $a \neq 0$)

的方程叫做一元二次方程，据此可得 $\begin{cases} m^2 + 1 = 2 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases}$ ，解之即可得到答案.

【详解】 解： $\because (m-1)x^{m^2+1} - 3x + 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，

$\therefore \begin{cases} m^2 + 1 = 2 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases}$,

解得 $m = -1$,

故答案为： -1 .

12. 设 $3 - \sqrt{2}$ 的整数部分为 x ，小数部分为 y ，则 $x + y + \frac{2}{y}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{8-\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查了无理数的估算, 二次根式的混合计算, 先估算出 $1 < \sqrt{2} < 2$, 进而推出 $1 < 3 - \sqrt{2} < 2$, 则可确定 $x=1$, $y=2-\sqrt{2}$, 据此代值计算即可.

【详解】解: $\because \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$,

$$\therefore 1 < \sqrt{2} < 2,$$

$$\therefore -2 < -\sqrt{2} < -1,$$

$$\therefore 1 < 3 - \sqrt{2} < 2,$$

$$\therefore 3 - \sqrt{2} \text{ 的整数部分为 } x, \text{ 小数部分为 } y,$$

$$\therefore x=1,$$

$$\therefore y=3-\sqrt{2}-1=2-\sqrt{2},$$

$$\therefore x+y+\frac{2}{y}$$

$$=1+2-\sqrt{2}+\frac{2}{2-\sqrt{2}}$$

$$=3-\sqrt{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$

$$=3-\sqrt{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{4-2}$$

$$=3-\sqrt{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{6-2\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{8-\sqrt{2}}{2},$$

故答案为: $\frac{8-\sqrt{2}}{2}$.

13. 如果最简根式 $2\sqrt{m^2-7}$ 与 $4\sqrt{8m+2}$ 是同类二次根式, 那么 $m=$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】几个二次根式化成最简二次根式后, 如果被开方数相同, 这几个二次根式叫做同类二次根式, 根据定义可知, $m^2-7=8m+2$, 解方程即可, 但需注意的是求出 m 的值还需保证二次根式有意义.

【详解】 $\because$ 最简根式 $2\sqrt{m^2-7}$ 与 $4\sqrt{8m+2}$ 是同类二次根式

$$\therefore m^2-7=8m+2$$

解得 $m_1=9$, $m_2=-1$

将 $m_1=9$ 代入原二次根式中, 被开方数均 >0 , 故正确;

将 $m_2=-1$ 代入原二次根式中, 被开方数均 <0 , 故舍去.

故答案为 9.

【点睛】此题考查的是同类二次根式的概念、一元二次方程的解法及二次根式有意义的条件, 需要注意的是求出 m 的值需代回到原分式中分析是否有意义.

14. 若等式 $\sqrt{2x^2-x^3}=x\sqrt{2-x}$ 成立, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $0 \leq x \leq 2$.

【解析】

【分析】根据二次根式的性质和绝对值法则列不等式即可求出答案.

【详解】解: $\because \sqrt{2x^2-x^3}=\sqrt{x^2(2-x)}=|x|\sqrt{2-x}$, $\sqrt{2x^2-x^3}=x\sqrt{2-x}$

$$\therefore |x|\sqrt{2-x}=x\sqrt{2-x}, \text{ 即 } |x|=x,$$

$$\therefore \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases},$$

解得: $0 \leq x \leq 2$;

故答案为: $0 \leq x \leq 2$.

【点睛】本题考查二次根式的性质, 绝对值法则, 解题的关键是正确理解二次根式有意义的条件和绝对值的法则列不等式.

15. 数轴上与 1, $\sqrt{3}$ 对应的点分别为 A , B , 点 B 关于点 A 的对称点为点 C , 设点 C 表示的数为 x , 则

$$|x-\sqrt{3}|+\frac{1}{x}=$$

【答案】 $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数与数轴，实数的运算，分母有理化，先根据数轴上两点距离计算公式得到点 C 表示的数为 $2 - \sqrt{3}$ ，即 $x = 2 - \sqrt{3}$ ，再把 $x = 2 - \sqrt{3}$ 代入所求式子中计算求解即可.

