

桃李园实验学校 2024 学年第一学期第一次质量调研

八年级数学试卷

本卷满分 100 分，完成时间 90 分钟

一、单选题（每题 3 分，共 18 分）

1. 下列说法正确的个数

- ① 2 的平方根是 $\sqrt{2}$ ； ② $\sqrt{5a}$ 与 $\sqrt{0.2a}$ 是同类二次根式；
③ $\sqrt{2}-1$ 与 $\sqrt{2}+1$ 互为倒数； ④ $\sqrt{3}-2$ 的绝对值是 $2-\sqrt{3}$

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据平方根、同类二次根式、倒数以及绝对值进行选择即可.

【详解】 ① 2 的平方根是 $\pm\sqrt{2}$ ，故①错误；

② $\sqrt{5a}$ 与 $\sqrt{0.2a} = \frac{\sqrt{5a}}{5}$ 是同类二次根式，故②正确；

③ $\because (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$ ， $\therefore \sqrt{2}-1$ 与 $\sqrt{2}+1$ 互为倒数，故③正确；

④ $\sqrt{3}-2$ 的绝对值是 $2-\sqrt{3}$ ，故④正确，

正确的共有 3 个，

故选 D

【点睛】 本题考查了同类二次根式、平方根、倒数以及绝对值，掌握平方根、同类二次根式、倒数以及绝对值的运算是解题的关键.

2. 已知 $4 < a < 7$ ， $\sqrt{(a-4)^2} + \sqrt{(a-7)^2}$ 化简后为 ()

A. 3 B. -3 C. $2a-11$ D. $11-2a$

【答案】 A

【解析】

【详解】 分析： 直接利用二次根式的性质结合 a 的取值范围分别化简求出答案.

详解： $\because 4 < a < 7$ ， $\therefore \sqrt{(a-4)^2} + \sqrt{(a-7)^2}$

$= a-4+7-a$

$= 3$.

故选 A.

点睛：本题主要考查了二次根式的性质与化简，正确掌握二次根式的性质是解题的关键.

3. 已知: $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 则 a 与 b 的关系是 ()

A. $a-b=0$

B. $a+b=0$

C. $ab=1$

D. $a^2=b^2$

【答案】C

【解析】

【分析】先分母有理化求出 a 、 b ，再分别代入求出 ab 、 $a+b$ 、 $a-b$ 、 a^2 、 b^2 各个式子的值，即可得出选项.

【详解】解：分母有理化，可得 $a=2+\sqrt{3}$ ， $b=2-\sqrt{3}$ ，

$\therefore a-b = (2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$ ，故 A 选项错误，不符合题意；

$a+b = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$ ，故 B 选项错误，不符合题意；

$ab = (2+\sqrt{3}) \times (2-\sqrt{3}) = 4-3=1$ ，故 C 选项正确，符合题意；

$\therefore a^2 = (2+\sqrt{3})^2 = 4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$ ， $b^2 = (2-\sqrt{3})^2 = 4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$ ，

$\therefore a^2 \neq b^2$ ，故 D 选项错误，不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查了分母有理化的应用，能求出每个式子的值是解此题的关键.

4. 把 $(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}$ 根号外的因式移入根号内，其结果是 ()

A. $\sqrt{1-a}$

B. $-\sqrt{1-a}$

C. $\sqrt{a-1}$

D. $-\sqrt{a-1}$

【答案】B

【解析】

【分析】先根据二次根式有意义的条件求出 $a-1 < 0$ ，再根据二次根式的性质把根号外的因式平方后移入根号内，注意：当 $m \geq 0$ 时， $m\sqrt{a} = \sqrt{m^2 a}$ ， $m \leq 0$ 时， $m\sqrt{a} = -\sqrt{m^2 a}$ ，即可得出答案.

【详解】解： $\because$ 根式有意义，

$\therefore \frac{1}{1-a} > 0$ ，解得： $a < 1$ ，

$\therefore a-1 < 0$ ，

$\therefore (a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}} = -\sqrt{\frac{1}{1-a} \cdot (1-a)^2} = -\sqrt{1-a}$ ，

故选 B.

【点睛】 本题考查了二次根式的性质的应用,难度较大,熟悉根式的性质是解题关键.

5. 若化简 $\sqrt{x^2 - 8x + 16} - |1 - x|$ 的结果为 $5 - 2x$, 则 x 的取值范围是 ()

A. 为任意实数

B. $1 \leq x \leq 4$

C. $x \geq 1$

D. $x \leq 4$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据完全平方公式和 $\sqrt{a^2} = |a|$, 先把多项式化简为 $|x - 4| - |1 - x|$, 然后根据 x 的取值范围分别讨论, 求出符合题意的 x 的值即可.

