

2024 学年第一学期八年级数学阶段练习二

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____

一、选择题

1. 下列各式中，能与 $\sqrt{8}$ 合并的是（ ）

- A. $\sqrt{0.2}$ B. $\sqrt{12}$ C. $\sqrt{64}$ D. $\sqrt{98}$

【答案】D

【解析】

【分析】先将各个二次根式化成最简二次根式，再找出与 $\sqrt{8}$ 是同类二次根式即可得.

【详解】解： $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

A、 $\sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，与 $2\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，不可合并，此项不符合题意；

B、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，与 $2\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，不可合并，此项不符合题意；

C、 $\sqrt{64} = 8$ ，与 $2\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，不可合并，此项不符合题意；

D、 $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ ，与 $2\sqrt{2}$ 是同类二次根式，可以合并，此项符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了二次根式的化简、同类二次根式，熟练掌握二次根式的化简是解题关键.

2. 方程 $(m+2)x^{|m|} + 3mx + 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则（ ）

- A. $m = \pm 2$ B. $m = 2$ C. $m = -2$ D. m 的值无法确定.

【答案】B

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义，绝对值的性质即可求解.

【详解】解：方程 $(m+2)x^{|m|} + 3mx + 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，

$$\therefore \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ |m| = 2 \end{cases}, \text{解得}, \begin{cases} m \neq -2 \\ m = \pm 2 \end{cases},$$

$$\therefore m = 2,$$

故选：B.

【点睛】本题主要考查一元二次方程的定义，理解并掌握一元二次方程的定义，绝对值的性质是解题的关

键.

3. 对于任意的实数 m , 关于 x 的方程 $x^2 - mx - \frac{1}{2} = 0$ 的根的情况是 ()

- A. 有两个相等的实数根
B. 有两个不相等的实数根
C. 无实数根
D. 无法确定

【答案】 B

【解析】

【分析】 判断方程的根的情况, 只要看根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值的符号即可.

【详解】 解: $\because a=1, b=-m, c=-\frac{1}{2}$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = m^2 + 2 > 0$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

故选: B.

【点睛】 此题主要考查了一元二次方程根的判别式, 掌握一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系: (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根; (2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根; (3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根, 是解决问题的关键.

4. 在下列四个命题中的逆命题中, 是真命题的个数共有 ()

- ①相等的角是对顶角;
②等腰三角形腰上的高相等;
③直角三角形的两个锐角互余;
④全等三角形的三个角分别对应相等.

- A. 1 个
B. 2 个
C. 3 个
D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 分别写出个命题的逆命题, 即可求解.

【详解】 解: ①逆命题为对顶角相等, 是真命题;

②有两边上的高相等的三角形是等腰三角形, 是真命题;

③有两角互余的三角形是直角三角形, 是真命题;

④有三个角相等的两个三角形全等, 是假命题;

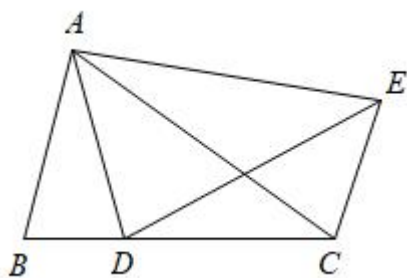
所以逆命题中, 是真命题的个数共有 3 个.

故选: C.

【点睛】 本题主要考查了判断命题的真假, 写出逆命题, 等腰三角形的判定, 全等三角形的性质等知识,

熟练掌握等腰三角形的判定，全等三角形的性质等知识是解题的关键.

5. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点A逆时针旋转得到 $\triangle ADE$ ，其中点B、C分别与点D、E对应，如果B、D、C三点恰好在同一直线上，那么下列结论错误的是（ ）



A. $\angle ACB = \angle AED$

B. $\angle BAD = \angle CAE$

C. $\angle ADE = \angle ACE$

D. $\angle DAC = \angle CDE$

【答案】D

【解析】

【分析】利用旋转的性质直接对A选项进行判断；利用旋转的性质得 $\angle BAC = \angle DAE$ ，再利用角的和差可得 $\angle BAD = \angle CAE$ ，则可对B选项进行判断；利用旋转的性质得 $\angle ADE = \angle B$, $AB = AD$, $AC = AE$ ，然后根据等腰三角形顶角相等时底角相等得到 $\angle B = \angle ACE$ ，则 $\angle ADE = \angle ACE$ ，则可对C选项进行判断；先判断 $\angle CDE = \angle BAD$ ，而 $\angle BAD$ 不能确定等于 $\angle DAC$ ，则可对D选项进行判断.

