

数学练习 (12/25)

(时间: 100 分钟满分: 150 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 共 24 分)

1. 下列函数中, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小的是 ()

A. $y = \frac{2}{x}$

B. $y = -\frac{2}{x}$

C. $y = 2x$

D. $y = -2x$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查反比例函数、一次函数、增减性, 解题的关键是熟练掌握反比例函数、一次函数性质. 根据反比例函数、一次函数的增减性即可得到答案.

【详解】解: A、函数 $y = \frac{2}{x}$, 当 $x > 0$ 时, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小, 或当 $x < 0$ 时, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小, 故 A 错误, 不符合题意;

B、函数 $y = -\frac{2}{x}$, 当 $x > 0$ 时, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大, 或当 $x < 0$ 时, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大, 故 B 错误, 不符合题意;

C、函数 $y = 2x$, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大, 故 C 错误, 不符合题意;

D、函数 $y = -2x$, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小, 故 D 正确, 符合题意;

故选: D.

2. 在平面直角坐标系中, 点 $P(1, -2)$ 到原点的距离为 ()

A. 1

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{5}$

D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是勾股定理的应用, 掌握“已知两点的坐标求两点之间的距离”的求解方法是解本题的关键.

根据平面直角坐标系中两点间距离公式, 计算点 $(1, -2)$ 到原点 $(0, 0)$ 的距离即可.

【详解】解: 根据题意得, 点 $P(1, -2)$ 到原点的距离是 $\sqrt{(1-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$.

故选: C.

3. 下列关于 x 的方程中: ① $\frac{x}{a} = 1$; ② $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = 5$; ③ $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$; ④ $\frac{x^2}{x} = 1$, 分式方程有 () 个

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了分式方程. 熟练掌握分式方程的定义是解题的关键. 分母中含有未知数的有理方程叫做分式方程.

根据分式方程的定义逐一分析各方程是否符合条件.

【详解】方程①: $\frac{x}{a} = 1$, 分母为 a , 但未知数是 x , 分母不含未知数, 故不是分式方程.

方程②: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = 5$, 分母为 $x+1$ 和 x , 均含未知数 x , 是分式方程.

方程③: $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$, 分母为 $\sqrt{x}$, 是无理方程, 不是分式方程.

方程④: $\frac{x^2}{x} = 1$, 化简为 $x = 1$, 但原式分母为 x , 含未知数 x , 故属于分式方程.

综上, 分式方程有②、④, 共 2 个.

应选项 B.

4. 已知 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 是双曲线 $y = \frac{m+1}{x}$ 上的两点, 当 $x_1 > x_2 > 0$ 时, 有 $y_1 > y_2$, 则 m 的取值范围是 ()

A. $m > 0$ B. $m < 0$ C. $m > -1$ D. $m < -1$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的概念及增减性, 解题的关键是根据函数在特定区间内的增减趋势判断比例系数的符号.

根据反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大即可解题.

【详解】 $\because$ 当 $x_1 > x_2 > 0$ 时, 有 $y_1 > y_2$, 即 y 随 x 的减小而减小,

$\therefore$ 函数图像在第二、四象限, 且反比例函数系数 $m+1 < 0$,

$\therefore m < -1$.

故选: D.

5. 到三角形三个顶点的距离相等的点是 ()

A. 三条角平分线的交点

B. 三边中线的交点

C. 三边上高所在直线的交点

D. 三边的垂直平分线的交点

【答案】D

【解析】

【分析】根据三角形不同线段交点的性质，判断出到三个顶点距离相等的点的位置．本题主要考查了线段垂直平分线的性质，熟练掌握线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等是解题的关键．

【详解】解：∵线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等

∴三角形三边的垂直平分线的交点到三个顶点的距离相等

∴选项A三条角平分线的交点是内心，到三边的距离相等，A项错误；

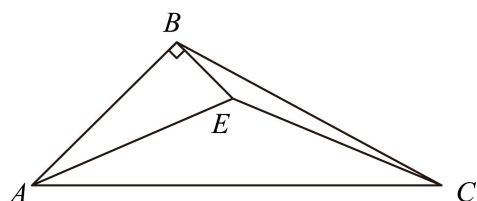
选项B三边中线的交点是重心，与到顶点距离无关，B项错误；

选项C三边上高所在直线的交点是垂心，C项错误；

到三角形三个顶点的距离相等的点是三边的垂直平分线的交点，D项正确；

故选：D.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AE 平分 $\angle BAC$ ， $EB \perp AB$ 且 $EA = EC$ ．以下判断正确的是（ ）



A. $AC = 2AE$

B. $AC = 2AB$

C. $BC = 2AB$

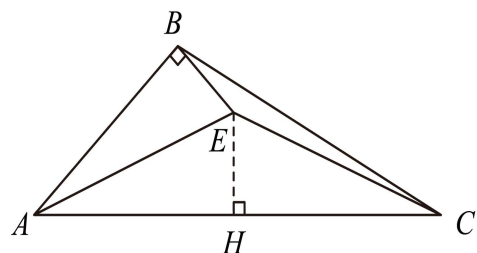
D. $AB = 2BE$

【答案】B

【解析】

【分析】如图，过 E 作 $EH \perp AC$ 于 H ，证明 $\angle EAC = \angle ECA$ ， EH 是 AC 的垂直平分线，可得 $AH = CH$ ，证明 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle AHE$ ，可得 $AB = AH$ ，从而可得答案．