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{(x - 4)^2} - |1 - x| = |x - 4| - |1 - x|$,

当 $x \leq 1$ 时,

此时 $1 - x \geq 0$, $x - 4 < 0$,

$\therefore (4 - x) - (1 - x) = 3$, 不符合题意,

当 $1 \leq x \leq 4$ 时,

此时 $1 - x \leq 0$, $x - 4 \leq 0$,

$\therefore (4 - x) - (x - 1) = 5 - 2x$, 符合题意,

当 $x \geq 4$ 时,

此时 $x - 4 \geq 0$, $1 - x < 0$,

$\therefore (x - 4) - (x - 1) = -3$, 不符合题意,

$\therefore x$ 的取值范围为: $1 \leq x \leq 4$

故选 B.

【点睛】 本题主要考查绝对值及二次根式的化简, 要注意正负号的变化, 分类讨论.

6. 设等式 $\sqrt{a(x-a)} + \sqrt{a(y-a)} = \sqrt{x-a} - \sqrt{a-y}$ 在实数范围内成立, 其中 a 、 x 、 y 是两两不同的实数,

则 $\frac{3x^2 + xy - y^2}{x^2 - xy + y^2}$ 的值是()

A. 3

B. $\frac{1}{3}$

C. 2

D. $\frac{5}{3}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据根号下的数要是非负数, 得到 $a(x-a) \geq 0$, $a(y-a) \geq 0$, $x-a \geq 0$, $a-y \geq 0$, 推出 $a \geq 0$, $a \leq 0$, 得到 $a=0$, 代入即可求出 $y=-x$, 把 $y=-x$ 代入原式即可求出答案.

【详解】由于根号下的数要是非负数，

$$\therefore a(x-a) \geq 0, a(y-a) \geq 0, x-a \geq 0, a-y \geq 0,$$

$a(x-a) \geq 0$ 和 $x-a \geq 0$ 可以得到 $a \geq 0$,

$a(y-a) \geq 0$ 和 $a-y \geq 0$ 可以得到 $a \leq 0$,

所以 a 只能等于 0，代入等式得

$$\sqrt{x} - \sqrt{-y} = 0,$$

所以有 $x = -y$,

即: $y = -x$,

由于 x, y, a 是两两不同的实数，

$$\therefore x > 0, y < 0.$$

将 $x = -y$ 代入原式得:

$$\text{原式} = \frac{3x^2 + x(-x) - (-x)^2}{x^2 - x(-x) + (-x)^2} = \frac{1}{3}.$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查对二次根式的化简，算术平方根的非负性，分式的加减、乘除等知识点的理解和掌握，根据算术平方根的非负性求出 a, x, y 的值和代入求分式的值是解此题的关键.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 已知 $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} + 5$, 则 $\frac{y}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式有意义的条件，根据题意得 $x = 2$ 即可求解.

【详解】解：由题意得: $x - 2 \geq 0, 2 - x \geq 0$,

解得: $x = 2$,

$$\therefore y = 5$$

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$$

故答案为: $\frac{5}{2}$

8. 方程 $x^2 = \sqrt{3}x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$

【解析】

【详解】原方程变形为: $x(x-3)=0$, 解得 $x_1=0$, $x_2=3$.

9. 要使式子 $\frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____;

【答案】 $x \geq -3$ 且 $x \neq 2$ 且 $x \geq -3$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件以及二次根式有意义的条件列出不等式组, 解不等式组即可求解.

【详解】解: $\because$ 式子 $\frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$ 在实数范围内有意义,

$$\therefore \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases},$$

解得 $x \geq -3$ 且 $x \neq 2$,

故答案为: $x \geq -3$ 且 $x \neq 2$.

【点睛】本题考查了分式有意义的条件以及二次根式有意义的条件, 掌握分式有意义的条件以及二次根式有意义的条件是解题的关键.

10. $\sqrt{a-3}$ 的有理化因式可以是 _____, $\sqrt{a}-3$ 的有理化因式可以是 _____.

【答案】 ①. $\sqrt{a-3}$ (答案不唯一) ②. $\sqrt{a}+3$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据二次根式的性质, 即可求得有理化因式.