【详解】 解： $\because$ 数轴上与 1 ， $\sqrt{3}$ 对应的点分别为 A ， B ，点 B 关于点 A 的对称点为点 C ，

$\therefore$ 点 C 表示的数为 $1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3}$ ，即 $x = 2 - \sqrt{3}$ ，

$$\begin{aligned} & \therefore |x - \sqrt{3}| + \frac{1}{x} \\ &= |2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}| + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \\ &= |2 - 2\sqrt{3}| + \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} \\ &= 2\sqrt{3} - 2 + 2 + \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3}, \end{aligned}$$

故答案为： $3\sqrt{3}$.

16. 对于实数 a ， b ，定义运算 “ $*$ ”：
$$a * b = \begin{cases} a^2 - ab (a \geq b) \\ ab - b^2 (a < b) \end{cases}$$
. 例如 $4 * 2$ ，因为 $4 > 2$ ，所以

$4 * 2 = 4^2 - 4 \times 2 = 8$. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两个根， $x_1 * x_2 =$ _____.

【答案】 ± 3

【解析】

【分析】 本题考查定义新运算，解一元二次方程. 先因式分解法求出方程的根，再根据定义新运算进行求解即可. 掌握新运算的法则，是解题的关键.

【详解】 解：解 $x^2 - 5x + 6 = 0$ ，得： $x = 3$ 或 $x = 2$ ，

当 $x_1 = 3, x_2 = 2$ 时， $x_1 * x_2 = 3 * 2 = 3^2 - 3 \times 2 = 3$ ；

当 $x_1 = 2, x_2 = 3$ 时， $x_1 * x_2 = 2 * 3 = 3 \times 2 - 3^2 = -3$ ；

综上： $x_1 * x_2 = \pm 3$ ；

故答案为： ± 3 .

17. 若 $m = \frac{2022}{\sqrt{2023}-1}$, 则 $m^3 - 3m^2 - 2020m + 2021$ 的值是_____

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查了代数式求值，配方法的应用，分母有理化，先分母有理化得出 $m-1 = \sqrt{2023}$ ，求出 $m^2 - 2m = 2022$ ，将原式变形为 $m(m^2 - 2m) - m^2 - 2020m + 2021$ 再将 $m^2 - 2m = 2022$ 代入求值即可.

【详解】 解： $\because m = \frac{2022}{\sqrt{2023}-1} = \frac{2022(\sqrt{2023}+1)}{(\sqrt{2023}-1)(\sqrt{2023}+1)} = \sqrt{2023} + 1$,

$$\therefore m - 1 = \sqrt{2023},$$

$$\therefore m^2 - 2m + 1 = 2023,$$

$$\therefore m^2 - 2m = 2022,$$

$$\therefore m^3 - 3m^2 - 2020m + 2021$$

$$= m(m^2 - 2m) - m^2 - 2020m + 2021$$

$$= 2022m - m^2 - 2020m + 2021$$

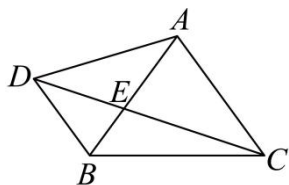
$$= -m^2 + 2m + 2021$$

$$= -2022 + 2021$$

$$= -1.$$

故答案为： -1.

18. 如图，已知等腰 ABC ， $AB = AC$ ， 将 AB 绕点 A 顺时针旋转， 点 B 落在点 D 处， 且 $BD \parallel AC$ ， 连接 CD 交 AB 于点 E ， 如果 $CE = AC$ ， 那么 $\angle BAC =$ ___ 度.



【答案】 72

【解析】

【分析】 本题主要考查了旋转的性质以及三角形内角和定理，根据旋转的性质，等腰三角形的性质，三角形的内角和定理即可得到结论. 理解旋转的性质是解决问题的关键.