【详解】解：如图，过 E 作 $EH \perp AC$ 于 H ，



∵ $EA = EC$ ，

∴ $\angle EAC = \angle ECA$ ， EH 是 AC 的垂直平分线，

∴ $AH = CH$ ，

∵ AE 平分 $\angle BAC$ ， $AB \perp BE$ ，

$$\therefore \angle BAE = \angle CAE, BE = HE,$$

$$\because AE = AE,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle AHE,$$

$$\therefore AB = AH,$$

$$\therefore AB = AH = CH,$$

$$\therefore AC = 2AB,$$

故选 B

【点睛】 本题考查的是角平分线的定义，线段的垂直平分线的判定，等腰三角形的性质，全等三角形的判定与性质，熟练掌握基本图形的性质是解本题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 共 48 分)

7. 命题“直角三角形的两个锐角互余”的逆命题是_____命题. (填“真”或“假”)

【答案】 真

【解析】

【分析】 先写出原命题的逆命题，然后判断真假即可.

【详解】 解：命题“直角三角形的两个锐角互余”的逆命题是：“两个锐角互余的三角形是直角三角形”，这是真命题，

故答案为：真.

【点睛】 本题主要考查了判断命题真假，写出一个命题的逆命题，三角形内角和定理，正确写出原命题的逆命题是解题的关键.

8. 函数 $y = \sqrt{x} - \frac{1}{x-2}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq 0$ 且 $x \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了函数自变量的取值范围，根据二次根式的被开方数是非负数，分母不为零列出不等式组，解不等式组得到答案，掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】 解：由题意得，
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases},$$

解得： $x \geq 0$ 且 $x \neq 2$,

故答案为： $x \geq 0$ 且 $x \neq 2$.

9. 方程 $4x^4 = \frac{1}{4}$ 的解是_____.

【答案】 $x = \pm \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程-直接开平方法，任意有理数的平方都为非负数，掌握知识点是解题的关键.

根据一元二次方程-直接开平方法，任意有理数的平方都为非负数，即可解答.

【详解】 解： $4x^4 = \frac{1}{4}$

$$x^4 = \frac{1}{16},$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{4} \text{ 或 } x^2 = -\frac{1}{4} < 0 \text{ (不符合题意, 舍去),}$$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{2}.$$

10. 到点 $A(1,1)$ 距离为 1 的点的轨迹是_____.

【答案】 以点 A 为圆心，1 为半径的圆

【解析】

【分析】 本题考查了圆的定义，圆的定义是在同一平面内到定点的距离等于定长的点的集合，所以到定点 A 的距离为 1 的点的集合是圆.

【详解】 解： 根据圆的定义可知，到定点 A 的距离为 1 的点的集合是以点 A 为圆心，1 为半径的圆，故答案为：以点 A 为圆心，1 为半径的圆.

11. 若函数 $y = (m+1)x^{m^2-3}$ 是正比例函数，且图像经过一、三象限，则 $m =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数的定义与性质，一元一次不等式，掌握知识点是解题的关键. 根据自变量的次数等于 1，系数大于 0，列式求解即可.

【详解】 解： $\because$ 函数 $y = (m+1)x^{m^2-3}$ 是正比例函数，且图像经过一、三象限，

$$\therefore m^2 - 3 = 1 \text{ 且 } m + 1 > 0,$$

$$\text{即 } m = \pm 2 \text{ 且 } m > -1,$$

$$\therefore m = 2.$$

故答案为：2.

12. 一次函数 $y = (n+1)x - n$ 的图像经过一、二、三象限, 则 n 的取值范围是_____.

【答案】 $-1 < n < 0$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的图象与系数的关系, 一元一次不等式组, 掌握知识点是解题的关键.

根据一次函数经过的图像经过一、二、三象限, 得到 $k > 0, b > 0$, 即可解答.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = (n+1)x - n$ 的图像经过一、二、三象限,

$$\therefore \begin{cases} n+1 > 0 \\ -n > 0 \end{cases}$$

解得 $-1 < n < 0$.

故答案为: $-1 < n < 0$.

13. 将直线 $y = -\frac{2}{3}x + 1$ 向下平移 3 个单位, 平移后的直线经过点 $(3, b)$, 则 b 的值为_____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象的平移, 求函数值, 根据题意得到平移后直线解析式为 $y = -\frac{2}{3}x - 2$,

再将点 $(3, b)$ 代入即可求解.

【详解】 解: 将直线 $y = -\frac{2}{3}x + 1$ 向下平移 3 个单位后得到新的直线解析式为 $y = -\frac{2}{3}x - 2$,

$\therefore$ 直线 $y = -\frac{2}{3}x - 2$ 经过点 $(3, b)$,

$$\therefore b = -\frac{2}{3} \times 3 - 2 = -4.$$

故答案为: -4 .