【详解】 $\sqrt{a-3}$ 的有理化因式可以是 $\sqrt{a-3}$, $\sqrt{a}-3$ 的有理化因式可以是 $\sqrt{a}+3$

故答案为: $\sqrt{a-3}$ (答案不唯一), $\sqrt{a}+3$ (答案不唯一)

【点睛】本题考查了有理化因式, 二次根式的性质, 掌握二次根式的性质是解题的关键.

11. 不等式 $\sqrt{2}x-3 > \sqrt{3}x$ 的解集为_____.

【答案】 $x < -3\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】利用不等式的基本性质, 将不等式未知项和常数项各移到一边, 解得 x 的解集.

【详解】解：由 $\sqrt{2}x - 3 > \sqrt{3}x$ ，得

$$\sqrt{2}x - \sqrt{3}x > 3,$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})x > 3,$$

$$\therefore x < \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}, \text{ 即 } x < -3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}.$$

故答案是： $x < -3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了二次根式的应用. 解题的关键是熟悉不等式的基本性质：不等式的两边同时除以负数，不等号的方向发生改变.

12. 已知关于 $x = 1$ 的一元二次方程 $x^2 - 4x - a = 0$ 的一个实数根，则另一个根是_____

【答案】 3

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解和解一元二次方程，熟练掌握知识点是解题的关键. 先把 $x = 1$ 代入原方程即可解出 m 的值，再解方程求解即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x - a = 0$ 的一个根是 $x = 1$ ，

$\therefore$ 把 $x = 1$ 代入原方程，得 $1^2 - 4 \times 1 - a = 0$ ，

$$\therefore a = -3,$$

$\therefore$ 原方程为 $x^2 - 4x + 3 = 0$ ，

$$(x-1)(x-3) = 0,$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

解得 $x = 1$ 或 3 ，

故答案为： 3 .

13. 已知 $x^{|k|} - \sqrt{1-k}x + \frac{1}{2} = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 k 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的定义，只含有一个未知数，且未知数的最高次为 2 的整式方程叫做一元二次方程，据此求解即可.

【详解】解：∵ $x^{|k|} - \sqrt{1-k}x + \frac{1}{2} = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，

$$\therefore \begin{cases} |k| = 2 \\ 1-k \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore k = -2,$$

故答案为：-2.

14. 若最简根式 $a+2b\sqrt{2a+b+3}$ 和 $\sqrt{a-2b}$ 是同类二次根式，则 $a+b$ 的平方根是_____.

【答案】 $\pm\sqrt{7}$

【解析】

【分析】根据被开方数相同的最简二次根式是同类二次根式，列出方程组进行求解即可.

【详解】解：由题意，得： $\begin{cases} a+2b=2 \\ 2a+b+3=a-2b \end{cases}$ ，解得： $\begin{cases} a=12 \\ b=-5 \end{cases}$ ，

$$\therefore a+b=7 \text{ 的平方根为 } \pm\sqrt{7};$$

故答案为： $\pm\sqrt{7}$.

15. 三角形两边的长分别是 3 和 4，第三边的长是方程 $x^2 - 12x + 35 = 0$ 的根，则该三角形的周长为_____.

【答案】 12

【解析】

【详解】试题分析：解方程 $x^2 - 12x + 35 = 0$ ，得 $x_1 = 5$ ， $x_2 = 7$ ，

∵ $1 < \text{第三边} < 7$ ，∴ 第三边长为 5，∴ 周长为 $3+4+5=12$.

考点：1. 解一元二次方程-因式分解法；2. 三角形三边关系.

16. 已知 $0 < a < 1$ ，则 $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} - 2 \div \left(1 - \frac{1}{a}\right) =$ _____.

【答案】 $-a-1$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的化简求值，分式的化简求值，准确熟练地进行计算是解题的关键.

根据已知易得 $(a+1)(a-1) < 0$ ，从而可得 $a^2 - 1 < 0$ ，然后利用二次根式的性质以及分式的运算法则进行计算，即可解答.

【详解】解：∵ $0 < a < 1$ ，

$$\therefore (a+1)(a-1) < 0,$$

$$\therefore a^2 - 1 < 0,$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} - 2 \div \left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} \div \frac{a-1}{a}$$

$$= \left|a - \frac{1}{a}\right| \cdot \frac{a}{a-1}$$

$$= \left|\frac{a^2 - 1}{a}\right| \cdot \frac{a}{a-1}$$

$$= -\frac{(a+1)(a-1)}{a} \cdot \frac{a}{a-1}$$

$$= -(a+1)$$

$$= -a-1,$$

故答案为: $-a-1$.