【详解】解：∵将 AB 绕点 A 顺时针旋转，点 B 落在点 D 处，

$$\therefore AD = AB,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AD = AC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACD,$$

$$\text{设 } \angle ADC = \angle ACD = \alpha$$

$$\because BD \parallel AC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle ACD = \alpha$$

$$\therefore \angle ADB = 2\alpha$$

$$\because AD = AB,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = 2\alpha,$$

$$\because BD \parallel AC,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD = 2\alpha,$$

$$\because AC = CE,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle CAB = 2\alpha,$$

$$\because \angle EAC + \angle ACE + \angle AEC = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$\therefore \alpha = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 2\alpha = 72^\circ$$

故答案为：72.

三、解答题 (共 96 分)

19. 化简下列各式：

$$(1) \sqrt{\frac{3x^3}{4y}} (x < 0)$$

$$(2) \sqrt{\frac{(a+1)^3}{5b^3}} (a < -1)$$

【答案】 (1) $\frac{x\sqrt{3xy}}{2y}$

$$(2) -\frac{a+1}{5b^2} \sqrt{5ab+5b}$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了化简二次根式，根据 $\sqrt{a^2} = |a|$ 进行化简求解即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \sqrt{\frac{3x^3}{4y}} (x < 0) \\ &= \frac{-x\sqrt{3xy}}{-2y} \\ &= \frac{x\sqrt{3xy}}{2y}.\end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } & \sqrt{\frac{(a+1)^3}{5b^3}} (a < -1) \\ &= -\frac{(a+1)\sqrt{5b(a+1)}}{5b^2} \\ &= -\frac{a+1}{5b^2}\sqrt{5ab+5b}.\end{aligned}$$

$$20. \text{ 计算: } \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) - 2 \left(\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{6} \right)$$

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合计算，先分母有理化和化简二次根式，再根据二次根式的加减运算法则求解即可.

$$\begin{aligned}\text{【详解】 解: } & \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \left(\sqrt{24} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) - 2 \left(\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + 2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} + 2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{6} \\ &= \sqrt{2}-1 + 2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{6} \\ &= -1.\end{aligned}$$

21. 计算: $\frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}}$

【答案】 $-a^2\sqrt{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的乘除混合运算，根号里面和外面分别计算，最后再化简二次根式即可求解.

【详解】 解：由题意可得 $ab^2 \geq 0$ ， $a^3b \geq 0$ ， $\frac{b}{a} \geq 0$ ，

$\therefore a > 0$ ， $b > 0$ ，

$$\therefore \frac{2}{b}\sqrt{ab^2} \times \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div 3\sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= \left[\frac{2}{b} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \div 3 \right] \sqrt{ab^2 \times a^3b \div \frac{b}{a}}$$

$$= -\frac{1}{b}\sqrt{a^5b^2}$$

$$= -\frac{1}{b}\sqrt{a \cdot a^4b^2}$$

$$= -\frac{1}{b} \cdot a^2b\sqrt{a}$$

$$= -a^2\sqrt{a}.$$

22. 计算: $\frac{4x}{3}\sqrt{18xy} - 2x^2y^2\sqrt{\frac{2}{xy^3}} + 6xy\sqrt{\frac{x}{8y}} (x < 0)$

【答案】 $\frac{9}{2}x\sqrt{2xy}$

【解析】

【分析】 本题考查的是二次根式加减运算. 根据二次根式的性质把各个二次根式化简，合并同类二次根式即可.

【详解】 解： $\because x < 0$ ， $\therefore y < 0$ ，

$$\frac{4x}{3}\sqrt{18xy} - 2x^2y^2\sqrt{\frac{2}{xy^3}} + 6xy\sqrt{\frac{x}{8y}}$$

$$= \frac{4x}{3} \times 3\sqrt{2xy} - 2x^2y^2 \cdot \frac{1}{-xy^2}\sqrt{2xy} + 6xy \cdot \frac{1}{-4y}\sqrt{2xy}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4x\sqrt{2xy} + 2x\sqrt{2xy} - \frac{3}{2}x\sqrt{2xy} \\
 &= \frac{9}{2}x\sqrt{2xy}.
 \end{aligned}$$

23. 解不等式: $x + \sqrt{12} > \sqrt{3}x + \sqrt{27} + 1$, 并求出它的最大整数解.