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 6, BC = 8, AB = 10$, D 为 AB 的中点, 则 CD 的长为_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 先根据勾股定理的逆定理判定 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 再根据斜中定理计算即可得出答案.

【详解】 $\because AC = 6, BC = 8, AB = 10$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形, AB 为斜边

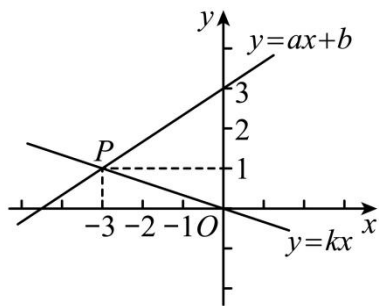
又 D 为 AB 的中点

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AB = 5$$

故答案为 5.

【点睛】 本题考查的是勾股定理的逆定理以及直角三角形的斜中定理，解题关键是根据已知条件判断出三角形是直角三角形.

15. 如图，二元一次方程组 $\begin{cases} y = ax + b \\ y = kx \end{cases}$ 的解是_____.



【答案】 $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了二元一次方程组和一次函数的关系，理解两个一次函数的交点坐标就是二元一次方程组的解是解题的关键. 两个一次函数的交点坐标就是二元一次方程组的解，从而可得答案.

【详解】 解： $\because y = ax + b$ 与 $y = kx$ 图象交点为 $(-3, 1)$,

$$\therefore \text{二元一次方程组 } \begin{cases} y = ax + b \\ y = kx \end{cases} \text{ 的解是 } \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases},$$

故答案为: $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$.

16. 若关于 x 的方程 $\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} = \frac{x+m}{x(x-1)}$ 的解为正数，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > -3$ 且 $m \neq 5$

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的解，解一元一次不等式，解答本题的关键是明确它们各自的计算方法.

根据解分式方程的方法求出题目中分式方程的解，然后根据关于 x 的方程的解为正数且 $x(x-1) \neq 0$ ，即可求得 m 的取值范围.

【详解】解： $\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} = \frac{x+m}{x(x-1)}$

方程两边同乘以 $x(x-1)$ ，得 $3(x-1) + 6x = x+m$ ，

解得 $x = \frac{m+3}{8}$ ，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} = \frac{x+m}{x(x-1)}$ 的解为正数，且 $x(x-1) \neq 0$ ，

$\therefore x > 0$ ，且 $x \neq 0, x \neq 1$ ，

即 $x > 0$ ，且 $x \neq 1$ ，

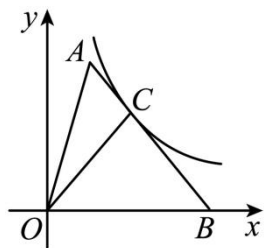
$\therefore \frac{m+3}{8} > 0$ ，且 $\frac{m+3}{8} \neq 1$ ，

解得 $m > -3$ 且 $m \neq 5$ 。

故答案为： $m > -3$ 且 $m \neq 5$ 。

17. 如图，已知在 $\triangle ABO$ 中，点 C 在 AB 上， $BC = 3AC$ ， $CO = CB$ ， $S_{\triangle AOB} = 16$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的

图象经过点 C ，则 k 的值为_____。

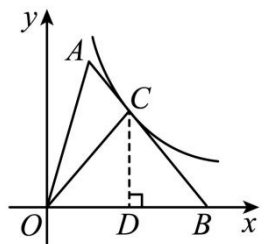


【答案】 12

【解析】

【分析】过点 C 作 $CD \perp OB$ 于点 D ，根据等腰三角形的性质，可知点 D 是 OB 的中点，根据 $BC = 3AC$ ， $S_{\triangle AOB} = 16$ ，可得 $\triangle BOC$ 的面积，进一步可得 $\triangle COD$ 的面积，再根据反比例函数系数 k 的几何意义，即可求出 k 的值。

【详解】解：解：过点 C 作 $CD \perp OB$ 于点 D ，如图所示：



$\therefore OC = CB$ ，

$$\therefore OD = BD,$$

$$\because BC = 3AC, S_{\triangle AOB} = 16,$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{3}{4} S_{\triangle AOB} = \frac{3}{4} \times 16 = 12,$$

$$\therefore S_{\triangle DOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle BOC} = 6,$$

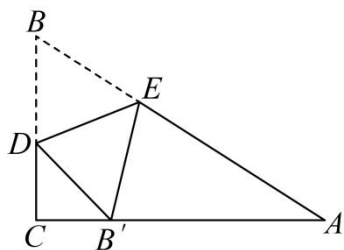
$$\because \text{反比例函数 } y = \frac{k}{x} \text{ 的图象经过点 } C,$$

$$\therefore k = 2 \times 6 = 12,$$

故答案为: 12.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，反比例函数系数 k 的几何意义，反比例函数图象上点的坐标特征，熟练掌握反比例函数系数 k 的几何意义是解题的关键.

18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 1$ ，点 D, E 分别是 BC, AB 上的动点，将 BDE 沿直线 DE 翻折，点 B 的对点 B' 恰好落在 AC 边上，如果 $\triangle B'CD$ 中有一个角是 30° ，则 BE 的长度为_____.