【详解】 $\because \triangle ABC$ 绕点A逆时针旋转得到 $\triangle ADE$

$\therefore \angle ACB = \angle AED$ ，则A选项的结论正确

由旋转的性质可得 $\angle BAC = \angle DAE$

即 $\angle BAD + \angle DAC = \angle CAE + \angle DAC$

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$ ，则B选项的结论正确

$\because \triangle ABC$ 绕点A逆时针旋转得到 $\triangle ADE$

$\therefore \angle ADE = \angle B$, $AB = AD$, $AC = AE$

$\therefore \triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是等腰三角形

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$

$\therefore \angle B = \angle ACE$

$\therefore \angle ADE = \angle ACE$ ，则C选项的结论正确

$\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD$ ，即 $\angle ADE + \angle CDE = \angle B + \angle BAD$

又 $\because \angle ADE = \angle B$

$$\therefore \angle CDE = \angle BAD$$

$\therefore AD$ 不能确定平分 $\angle BAC$

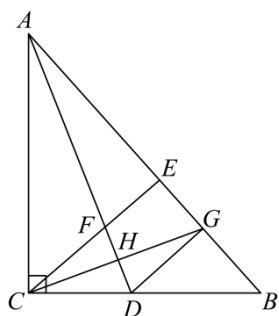
$\therefore \angle BAD$ 不能确定等于 $\angle DAC$

$\therefore \angle CDE$ 不能确定等于 $\angle DAC$ ，则 D 选项的结论错误

故选：D.

【点睛】本题考查了旋转的性质、等腰三角形的性质等知识点，掌握旋转的性质是解题关键.

6. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线， CE 是 AB 边上的高， AD 与 CE 交于点 F ，过点 D 作 $DG \parallel CE$ 交边 AB 于点 G ，联结 CG 交 AD 于点 H ，则下列结论中，不一定成立的是 ()



A. $CD = DG$

B. $CF = DG$

C. $FH = DH$

D. $EF = EG$

【答案】D

【解析】

【详解】本题考查了角平分线的性质，平行线的性质，三角形全等的判定和性质，线段垂直平分线的判定和性质，根据角平分线的性质可判断 $CD = DG$ ，根据全等三角形的性质可判断 $CF = DG$ ， $FH = DH$ ，进而可得出答案.

【解答】解： $\because CE$ 是 AB 边上的高，

$$\therefore CE \perp AB,$$

$$\because DG \parallel CE,$$

$$\therefore DG \perp AB,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, AD \text{ 是 } \angle BAC \text{ 的平分线},$$

$$\therefore CD = DG, \text{ 故 A 结论正确;}$$

$$\because AD = AD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AGD (\text{HL}),$$

$$\therefore AC = AG,$$

$$\therefore AD \text{ 垂直平分 } CG,$$

$$\therefore CH = HG,$$

$\because DG \parallel CE,$

$\therefore \angle FCH = \angle DGH, \angle CFH = \angle GDH,$

$\therefore \triangle CFH \cong \triangle GDH (AAS),$

$\therefore CF = DG, FH = DH,$ 故 C 结论正确;

$\therefore CD = CF,$ 故 B 结论正确;

$\therefore$ D 结论不一定正确.

故选: D.

二、填空题

7. 计算: $\sqrt{20} - \sqrt{80} + 5\sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 先根据二次根式的性质化简, 再合并, 即可求解.

【详解】 解: $\sqrt{20} - \sqrt{80} + 5\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$

故答案为: $3\sqrt{5}$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的加减混合运算, 熟练掌握二次根式的性质是解题的关键.

8. 方程 $3x^2 + 2x = 4$ 的根的判别式的值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 52

【解析】

【分析】 先根据一元二次方程的定义得出 a 、 b 、 c 的值, 再根据根的判别式计算公式即可得.

【详解】 解: 方程 $3x^2 + 2x = 4$ 变形为: $3x^2 + 2x - 4 = 0,$

$\therefore a = 3, b = 2, c = -4,$

$\therefore b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 4 + 48 = 52,$

故答案为: 52.

【点睛】 本题考查了根的判别式, 解题的关键是掌握 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $b^2 - 4ac$ 有如下关系:

当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当

$b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程无实数根.