17. 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - 4x = 2y - 5$, 则 $\frac{\sqrt{x} + y}{\sqrt{x} - y}$ 的值是_____

【答案】 $3 + 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 把已知条件化为两个完全平方式, 可知两个非负数相加为 0, 则每个式子都为 0, 从而列方程求出 x 和 y , 代入即可解答.

【详解】 解: $\because x^2 + y^2 - 4x = 2y - 5$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$\therefore x-2=0, y-1=0$$

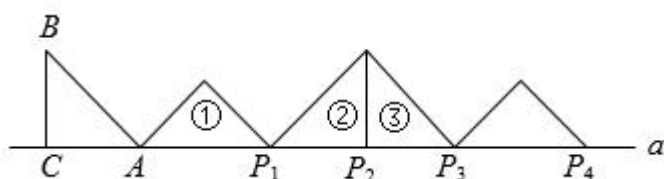
$$\therefore x=2, y=1$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x} + y}{\sqrt{x} - y} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

故答案为: $3 + 2\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查了非负数的性质以及二次根式的混合运算，两非负数之和等于0，则两数均为0，求得 x 、 y 值. 本题中把 $x^2 + y^2 - 4x = 2y - 5$ 变形得 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 0$ 是解题的关键.

18. 如图，等腰 Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC=1$ ，且 AC 边在直线 a 上，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转到位置①可得到点 P_1 ，此时 $AP_1 = \sqrt{2}$ ；将位置①的三角形绕点 P_1 顺时针旋转到位置②，可得到点 P_2 ，此时 $AP_2 = 1 + \sqrt{2}$ ；将位置②的三角形绕点 P_2 顺时针旋转到位置③，可得到点 P_3 ，此时 $AP_3 = 2 + \sqrt{2}$ ；...，按此规律继续旋转，直至得到点 P_{2014} 为止. 则 $AP_{2014} =$ _____.



【答案】 $1342 + 672\sqrt{2}$

【解析】

【详解】解：由 $AP_1 = \sqrt{2}$ ， $AP_2 = 1 + \sqrt{2}$ ， $AP_3 = 2 + \sqrt{2}$ ；

可得

$$AP_4 = 2 + 2\sqrt{2}；AP_5 = 3 + 2\sqrt{2}；AP_6 = 4 + 2\sqrt{2}；$$

.....

依次类推可 3 次一循环，依次加 $\sqrt{2}$ ，1，1，

$$\therefore 2013 = 3 \times 671，$$

$$\therefore AP_{2014} = 671(\sqrt{2} + 2) + \sqrt{2} = 1342 + 672\sqrt{2}，$$

故答案为： $1342 + 672\sqrt{2}$.

三、解答题（19－26 题每题 5 分，27、28 题每题 6 分，共 58 分）

19. 化简： $\frac{1}{3}\sqrt{9a} - 2a\sqrt{\frac{1}{a}} + 8\sqrt{\frac{a}{16}}$.

【答案】 $\sqrt{a}$

【解析】

【分析】先化为最简二次根式，再利用二次根式的加减运算法则，进行运算即可求解.

【详解】解： $\frac{1}{3}\sqrt{9a} - 2a\sqrt{\frac{1}{a}} + 8\sqrt{\frac{a}{16}}$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{a} - 2a \cdot \frac{1}{a}\sqrt{a} + 8 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{a}$$

$$= \sqrt{a}.$$

【点睛】本题考查二次根式的加减混合运算，二次根式的性质，二次根式的加减运算，先化为最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并．合并同类二次根式的实质是合并同类二次根式的系数，根指数与被开方数不变．同类二次根式是指几个二次根式化简成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式．

20. 计算： $\sqrt{8} - \sqrt{27} - |1 - \sqrt{2}| + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$

【答案】 $1 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先化为最简二次根式，去绝对值，分母有理化，再合并即可．

【详解】原式 $= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - (\sqrt{2} - 1) + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$

$$= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$= 1 - 2\sqrt{3}$$

【点睛】本题考查二次根式的混合运算．涉及化为最简二次根式，去绝对值，分母有理化．掌握其运算法则则是解题关键．

21. 化简： $\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{x^2}{y}} \cdot \left(-4\sqrt{-\frac{y^2}{x}}\right) \div \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{x^3y}}.$