【答案】 $\frac{2}{3}$ 或 $\sqrt{3}-1$

【解析】

【分析】本题考查了折叠的性质，含 30° 角的直角三角形的性质，勾股定理. 分两种情况讨论: $\angle B'DC = 30^\circ$ 或 $\angle B'DC = 30^\circ$ ，根据相关性质求解即可.

【详解】解: 由折叠的性质可得， $\angle BDE = \angle B'DE$ ， $\angle B = \angle DB'E = 60^\circ$ ， $BD = B'D$ ，

若 $\angle B'DC = 30^\circ$ ，则 $\angle B'DC = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle BDE = \frac{1}{2} \angle BDB' = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ,$$

又 $\because \angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle BDE$ 是等边三角形，

设 $BD = B'D = x$ ，则 $CD = 1 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle B'CD$ 中， $CD = \frac{1}{2} B'D$ ，

$$\therefore 1-x = \frac{1}{2}x,$$

$$\text{即 } x = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BE = BD = \frac{2}{3};$$

若 $\angle B'DC = 30^\circ$, 则 $\angle DB'C = 60^\circ$,

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AB'E = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ, \quad \angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB' = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

即 $\triangle AB'E$ 是直角三角形,

在 $\text{Rt}\triangle B'CD$ 中, 设 $B'C = x$, 则 $B'D = 2x$, $CD = \sqrt{B'D^2 - B'C^2} = \sqrt{3}x$,

$$\therefore BD = B'D = 2x,$$

$$\because BD + CD = 1$$

$$\therefore 2x + \sqrt{3}x = 1,$$

$$\text{解得 } x = 2 - \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because BC = 1$,

$$\therefore AB = 2, \quad AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AB' = AC - B'C = \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 2,$$

$$\therefore B'E = \frac{1}{2}AB' = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore BE = B'E = \sqrt{3} - 1,$$

综上所述, BE 的长度为 $\frac{2}{3}$ 或 $\sqrt{3} - 1$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 共 78 分)

19. (1) 解关于 x 的方程: $a(x-2) = 2x+a$;

$$(2) \text{ 解方程: } \frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}.$$

【答案】 (1) 当 $a=2$ 时, 方程无解; 当 $a \neq 2$ 时, $x = \frac{3a}{a-2}$ (2) $x = -5$

【解析】

【分析】 本题考查一元一次方程与分式方程, 一元二次方程, 掌握知识点是解题的根据.

(1) 根据解一元一次方程的步骤, 将方程化为 $(a-2)x=3a$, 再分类讨论, ①当 $a-2=0$, ②当 $a-2\neq 0$, 即可解答;

(2) 先将方程两边同乘以 $(x+2)(x-2)$, 化为一元二次方程, 利用因式分解法求出 x 的值, 最后检验是否符合题意即可.

【详解】解: (1) 去括号, 得

$$ax-2a=2x+a,$$

移项, 得

$$ax-2x=a+2a,$$

合并同类项, 得

$$(a-2)x=3a,$$

①当 $a-2=0$, 即 $a=2$ 时, $0=2\times 3$ (不成立), 即 x 无解;

②当 $a-2\neq 0$, 即 $a\neq 2$ 时, $x=\frac{3a}{a-2}$.

$$\therefore x=\frac{3a}{a-2}$$

(2) 方程两边同乘以 $(x+2)(x-2)$, 得

$$(x+2)^2-16=x-2,$$

去括号, 得

$$x^2+4x+4-16=x-2,$$

移项及合并, 得

$$x^2+3x-10=0,$$

$$\text{即 } (x+5)(x-2)=0,$$

$$\therefore x+5=0, \quad x-2=0,$$

解得 $x_1=-5, x_2=2$,

经检验, $x=-5$ 是原方程的解, $x=2$ 不是原方程的解,

$\therefore$ 原方程的解为 $x=-5$.

20. 若关于 x 的方程 $\frac{x^2+3-b^2}{x^2-2x}+\frac{1}{x}=\frac{3b}{x-2}$ 有增根, 求 b 的值.

【答案】 b 的值为 ± 1 或 -7 .

【解析】

【分析】本题主要考查了解方程，分式方程的增根，先将分式方程化为整式方程 $x^2 + (1-3b)x + 1 - b^2 = 0$,

又关于 x 的方程 $\frac{x^2 + 3 - b^2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} = \frac{3b}{x-2}$ 有增根，所以 $x = 0$ 或 $x = 2$ ，将方程的增根代入整式方程计算即可

求解，掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】解: $\frac{x^2 + 3 - b^2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} = \frac{3b}{x-2}$

$$x^2 + 3 - b^2 + x - 2 = 3bx$$

$$x^2 + (1-3b)x + 1 - b^2 = 0,$$

∴ 若关于 x 的方程 $\frac{x^2 + 3 - b^2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x} = \frac{3b}{x-2}$ 有增根,

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x = 2,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } 1 - b^2 = 0,$$

$$\therefore b = \pm 1;$$

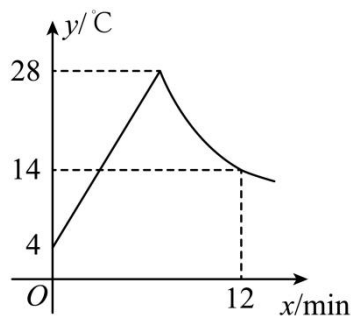
$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } 2^2 + 2(1-3b) + 1 - b^2 = 0,$$

$$\text{整理得: } b^2 + 6b - 7 = 0$$

$$\therefore b = 1 \text{ 或 } b = -7;$$

综上: b 的值为 ± 1 或 -7 .