9. 关于 x 的方程 $3x^2 + mx - 1 = 0$ 的一个根是 2, 则 $m =$ _____.

【答案】 $-\frac{11}{2}$

【解析】

【分析】 把 $x = 2$ 代入方程即可求得 m 的值.

【详解】 解: 把 $x = 2$ 代入 $3x^2 + mx - 1 = 0$, 得

$$3 \times 2^2 + 2m - 1 = 0$$

$$\text{解得 } m = -\frac{11}{2}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{11}{2}.$$

【点睛】 本题考查了方程的解的概念, 将已知解代入原方程, 即可求得原方程中字母的值, 理解方程的解是解题的关键.

10. 当 $x = \frac{1}{\sqrt{3}-2}$ 时, 代数式 $x^2 + 4x + 6$ 的值是_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 把已知条件进行分母有理化的运算, 再把所求的式子进行整理, 代入相应的值运算即可.

$$\text{【详解】 解: } \because x = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = -\sqrt{3}-2,$$

$$\therefore x^2 + 4x + 6$$

$$= (x+2)^2 + 2$$

$$= (-\sqrt{3}-2+2)^2 + 2$$

$$= (-\sqrt{3})^2 + 2$$

$$= 3 + 2$$

$$= 5.$$

故答案为: 5.

【点睛】 本题主要考查二次根式的化简求值, 分母有理化, 解答的关键是对相应的运算法则的掌握.

11. 请将命题"等腰三角形的底角相等"改写为"如果.....,那么....."的形

式:_____.

【答案】如果一个三角形是等腰三角形,那么它的两个底角相等

【解析】

【分析】命题中的条件是一个三角形是等腰三角形,放在“如果”的后面,结论是它的两个底角相等,应放在“那么”的后面.

【详解】题设为:一个三角形是等腰三角形,结论为:这个三角形的两个底角相等,
故写成“如果…那么…”的形式是:如果一个三角形是等腰三角形,那么这个三角形的两个底角相等.
故答案为如果一个三角形是等腰三角形,那么这个三角形的两个底角相等.

【点睛】本题主要考查了将原命题写成条件与结论的形式,“如果”后面是命题的条件,“那么”后面是条件的结论,解决本题的关键是找到相应的条件和结论,比较简单.

12. 底边为已知线段 BC 的等腰三角形 ABC 的顶点 A 的轨迹是_____.

【答案】底边 BC 的垂直平分线 (除底边中点外)

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形三线合一的性质,熟练掌握性质并运用是解题的关键.
由等腰三角形三线合一的性质可以确定答案.

【详解】在已知线段 BC 的等腰三角形 ABC 中,根据等腰三角形三线合一的性质,顶点 A 必在底边 BC 的垂直平分线上.

故答案为:底边 BC 的垂直平分线 (除底边中点外).

13. 如果关于 x 的方程 $mx^2 - (2m+1)x + m - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > -\frac{1}{8}$ 且 $m \neq 0$

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义和根的判别式的意义得到 $m \neq 0$ 且 $\Delta = [-(2m+1)]^2 - 4m(m-1) > 0$,
然后求出两不等式的公共部分即可.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的方程 $mx^2 - (2m+1)x + m - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore m \neq 0 \text{ 且 } \Delta = [-(2m+1)]^2 - 4m(m-1) > 0,$$

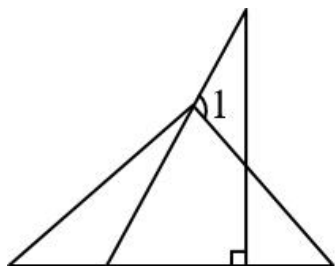
$$\text{解得: } m > -\frac{1}{8} \text{ 且 } m \neq 0,$$

$$\therefore m \text{ 的取值范围是 } m > -\frac{1}{8} \text{ 且 } m \neq 0.$$

$$\text{故答案为: } m > -\frac{1}{8} \text{ 且 } m \neq 0.$$

【点睛】本题考查根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根。上面的结论反过来也成立。也考查了一元二次方程的定义。熟练掌握一元二次方程根判别式是解题的关键。

14. 将一副三角板如图所示放置（其中含 30° 角的三角板的一条较短直角边与另一块三角板的斜边放置在一一直线上），那么图中 $\angle 1 =$ _____ 度。