【答案】 $8x^2y$

【解析】

【分析】先对各二次根式进行化简，然后按照二次根式乘除混合运算法则化简即可．

【详解】解：根据题意知： $x < 0$ ， $y < 0$ ，

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{x^2y}{y^2}} \cdot \left(-4\sqrt{-\frac{xy^2}{x^2}}\right) \div \frac{1}{6}\sqrt{\frac{xy}{x^4y^2}}$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left|\frac{x}{y}\right| \sqrt{-y} \cdot \left(-4 \cdot \left|\frac{y}{x}\right| \sqrt{-x}\right) \div \left(\frac{1}{6} \cdot \left|\frac{1}{x^2y}\right| \sqrt{xy}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{3y} \sqrt{-y} \cdot \left(-\frac{4y}{x} \sqrt{-x} \right) \div \left(-\frac{\sqrt{xy}}{6x^2y} \right) \\
&= \frac{x}{3y} \sqrt{-y} \cdot \left(-\frac{4y}{x} \sqrt{-x} \right) \cdot \left(-\frac{6x^2y}{\sqrt{xy}} \right) \\
&= 8x^2y.
\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的化简与乘除混合运算，掌握相关运算法则是解题的关键.

22. 解方程： $5x+2 = (3x-1)(2x+2)$ (公式法).

【答案】 $x_1 = \frac{1+\sqrt{97}}{12}, x_2 = \frac{1-\sqrt{97}}{12}.$

【解析】

【分析】 把方程整理成一般式，找出 a, b, c 的值，计算出根的判别式大于 0，代入求根公式即可求出解.

【详解】 解： 原方程整理得： $6x^2-x-4=0$,

$$\therefore a=6, b=-1, c=-4,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-4) = 97 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{2 \times 6} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{12},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1+\sqrt{97}}{12}, x_2 = \frac{1-\sqrt{97}}{12}.$$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程－公式法，熟练掌握求根公式是解本题的关键.

23. 解方程： $3x^2 - 8x - 3 = 0$ (配方法)

【答案】 $x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 首先移项，将二次项系数化为 1 后，然后在等号左右两边同时加上一次项系数一半的平方，左边就是完全平方式，右边就是常数，然后利用平方根的定义即可求解.

【详解】 解： $3x^2 - 8x - 3 = 0$,

$$3x^2 - 8x = 3,$$

$$x^2 - \frac{8}{3}x = 1,$$

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9},$$

$$x - \frac{4}{3} = \pm \frac{5}{3},$$

$$\therefore x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{3}.$$

【点睛】 本题主要考查了配方法解一元二次方程，熟练掌握配方法的步骤是解题关键.

24. 解方程: $(2x+1)^2 = -6x-3$.

【答案】 $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -2$

【解析】

【分析】 用因式分解法解一元二次方程即可.

【详解】 解: $\because (2x+1)^2 = -6x-3,$

$$\therefore (2x+1)^2 + 3(2x+1) = 0,$$

$$\therefore (2x+1)(x+2) = 0,$$

$$\therefore 2x+1=0 \text{ 或 } x+2=0,$$

$$\therefore x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -2$$

【点睛】 本题主要考查了用因式分解法解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法是解题的关键

25. 解方程: $4(x+3)^2 - 9(x-3)^2 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = 15$

【解析】

【分析】 方程左边利用平方差公式分解因式后，利用两数相乘积为 0，两因式中至少有一个为 0 转化为两个一元一次方程来求解.

【详解】 方程变形得: $[2(x+3) + 3(x-3)][2(x+3) - 3(x-3)] = 0,$

即 $(5x-3)(-x+15) = 0,$

解得: $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = 15.$

【点睛】 此题考查了解一元二次方程-因式分解法，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

26. 先化简: $\frac{ba^3 - ab^3}{a+b}$ 求当 $a = \frac{1}{\sqrt{2}+1}, b = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 时的值.

【答案】 $ab(a-b)$; -2

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值，分母有理化；先根据分式的运算法则进行计算，然后得出 $a-b=-2, ab=1$ ，代入化简结果，即可求解。

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{ba^3 - ab^3}{a+b} \\ &= \frac{ab(a^2 - b^2)}{a+b} = \frac{ab(a+b)(a-b)}{a+b} = ab(a-b) \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

$$\therefore a-b = \sqrt{2}-1 - (\sqrt{2}+1) = -2, \quad ab = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$$

$$\therefore \text{原式} = 1 \times (-2) = -2$$

27. 先阅读下列解答过程，然后再解答：

形如 $\sqrt{m+2\sqrt{n}}$ 的化简，只要我们找到两个正数 a, b ，使 $a+b=m$ ， $ab=n$ ，使得 $(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 = m$ ，