【答案】 $x < -2 - \sqrt{3}$, 最大整数解为 $x = -4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式, 二次根式的加减计算, 分母有理化, 先化简二次根式, 再移项, 合并同类项, 系数化为 1 求出不等式的解解, 进而求出其最大整数解即可.

【详解】 解: $\because x + \sqrt{12} > \sqrt{3}x + \sqrt{27} + 1$,

$$\therefore x + 2\sqrt{3} > \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore (\sqrt{3} - 1)x < -\sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore x < -\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1},$$

$$\therefore x < -\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)},$$

$$\therefore x < -\frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1},$$

$$\therefore x < -2 - \sqrt{3},$$

$$\because \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4},$$

$$\therefore -2 < -\sqrt{3} < -1,$$

$$\therefore -4 < -2 - \sqrt{3} < -3,$$

$$\therefore -4 < x < -3,$$

$\therefore$ 满足题意的最大整数解为 $x = -4$.

24. 用适当的方法解下列方程:

$$(1) \quad 4(2x - 3)^2 = 36$$

$$(2) \quad (3x - 1)(x + 2) = 20$$

$$(3) \frac{x^2+1}{2} + \frac{x}{3} = 1$$

$$(4) x(x-3)(x+3)(x+6) = 40$$

【答案】(1) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

$$(2) x_1 = -\frac{11}{3}, x_2 = 2$$

$$(3) x_1 = \frac{-1-\sqrt{10}}{3}, x_2 = \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$$

$$(4) x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = \frac{-3-\sqrt{89}}{2}, x_4 = \frac{-3+\sqrt{89}}{2}$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程—因式分解法、直接开平方法和配方法.

(1) 先变形得到 $(2x-3)^2 = 9$, 然后利用直接开平方法解方程;

(2) 先把方程整理为一般式 $3x^2 + 5x - 22 = 0$, 然后利用因式分解法解方程;

(3) 先把方程去分母整理为一般式 $3x^2 + 2x - 3 = 0$, 然后利用求根公式法解方程;

(4) $[x(x+3)][(x-3)(x+6)] = 40$, 可得 $(x^2+3x)(x^2+3x-18) = 40$, 把 (x^2+3x) 当成一个整体可得 $(x^2+3x+2)(x^2+3x-20) = 0$, 即可得到 $x^2+3x+2 = 0$ 或 $x^2+3x-20 = 0$, 然后分别解方程即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 4(2x-3)^2 = 36,$$

$$(2x-3)^2 = 9,$$

$$\therefore 2x-3 = \pm 3,$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = 3;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } (3x-1)(x+2) = 20,$$

$$3x^2 + 5x - 22 = 0,$$

$$(3x+11)(x-2) = 0,$$

$$\therefore 3x+11 = 0 \text{ 或 } x-2 = 0,$$

$$\therefore x_1 = -\frac{11}{3}, \quad x_2 = 2;$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: } \frac{x^2+1}{2} + \frac{x}{3} = 1,$$

$$3x^2 + 3 + 2x = 6,$$

$$3x^2 + 2x - 3 = 0,$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-3) = 40 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{6},$$

$$\therefore x_1 = \frac{-1 - \sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{10}}{3};$$

【小问 4 详解】

$$\text{解: } x(x-3)(x+3)(x+6) = 40$$

$$\therefore [x(x+3)][(x-3)(x+6)] = 40,$$

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x - 18) = 40,$$

$$(x^2 + 3x)^2 - 18(x^2 + 3x) - 40 = 0,$$

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 20) = 0,$$

$$\therefore x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ 或 } x^2 + 3x - 20 = 0,$$

$$\text{当 } x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ 时, } (x+1)(x+2) = 0, \text{ 解得 } x_1 = -1, x_2 = -2$$

$$\text{当 } x^2 + 3x - 20 = 0 \text{ 时, } \Delta = 3^2 - 4 \times (-20) = 89 > 0, \text{ 解得 } x = \frac{-3 \pm \sqrt{89}}{2}, \text{ 即 } x_3 = \frac{-3 - \sqrt{89}}{2}, x_4 = \frac{-3 + \sqrt{89}}{2},$$

$$\text{综上所述, } x_1 = -1, x_2 = -2, \quad x_3 = \frac{-3 - \sqrt{89}}{2}, x_4 = \frac{-3 + \sqrt{89}}{2}.$$