【答案】105

【解析】

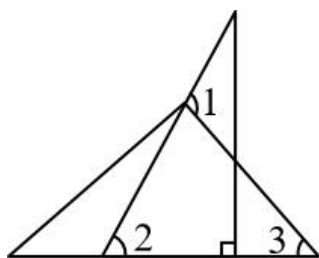
【分析】根据三角形的外角定理，即可得出 $\angle 1$ 的度数。

【详解】解：由题意可得， $\angle 2 = 60^\circ$ ， $\angle 3 = 45^\circ$ ，

由三角形外角定理，

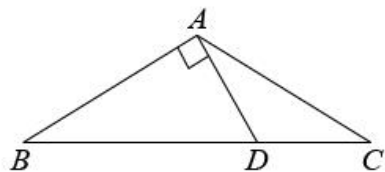
$$\angle 1 = \angle 2 + \angle 3 = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ.$$

故答案为 105.



【点睛】本题考查三角形的外角的性质，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型。

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $AD \perp AB$ ，交 BC 于点 D 且 $AD = 1$ ，则 $BC =$ _____



【答案】3

【解析】

【分析】利用等腰三角形的性质可得 $\angle B = \angle C = 30^\circ$ ， $\angle C = \angle CAD$ ，然后利用含 30° 角的直角三角形可得 BD 长，进而可得答案.

【详解】解： $\because AB = AC$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\because AD \perp AB,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ, AD = 1,$$

$$\therefore BD = 2,$$

$$\because \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 30^\circ,$$

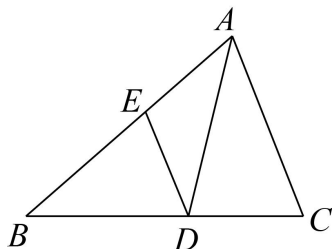
$$\therefore AD = CD = 1,$$

$$\therefore CB = 3,$$

故答案为：3.

【点睛】本题主要考查了直角三角形的性质，以及等腰三角形的判定和性质，关键是掌握在直角三角形中， 30° 角所对的直角边等于斜边的一半.

16. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ， $DE \parallel AC$ ，若 $\angle B = 55^\circ$ ， $\angle C = 75^\circ$ ，那么 $\angle ADE =$ _____ $^\circ$.



【答案】25

【解析】

【分析】根据三角形内角和的性质求得 $\angle BAC$ 的度数，再根据角平分线和平行线的性质，求解即可.

【详解】解：由三角形内角和的性质可得： $\angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 50^\circ$

又 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 25^\circ$$

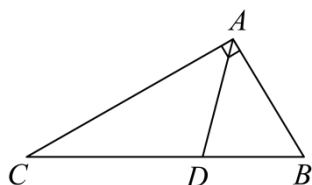
又 $\because DE \parallel AC$

$$\therefore \angle ADE = \angle CAD = 25^\circ$$

故答案为：25.

【点睛】此题考查了三角形内角和定理以及角平分线的定义，解题的关键是熟练掌握相关基础知识.

17. 若一个三角形中一个角的度数是另一个角的度数的3倍，则称这样的三角形为“和谐三角形”. 例如，三个内角分别为 $120^\circ, 20^\circ, 40^\circ$ 的三角形是“和谐三角形”，如图， $\angle CAB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，当 $\triangle ADC$ 是“和谐三角形”时， $\angle DAB$ 的度数是_____.



【答案】 30° 或 80° 或 52.5° 或 0° .

【解析】

【分析】分四种情况进行讨论：①当 $\angle ADC = 3\angle C$ 时；②当 $\angle C = 3\angle CAD$ 时；③当 $\angle ADC = 3\angle CAD$ 时；④当 $\angle CAD = 3\angle C$ 时. 根据“和谐三角形”的定义求解即可.

【详解】解： $\because \angle CAB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = 90^\circ - \angle ABC = 30^\circ.$$

当 $\triangle ADC$ 是“和谐三角形”时，分四种情况：

①当 $\angle ADC = 3\angle C$ 时， $\angle ADC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle CAD = 90^\circ - \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle CAB - \angle CAD = 30^\circ;$$

②当 $\angle C = 3\angle CAD$ 时， $\angle CAD = 10^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAB = \angle CAB - \angle CAD = 80^\circ;$$

③当 $\angle ADC = 3\angle CAD$ 时，

$$\therefore \angle ADC + \angle CAD = 180^\circ - \angle C = 150^\circ$$

$$\therefore \angle CAD = \frac{1}{4} \times 150^\circ = 37.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle CAB - \angle CAD = 52.5^\circ.$$