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{n}$ ，那么便有： $\sqrt{m \pm 2\sqrt{n}} = \sqrt{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b} (a > b)$

例如：化简 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

解：首先把 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ 化为 $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$ ，这里 $m=7, n=12$ ，由于 $4+3=7, 4 \times 3=12$ ，即：

$$(\sqrt{4})^2 + (\sqrt{3})^2 = 7, \quad \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{12},$$

$$\text{所以 } \sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{7+2\sqrt{12}} = (\sqrt{\sqrt{4}+\sqrt{3}})^2 = 2+\sqrt{3}.$$

问题：

① 填空： $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

② 化简： $\sqrt{19-4\sqrt{15}}$ （请写出计算过程）

【答案】 (1) $\sqrt{3}+1$ ， $\sqrt{5}+2$ ； (2) $\sqrt{15}-2$.

【解析】

【分析】 由条件对式子进行变形，利用完全平方公式对 $\sqrt{(a)^2} = |a|$ 的形式化简后就可以得出结论了。

【详解】解：(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$$= \sqrt{3+1+2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$$

$$= \sqrt{3}+1$$

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5+4+4\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2}$$

$$= \sqrt{5}+2;$$

$$(2) \sqrt{19-4\sqrt{15}}$$

$$= \sqrt{15+4-4\sqrt{15}}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{15}-2)^2}$$

$$= \sqrt{15}-2$$

【点睛】本题考查了二次根式的化简求值，涉及了配方法的运用和完全平方根式的运用及二次根式性质的运用.

28. 小明在学习配方法时，将关于 x 的多项式 x^2-2x+3 配方成 $(x-1)^2+2$ ，发现当 $x-1$ 取任意一对互为相反数的数时，多项式 x^2-2x+3 的值是相等的. 例如：当 $x-1=\pm 2$ 时，即 $x=3$ 或 -1 时， x^2-2x+3 的值均为 6；当 $x-1=\pm 3$ 时，即 $x=4$ 或 -2 时， x^2-2x+3 的值均为 11.

于是小明给出一个定义：对于关于 x 的多项式，若当 $x-t$ 取任意一对互为相反数的数时，该多项式的值相等，就称该多项式关于 $x=t$ 对偶，例如 x^2-2x+3 关于 $x=1$ 对偶.

请你结合小明的思考过程，运用此定义解决下列问题：

(1) 多项式 $x^2-8x+10$ 关于_____对偶；

(2) 当 $x=m$ 或 $9-m$ 时，关于 x 的多项式 $x^2+2bx+c$ 的值相等，求 b 的值；

(3) 若整式 $(x^2+8x+16)(x^2-4x+4)$ 关于 $x=n$ 对偶，求 n 的值.

【答案】(1) $x=4$

(2) $b = -4.5$

(3) $n = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了配方法的应用，完全平方公式，整式乘法，正确理解新定理，判断出对称轴是解题关键.

(1) 将多项式配方得 $(x-4)^2 - 6$ ，再根据新定义判定即可；

(2) 将多项式配方得 $(x+b)^2 - b^2 + c$ ，再根据新定义，得到 $(m+b) + (9-m+b) = 0$ ，求解即可得到 b 的值；

(3) 结合完全平方公式对多项式进行配方，再根据新定义判定即可.

【小问 1 详解】

解： $\because x^2 - 8x + 10 = (x-4)^2 - 6$ ，

$\therefore$ 当 $x-4$ 取任意一对互为相反数的数时，该多项式的值相等，

$\therefore$ 多项式 $x^2 - 8x + 10$ 关于 $x = 4$ 对偶，

故答案为： $x = 4$

【小问 2 详解】

解： $\because x^2 + 2bx + c = (x+b)^2 - b^2 + c$ ，

$\therefore$ 当 $x+b$ 取任意一对互为相反数的数时，该多项式的值相等，

$\therefore$ 当 $x = m$ 或 $9-m$ 时，关于 x 的多项 $x^2 + 2bx + c$ 的值相等，

$\therefore (m+b) + (9-m+b) = 0$ ，

解得： $b = -4.5$ ；

【小问 3 详解】

解： $(x^2 + 8x + 16)(x^2 - 4x + 4)^2$

$= (x+4)^2 (x-2)^2$

$= [(x+4)(x-2)]^2$

$= (x^2 + 2x - 8)^2$

$= [(x+1)^2 - 9]^2$

$\because$ 整式 $(x^2 + 8x + 16)(x^2 - 4x + 4)$ 关于 $x = n$ 对偶,

$\therefore n = -1$.