21. 如图所示, 制作某种食品的同时需将原材料加热, 设该材料温度为 $y^\circ\text{C}$, 从加热开始计算的时间为 x 分钟. 据了解, 该材料在加热过程中温度 y 与时间 x 成一次函数关系. 已知该材料在加热前的温度为 4°C , 加热一段时间使材料温度达到 28°C 时停止加热, 停止加热后, 材料温度逐渐下降, 这时温度 y 与时间 x 成反比例函数关系, 已知第 12 分钟时, 材料温度是 14°C .



(1) 分别求出该材料加热和停止加热过程中 y 与 x 的函数关系式 (写出 x 的取值范围);

(2) 根据该食品制作要求, 在材料温度不低于 12°C 的这段时间内, 需要对该材料进行特殊处理, 那么对该材料进行特殊处理的时间为多少分钟?

【答案】 (1) 该材料加热过程中对应的函数解析式为 $y = 4x + 4 (0 < x < 6)$, 停止加热过程中对应的函数解析式为 $y = \frac{168}{x} (6 \leq x \leq 42)$

(2) 对该材料进行特殊处理的时间为 12 分钟

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 求出相应的函数解析式, 利用数形结合的思想解答.

(1) 根据图象中的数据可以先求出反比例函数的解析式, 再求出 $x = 12$ 对应的 y 的值, 即可得到一次函数对应的解析式, 注意要写出自变量 x 的取值范围;

(2) 将 $y = 12$ 代入 (1) 中的两个函数解析式, 即可得到相应的 x 的值, 然后作差即可.

【小问 1 详解】

解: 设停止加热过程中对应的函数解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

$\because$ 点 $(12, 14)$ 在该函数的图象上,

$$\therefore 14 = \frac{k}{12}, \text{ 得 } k = 168,$$

$\therefore$ 停止加热过程中对应的函数解析式为 $y = \frac{168}{x}$,

当 $y = 28$ 时, $28 = \frac{168}{x}$, 得 $x = 6$, 当 $y = 4$ 时, $4 = \frac{168}{x}$, 得 $x = 42$,

$\therefore$ 停止加热过程中对应的函数解析式为 $y = \frac{168}{x} (6 \leq x \leq 42)$,

设该材料加热过程中对应的函数解析式为 $y = ax + b$,

$\because$ 点 $(0, 4)$ 、 $(6, 28)$ 在该函数的图象上,

$$\therefore \begin{cases} b = 4 \\ 6a + b = 28 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 该材料加热过程中对应的函数解析式为 $y = 4x + 4 (0 < x < 6)$;

【小问 2 详解】

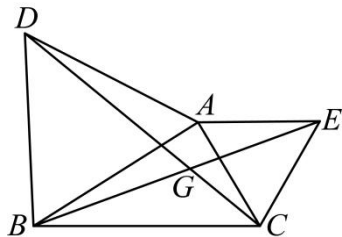
解: 将 $y = 12$ 代入 $y = 4x + 4$ 中, $12 = 4x + 4$, 得 $x = 2$,

将 $y = 12$ 代入 $y = \frac{168}{x}$ 中, $12 = \frac{168}{x}$, 得 $x = 14$,

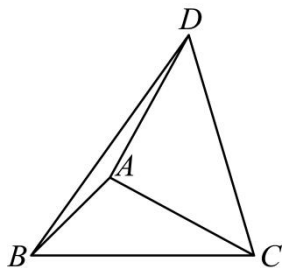
14-2=12 (分钟),

答: 对该材料进行特殊处理的时间为 12 分钟.

22. (1) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 以边 AB 、 AC 为边向形外作等边 $\triangle ABD$ 和等边 $\triangle ACE$, 连接 BE 、 CD 相交于点 G . 求证: $BE = CD$;



(2) 利用上述思想方法解决问题: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $BC = 4$, $\angle ABC = 45^\circ$, 以 CD 为斜边向外作等腰直角三角形 ACD , 连接 BD , 求 BD 的长.



【答案】(1) 证明见解析; (2) $BD = 2\sqrt{6}$.

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质, 勾股定理, 等腰直角三角形的性质, 掌握知识点的应用是解题的关键.

(1) 由 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是等边三角形, 则 $AD = AB$, $AC = AE$, $\angle DAB = \angle CAE = 60^\circ$, 所以 $\angle DAC = \angle BAE$, 然后证明 $\triangle ADC \cong \triangle ABE$ (SAS) 即可;

(2) 以 AB 为直角边向外作等腰直角三角形 ABM , 连接 BM 、 CM , 同 (1) 理证明 $\triangle BAD \cong \triangle MAC$ (SAS), 所以 $BD = CM$, 然后通过勾股定理 $CM = \sqrt{BM^2 + BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$, 从而求解.