④当 $\angle CAD = 3\angle C$ 时， $\angle CAD = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAB = \angle CAB - \angle CAD = 0^\circ.$$

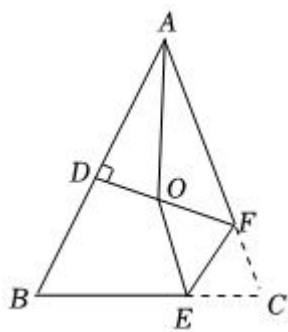
综上所述， $\angle DAB$ 的度数是 30° 或 80° 或 52.5° 或 0° .

故答案为： 30° 或 80° 或 52.5° 或 0° .

【点睛】本题考查了新定义，三角形内角和定理，理解“和谐三角形”的定义并且能够应用是解题的关键.

18. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 55^\circ$ ， $\angle BAC$ 的平分线与 AB 的垂直平分线交于点 O ，将 $\angle C$

沿 EF (E 在 BC 上, F 在 AC 上) 折叠, 点 C 与点 O 恰好重合, 则 $\angle OEB$ 为_____度.

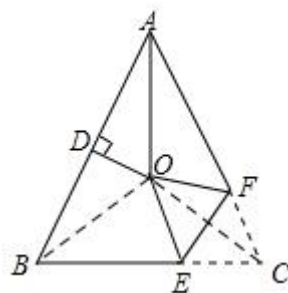


【答案】 70

【解析】

【分析】如图, 连接 OB , OC , 先根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理可得 $\angle ABC = \angle ACB = 62.5^\circ$, 由角平分线和线段垂直平分线的性质可得 $\angle OAB = \angle OBA = 27.5^\circ$, 证明 $\triangle BAO \cong \triangle CAO$, 得到 $OB = OC$, 即可得答案.

【详解】解: 如图, 连接 OB , OC ,



$$\because AB = AC, \angle BAC = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 55^\circ) = 62.5^\circ$$

$$\because AO \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle CAO = \frac{55^\circ}{2} = 27.5^\circ,$$

$$\because OD \text{ 是 } AB \text{ 的垂直平分线},$$

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 27.5^\circ,$$

$$\because AB = AC, OA = OA,$$

$$\therefore \triangle BAO \cong \triangle CAO (SAS),$$

$$\therefore OB = OC, \quad \angle AOC = \angle OBA = 27.5^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 62.5^\circ - 27.5^\circ = 35^\circ,$$

由折叠得: $OE = EC$,

$$\therefore \angle COE = \angle ECO = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle OEC = 180^\circ - 2 \times 35^\circ = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle OEB = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

故答案为: 70.

【点睛】此题主要考查了折叠的性质, 角平分线的定义, 线段垂直平分线的性质, 三角形全等的性质和判定, 等腰三角形的性质、三角形的内角和定理等知识, 证明 $OB = OC$ 是解本题的关键.

三、解答题

19. 计算:

$$(1) \sqrt{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 9\sqrt{\frac{1}{27}};$$

$$(2) 2x^2\sqrt{\frac{1}{2x}} - 3\sqrt{2x^3} + x\sqrt{18x}.$$

【答案】(1) 2 (2) $x\sqrt{2x}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算, 分母有理化, 准确熟练地进行计算是解题的关键.

(1) 先把每一个二次根式化成最简二次根式, 然后再进行计算即可解答;

(2) 先把每一个二次根式化成最简二次根式, 然后再进行计算即可解答.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \sqrt{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 9\sqrt{\frac{1}{27}}$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} - \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{4-2\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= 2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } 2x^2 \sqrt{\frac{1}{2x}} - 3\sqrt{2x^3} + x\sqrt{18x}$$

$$= x\sqrt{2x} - 3x\sqrt{2x} + 3x\sqrt{2x}$$

$$= x\sqrt{2x}.$$

20. 解方程

$$(1) \quad 2x^2 - 4x - 1 = 0;$$

$$(2) \quad 4(x-2)^2 = (3x-1)^2$$

【答案】 (1) $x_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$

$$(2) \quad x_1 = -3, x_2 = 1$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程—公式法，因式分解法，熟练掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

(1) 利用公式法求解一元二次方程即可；

(2) 利用因式分解法求解一元二次方程即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } 2x^2 - 4x - 1 = 0,$$

$$\therefore a = 2, b = -4, c = -1,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 24 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{2-\sqrt{6}}{2}.$$