25. 用配方法解方程: $2x^2 - 6x - 3 = 0$.

$$\text{【答案】 } x_1 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{15}}{2}$$

【解析】

【分析】本题主要考查了配方法解一元二次方程，先把二次项系数化为1，再把常数项移到方程右边，接着把方程两边同时加上一次项系数一半的平方进行配方，再解方程即可.

【详解】解： $2x^2 - 6x - 3 = 0$

$$x^2 - 3x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x^2 - 3x = \frac{3}{2}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{3}{2} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{15}}{2}.$$

26. “分母有理化”是我们常用的一种化简方法，除此之外，我们也可以用平方之后再开方的方式来化简一些有特点的无理数，如：对于 $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ，设 $x = \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ，易知 $\sqrt{3+\sqrt{5}} > \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ，故 $x > 0$.

$$\text{由 } x^2 = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} - 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = 2,$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{2}, \text{ 即 } \sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}.$$

根据以上方法，求 $\sqrt{6-3\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}}$ 的值.

【答案】 $y = -\sqrt{6}$

【解析】

【分析】本题主要考查了化简复合二次根式，仿照题意设 $y = \sqrt{6-3\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}}$ ，再把等式两边同时平方进行计算求解即可.

【详解】解：设 $y = \sqrt{6-3\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}}$,

$$\therefore y^2 = \left(\sqrt{6-3\sqrt{3}} - \sqrt{6+3\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= 6 - 3\sqrt{3} + 6 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6-3\sqrt{3}} \times \sqrt{6+3\sqrt{3}}$$

$$= 12 - 2\sqrt{(6-3\sqrt{3})(6+3\sqrt{3})}$$

$$= 12 - 2\sqrt{36-27}$$

$$= 12 - 2\sqrt{9}$$

$$= 12 - 2 \times 3$$

$$= 6,$$

$$\therefore y = \pm\sqrt{6},$$

$$\because \sqrt{6-3\sqrt{3}} < \sqrt{6+3\sqrt{3}},$$

$$\therefore y < 0,$$

$$\therefore y = -\sqrt{6}.$$

27. 已知 $y = \sqrt{(x-4)^2} - x + 5$, 当 x 分别取 1, 2, 3, ..., 2024 时, 求所对应 y 值的总和.

【答案】 2036

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简求值、绝对值运算等知识点, 掌握二次根式的化简方法是解题关键. 先化简二次根式求出 y 的表达式, 再将 x 的取值依次代入, 然后求和即可得.

【详解】 解: $y = \sqrt{(x-4)^2} - x + 5 = |x-4| - x + 5,$

当 $x < 4$ 时, $y = 4 - x - x + 5 = 9 - 2x,$

当 $x \geq 4$ 时, $y = x - 4 - x + 5 = 1,$

则所求的总和为:

$$(9-2 \times 1) + (9-2 \times 2) + (9-2 \times 3) + 1 + 1 + \cdots + 1$$

2021个1

$$= 7 + 5 + 3 + 1 \times 2021$$

$$= 2036.$$

28. 已知 k 为非负实数, 关于 x 的方程 $x^2 - (k+1)x + k = 0$ 和 $kx^2 - (k+2)x + k = 0$.

(1) 试证: 前一个方程必有两个非负实数根;

(2) 当 k 取何值时, 上述两个方程有一个相同的实数根.

【答案】 (1) 证明见解析; (2) 当 $k = 2$ 或 0 或 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时, 述两个方程有一个相同的实数根.