【详解】(1) 证明: $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是等边三角形,

$\therefore AD = AB$, $AC = AE$, $\angle DAB = \angle CAE = 60^\circ$,

$\angle DAB + \angle BAC = \angle CAE + \angle BAC$,

$\therefore \angle DAC = \angle BAE$,

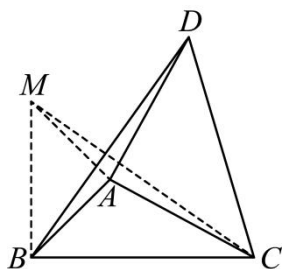
在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABE$ 中,

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle DAC = \angle BAE, \\ AC = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BE = CD;$$

(2) 解: 如图, 以 AB 为直角边向外作等腰直角三角形 ABM , 连接 BM 、 CM ,



$\because \triangle ABM$ 和 $\triangle ACD$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore AM = AB, AC = AD, \angle BAM = \angle CAD = 90^\circ, \angle MBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM + \angle MAD = \angle CAD + \angle MAD, BM = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle BAD = \angle MAC,$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle MAC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AM \\ \angle BAD = \angle MAC, \\ AD = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle MAC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BD = CM,$$

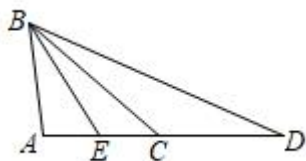
$$\therefore \angle ABC = 45^\circ, \angle MBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MBC = 90^\circ,$$

$$\therefore CM = \sqrt{BM^2 + BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore BD = CM = 2\sqrt{6}.$$

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, BE 是 AC 的中线, 点 D 在 AC 的延长线上, 连接 BD , BC 平分 $\angle EBD$.



(1) 求证: $\angle ABE = \angle D$;

(2) 求证: $BD = 2BE$.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】(1) 由题意易得 $\angle ABC = \angle ACB$, $\angle EBC = \angle DBC$, 然后可得 $\angle ACB = \angle D + \angle DBC$, $\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC$, 进而问题可求证;

(2) 延长 BE 到点 F , 使得 $EF = EB$, 连接 CF , 易证 $\triangle ABE \cong \triangle CFE$, 然后可得 $\angle ABE = \angle F = \angle D$, 进而可证 $\triangle BCF \cong \triangle BCD$, 最后问题可求证.

【小问1详解】

证明: $\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$,

$\because BC$ 平分 $\angle EBD$,

$\therefore \angle EBC = \angle DBC$,

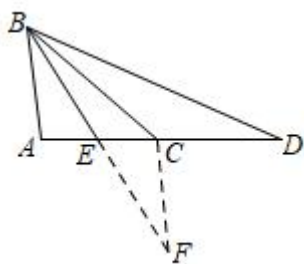
$\because \angle ACB = \angle D + \angle DBC$, $\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC$,

$\therefore \angle D + \angle DBC = \angle ABE + \angle EBC$,

$\therefore \angle ABE = \angle D$;

【小问2详解】

证明: 延长 BE 到点 F , 使得 $EF = EB$, 连接 CF , 如图所示:



$\because BE$ 是 AC 的中线,

$\therefore AE = CE$,

$\because \angle AEB = \angle CEF$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CFE$ (SAS),

$\therefore \angle ABE = \angle F$,

$\because \angle ABE = \angle D$,

$$\therefore \angle D = \angle F,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle DBC, \quad BC = BC,$$

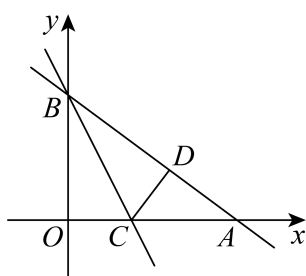
$$\therefore \triangle BCF \cong \triangle BCD \quad (\text{AAS}),$$

$$\therefore BD = BF,$$

$$\therefore BD = 2BE.$$

【点睛】 本题主要考查全等三角形的性质与判定及等腰三角形的性质，熟练掌握全等三角形的性质与判定及等腰三角形的性质是解题的关键.

24. 如图，平面直角坐标系中， $A(4,0), B(0,3)$ ，将 $\triangle AOB$ 折叠，使点 O 落在 AB 上点 D 处，折痕交 OA 于 C



(1) 求直线 BC 的表达式;

(2) 求点 D 的坐标;

(3) 将 $\triangle BCD$ 沿着射线 BC 方向平移，点 D 落到点 E 处 (点 E 不与点 D 重合). 若 $\triangle ACE$ 是直角三角形，直接写出点 E 的坐标.

【答案】 (1) $y = -2x + 3$

(2) $(\frac{12}{5}, \frac{6}{5})$

(3) $(\frac{39}{10}, -\frac{9}{5})$ 或 $(4, -2)$.

【解析】

【分析】 本题考查一次函数与三角形的综合，全等三角形的判定与性质，勾股定理，轴对称，等腰三角形，正确作出辅助线是解题的关键.