【解析】

【分析】(1) 先根据根的判别式求解, 再根据根与系数的关系求解即可; (2) 先求出第一个方程的两个根, 再分类求出即可.

【详解】(1) 证明: $x^2 - (k+1)x + k = 0$,

$$\Delta = [-(k+1)]^2 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0,$$

即方程关于 x 的方程 $x^2 - (k+1)x + k = 0$ 一定有两个实数根;

设方程的两根为 x_1, x_2 ,

则根据根与系数的关系得: $x_1 + x_2 = k+1$, $x_1 \cdot x_2 = k$,

$\therefore k$ 为非负实数,

$$\therefore x_1 + x_2 = k+1 > 0, \quad x_1 \cdot x_2 = k \geq 0,$$

$\therefore$ 由 $x_1 \cdot x_2 = k \geq 0$ 得出方程有同号两个根或有一个根为 0;

$\therefore$ 由 $x_1 + x_2 = k+1 > 0$, $x_1 \cdot x_2 = k \geq 0$ 得出方程有两个正实数根或有一个根为 0,

所以方程 $x^2 - (k+1)x + k = 0$ 必有两个非负实数根;

(2) $x^2 - (k+1)x + k = 0$,

$$\Delta = [-(k+1)]^2 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0,$$

$$\text{方程的根为 } \frac{k+1 \pm \sqrt{(k-1)^2}}{2},$$

即方程的根为 k 和 1;

当相同的根是 k 时, 把 $x = k$ 代入方程 $kx^2 - (k+2)x + k = 0$ 得: $k^3 - (k+2)k + k = 0$,

$$\text{解得: } k = 0 \text{ 或 } k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } k = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

$\therefore k$ 为非负实数,

$$\therefore k = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 舍去;}$$

当相同的根是 1 时, 把 $x = 1$ 代入方程 $kx^2 - (k+2)x + k = 0$ 得: $k - (k+2) + k = 0$,

解得: $k = 2$;

所以当 $k = 2$ 或 0 或 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时, 上述两个方程有一个相同的实数根.

【点睛】本题考查了根的判别式和根与系数的关系, 能熟记根的判别式和根与系数的关系是解 (1) 的关键, 能够分类讨论是解 (2) 的关键.

29. 先观察下列等式, 再回答问题:

$$\textcircled{1} \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2};$$

$$\textcircled{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3};$$

$$\textcircled{3} \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4};$$

...

(1) 请你利用上述规律计算 $\sqrt{\frac{37}{36} + \frac{1}{49}}$ (仿照上式写出过程);

(2) 请你按照上面各等式反映的规律, 写出一个用 n (n 为正整数) 表示的等式_____;

(3) 请你利用发现的规律, 计算:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2022^2} + \frac{1}{2023^2}} - 2024$$

【答案】(1) 见解析 (2) $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

(3) $-1 - \frac{1}{2023}$

【解析】

【分析】考查了二次根式的性质与化简, 此题是一个阅读题目, 通过阅读找出题目隐含条件. 总结: 找规律的题, 都要通过仔细观察找出和数之间的关系, 并用关系式表示出来.

(1) 从三个式子中可以发现, 第一个加数都是 1, 第二个加数是个分数, 设分母为 n , 第三个分数的分母就是 $n+1$, 结果是一个带分数, 整数部分是 1, 分数部分的分子也是 1, 分母是前项分数的分母的积. 由此可求解即可;

(2) 根据 (1) 找的规律进行计算即可;

(3) 根据规律把所求式子先化简二次根式, 最后计算期间即可;

【小问 1 详解】

解: 由题意得, $\sqrt{\frac{37}{36} + \frac{1}{49}} = \sqrt{1 + \frac{1}{36} + \frac{1}{7^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}} = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = 1\frac{1}{42};$

【小问 2 详解】

解：由题意得， $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

【小问3详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解：} & \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2022^2}+\frac{1}{2023^2}}-2024 \\
 & =1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+1+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}-2024 \\
 & =2023-\frac{1}{2022}-2024 \\
 & =-1-\frac{1}{2023}.
 \end{aligned}$$

30. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC$ ，点 E 为射线 CB 上一动点，联结 AE ，作 $AF \perp AE$ ，且 $AF=AE$ 。

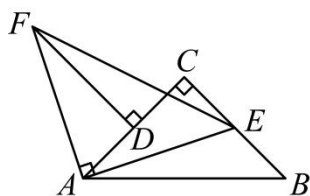


图1

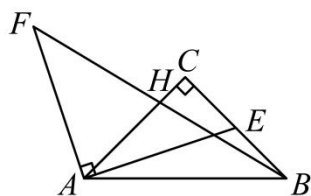


图2

(1) 如图1，过点 F 作 $FD \perp AC$ ，垂足为 D 。

①说明： $\triangle FDA \cong \triangle ACE$ 。

②连接 BF 交 AC 于点 G ，说明： G 是 CD 中点。

(2) 如图2，连接 BF 交 AC 于点 H ，若 $\frac{AH}{CH}=3$ ，求证： E 是 BC 的中点。

【答案】(1) ①证明见解析；②证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的性质与判定：

(1) ①先由垂线的定义得到 $\angle FDA = \angle FAE = \angle ACE = 90^\circ$ ，进而可证明 $\angle DAF = \angle CEA$ ，再利用 AAS 即可证明 $\triangle FDA \cong \triangle ACE$ ；②由全等三角形的性质得到 $DF = CE$ ，进而可证明 $DF = BC$ ，再利用 AAS 证明 $\triangle FGD \cong \triangle BGC$ (AAS)，即可证明 $DG = CG$ ，即 G 是 CD 中点；

(2) 过点 F 作 $FD \perp AC$ ，垂足为 D ，同理可证明 $\triangle FDA \cong \triangle ACE$ ，则 $AD = CE$ ，同理可证明点 H 为

CD 的中点, 则 $DH = CH$, 再由 $\frac{AH}{CH} = 3$, 证明 $AD = 2CH = CD$, 推出 $CE = AD = \frac{1}{2}AC$, 再由

$AC = BC$, 可得 $CE = \frac{1}{2}BC$, 即 E 是 BC 的中点.

【小问 1 详解】

证明: ① $\because AF \perp AE, FD \perp AC, \angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle FDA = \angle FAE = \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle CAE = \angle CAE + \angle CEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle CEA,$$

$$\text{又} \because AF = EA,$$

$$\therefore \triangle FDA \cong \triangle ACE \text{ (AAS)};$$

② 连接 BF 交 AC 于点 G ,

$$\because \triangle FDA \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore DF = CA,$$

$$\because AC = BC,$$

$$\therefore FD = BC,$$

$$\because FD \perp AC,$$

$$\therefore \angle FDG = \angle BCG = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle FGD = \angle BGC,$$

$$\therefore \triangle FGD \cong \triangle BGC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DG = CG, \text{ 即 } G \text{ 是 } CD \text{ 中点};$$

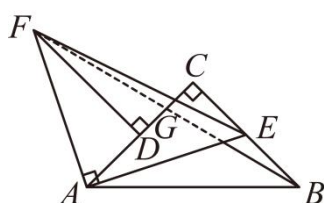


图1

【小问 2 详解】

证明: 如图所示, 过点 F 作 $FD \perp AC$, 垂足为 D ,

同理可证明 $\triangle FDA \cong \triangle ACE$,

$$\therefore AD = CE,$$

同理可证明点 H 为 CD 的中点,

$$\therefore DH = CH$$

$$\therefore \frac{AH}{CH} = 3,$$

$$\therefore AH = 3CH,$$

$$\therefore AD + DH = 3CH,$$

$$\therefore AD = 2CH = CD,$$

$$\therefore CE = AD = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BC,$$

$\therefore E$ 是 BC 的中点.

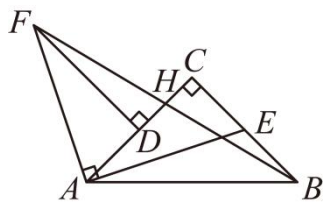


图2