(1) 先求出 $BO = 3, OA = 4$ ，根据勾股定理，可得 $AB = \sqrt{BO^2 + OA^2} = 5$ ，则 $AD = BA - BD = 2$ ，

$AC^2 = CD^2 + AD^2$ ，求出 $OC = CD = \frac{3}{2}$ ，则点 C 的坐标为 $(\frac{3}{2}, 0)$ ，设直线 BC 的表达式为 $y = kx + b$ ，将 $B(0, 3), C(\frac{3}{2}, 0)$ 分别代入，即可解答;

(2) 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E ，先求出 $AC = AO - OC = \frac{5}{2}$ ，由 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{2} DE \cdot AC$ ，可

得 $DE = \frac{6}{5}$, 根据勾股定理, 求出 $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \frac{8}{5}$, 则 $OE = AO - AE = \frac{12}{5}$, 即可解答.

(3) 分类讨论: ①当 $\angle AEC = 90^\circ$ 时, ②当 $\angle CAE = 90^\circ$ 时, 逐一分析, 即可解答.

【小问 1 详解】

解: 由 $A(4,0), B(0,3)$ 得,

$$BO = 3, OA = 4,$$

由折叠, 得

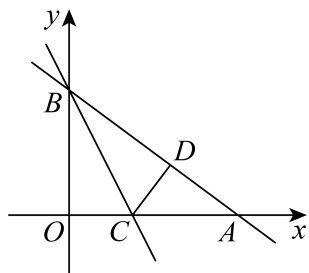
$$OB = BD = 3, CO = CD, \angle BOC = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{BO^2 + OA^2} = 5, \angle ADC = 180^\circ - \angle CDB = 90^\circ, AC = OA - OC = 4 - CD,$$

$$\therefore AD = BA - BD = 2, AC^2 = CD^2 + AD^2,$$

$$\text{即 } (4 - CD)^2 = CD^2 + 2^2,$$

$$\text{解得 } CD = \frac{3}{2},$$



$$\therefore OC = CD = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (\frac{3}{2}, 0),$$

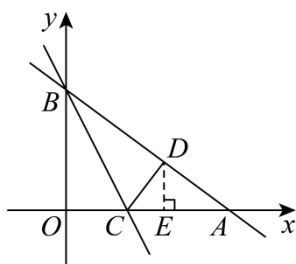
设直线 BC 的表达式为 $y = kx + b$, 将 $B(0,3), C(\frac{3}{2}, 0)$ 分别代入, 得

$$\begin{cases} b = 3 \\ \frac{3}{2}k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = 3 \\ k = -2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的表达式为 } y = -2x + 3.$$

【小问 2 详解】

过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E , 如图



由 (1) 有 $AC = AO - OC = \frac{5}{2}$, $\angle ADC = \angle AED = 90^\circ$,

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{2} DE \cdot AC,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} DE \times \frac{5}{2},$$

$$\text{解得 } DE = \frac{6}{5},$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \frac{8}{5},$$

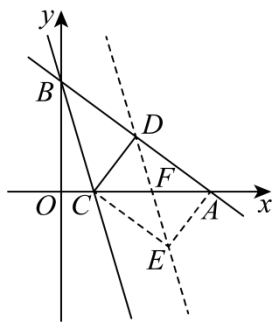
$$\therefore OE = AO - AE = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

【小问 3 详解】

过点 D 作 $DF \parallel BC$, 交 x 轴于点 F , 如图, 由题意, 可知点 E 在射线 DF 上,

则有 $\angle ACE < \angle BOC < 90^\circ$,



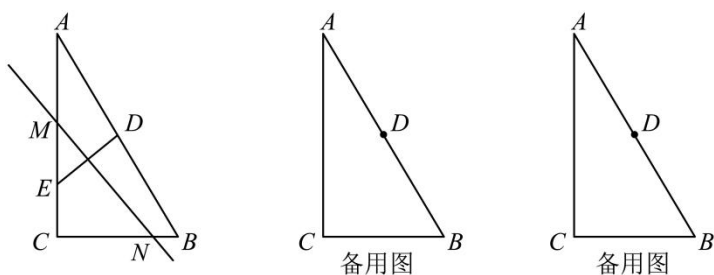
设直线 DF 的解析式为 $y = -2x + b_1$, 将 $D\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 代入, 得

$$\frac{6}{5} = -2 \times \frac{12}{5} + b_1, \text{ 解得 } b_1 = 6,$$

$\therefore$ 直线 DF 的表达式为 $y = -2x + 6$.

①当 $\angle AEC = 90^\circ$ 时, 延长 AE 交直线 BC 于点 M , 如图

$$\therefore \angle CEM = 180^\circ - \angle AEC = 90^\circ,$$



- (1) 当点 E 与点 C 重合时, 求 ME 的长;
- (2) 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出函数的定义域;
- (3) 当 MN 经过 $\triangle ABC$ 一边中点时, 请直接写出 ME 的长.

【答案】(1) $ME = 2$

$$(2) y = \sqrt{x^2 - 6x + 12} \quad (0 \leq x \leq 4)$$

$$(3) ME = \sqrt{3} \text{ 或 } ME = 3$$

【解析】

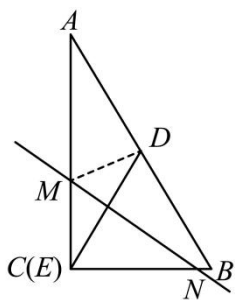
【分析】(1) 连接 MD , 结合题意, 根据含 30° 角直角三角形、直角三角形斜边中线、垂直平分线的性质分析, 结合勾股定理性质计算, 即可得到答案;

(2) 连接 MD , 过点 M 作 AB 的垂线, 垂足为 F , 根据垂直平分线、勾股定理的性质, 得 $y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$, 结合 (1) 的结论, 通过列一元二次方程并求解, 得函数的定义域, 即可得到答案;

(3) 分 MN 经过 AC 中点、 MN 经过 AB 中点、 MN 经过 BC 中点三种情况, 结合 (2) 的结论, 根据垂直平分线、勾股定理、二次根式、三角形中位线的性质计算, 即可得到答案.

【小问 1 详解】

连接 MD ,



$$\because AB = 4\sqrt{3}, \quad BC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ$$

$\because$ 点 D 是 AB 的中点,

$$\therefore CD = AD, \quad AD = \frac{1}{2} AB = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \angle ACD = 30^\circ, \quad \angle ADC = 120^\circ,$$

$\because MN$ 垂直平分 CD ,

$$\therefore CM = DM,$$

$$\therefore \angle MDC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADM = \angle ADC - \angle MDC = 90^\circ$$

$$\therefore AM = 2MD$$

设 $MD = a$, 则 $AM = 2a$

$$\therefore AD^2 + MD^2 = AM^2$$

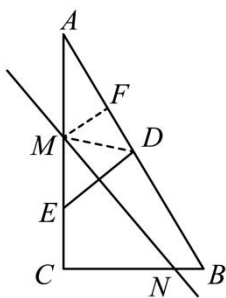
$$\therefore 12 + a^2 = 4a^2$$

$$\therefore a = 2 \text{ 或 } a = -2 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore ME = MD = 2;$$

【小问 2 详解】

连接 MD , 过点 M 作 AB 的垂线, 垂足为 F ,



$\because MN$ 垂直平分 ED ,

$$\therefore ME = MD = y,$$

$$\because \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore MF = \frac{x}{2},$$

$$\therefore AF = \sqrt{AM^2 - MF^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$\therefore FD = AD - AF = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle MDF$ 中, $FD^2 + MF^2 = MD^2$

$$\therefore \left(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = y^2$$

$$\therefore y = \sqrt{x^2 - 6x + 12}$$

根据 (1) 的结论, 当点 E 与点 C 重合时, $ME = 2$

$$\therefore x^2 - 6x + 12 = 4$$

$$\therefore x = 4 \text{ 或 } x = 2$$

$$\because AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 6$$

$\therefore x = 2$ 不符合题意

$$\therefore x = 4$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 4$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式是 $y = \sqrt{x^2 - 6x + 12} (0 \leq x \leq 4)$;

【小问 3 详解】

分 MN 经过 AC 中点、 MN 经过 AB 中点、 MN 经过 BC 中点三种情况分析,

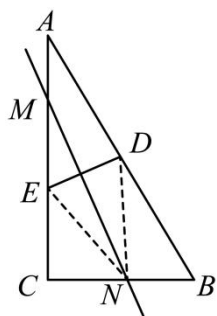
当 MN 经过 AC 中点时, 即 $AM = \frac{1}{2}AC = 3$

$$\therefore y = \sqrt{3^2 - 6 \times 3 + 12} = \sqrt{3}, \text{ 即 } ME = \sqrt{3}$$

当 MN 经过 AB 中点时, 和 MN 分别交边 AC 、 BC 于点 M 、 N 的结论矛盾

$\therefore MN$ 经过 AB 中点不成立

当 MN 经过 BC 中点时, 如图, 分别连接 EN 、 DN



$$\therefore CN = BN = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}$$

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2}AC = 3,$$

$\therefore MN$ 线段 DE 的垂直平分线

$$\therefore EN = DN = 3$$

$$\therefore AM = x, ME = y$$

$$\therefore CE = AC - AM - ME = 6 - x - y$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore CE = \sqrt{EN^2 - CN^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore 6 - x - y = \sqrt{6}$$

$$\therefore y = -x + 6 - \sqrt{6}$$

$$\therefore \sqrt{x^2 - 6x + 12} = -x + 6 - \sqrt{6}$$

$$\therefore x = 3 - \sqrt{6}$$

$$\therefore y = \sqrt{x^2 - 6x + 12} = 3, \text{ 即 } ME = 3$$

$$\therefore ME = \sqrt{3} \text{ 或 } ME = 3.$$

【点睛】 本题考查了勾股定理、垂直平分线、三角形中位线、含 30° 角直角三角形、直角三角形斜边中线、二次根式、一元二次方程的知识；解题的关键是熟练掌握勾股定理、含 30° 角直角三角形、一元二次方程的性质，从而完成求解。