【小问 2 详解】

解: $4(x-2)^2 = (3x-1)^2$,

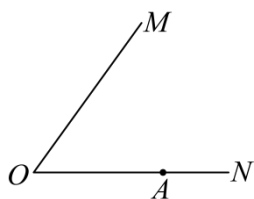
$$[2(x-2)]^2 - (3x-1)^2 = 0,$$

$$\therefore [2(x-2) - (3x-1)][2(x-2) + (3x-1)] = 0,$$

$$\therefore 2(x-2) - (3x-1) = 0 \text{ 或 } 2(x-2) + (3x-1) = 0,$$

$$\therefore x_1 = -3, x_2 = 1.$$

21. 已知: 如图, 点 A 在 $\angle MON$ 的边 ON 上, 求作点 P , 使点 P 到直线 OM 和直线 ON 的距离相等, 且 $PO = OA$; (保留作图痕迹, 不需要写出作图步骤)

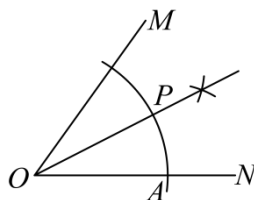


【答案】见详解

【解析】

【分析】本题考查了作图—复杂作图、角平分线的性质, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键. 作 $\angle MON$ 的角平分线, 再以 O 为圆心, OA 为半径, 于角平分线的交点即为点 P .

【详解】解: 如图, 点 P 即为所求.



22. 先化简, 再求值: $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab} - b} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{a - b}$, 其中 $a = \frac{4}{3 + \sqrt{5}}$, $b = 3 + \sqrt{5}$.

【答案】 $2\sqrt{ab}$, 4

【解析】

【分析】先根据二次根式的性质, 分式的性质, 将代数式化简, 将 a 的分母有理化, 再代入原式即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{ab} - b} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{a - b} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} - \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \left[\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right] \div \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\
&= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \div \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\
&= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \left[\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \right] \div \frac{\sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\
&= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \frac{2\sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \times \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{b}} \\
&= 2\sqrt{ab},
\end{aligned}$$

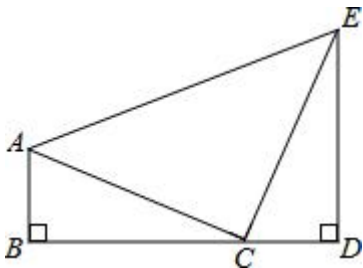
$$\text{且 } a = \frac{4}{3 + \sqrt{5}} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{4(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} = 3 - \sqrt{5}, \quad b = 3 + \sqrt{5},$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{原式} &= 2\sqrt{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} \\
&= 2\sqrt{9 - 5} \\
&= 4
\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了分式的化简求值，二次根式的化简，平方差公式，熟练掌握二次根式的化简是解题的关键.

23. 如图， AB 、 ED 分别垂直于 BD ，点 B 、 D 是垂足，且 $AB=CD$ ， $AC=CE$ ，

求证： $\triangle ACE$ 是直角三角形.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 先根据垂直的定义得到 $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，再根据“HL”判断 $Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle CDE$ ，得到 $\angle 1 = \angle 3$ ，由于 $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ ，所以 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，则可利用平角的定义得到 $\angle ACE = 90^\circ$ ，于是可判断 $\triangle ACE$ 是直角三角形.

【详解】证明： $\because AB \perp BD, ED \perp BD,$

$$\therefore \angle B = \angle D = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle CDE$ 中

$$\begin{cases} AB = CD \\ AC = CE \end{cases}$$

$$\therefore Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle CDE \text{ (HL)},$$

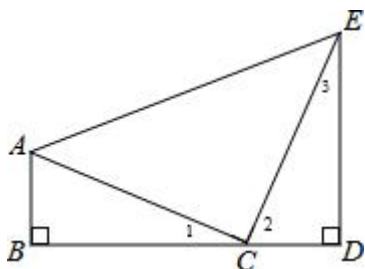
$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\because \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ACE$ 是直角三角形.



【点睛】本题考查了全等三角形的判断与性质：全等三角形的判定是结合全等三角形的性质证明线段和角相等的重要工具. 在判定三角形全等时，关键是选择恰当的判定条件. 在应用全等三角形的判定时，要注意三角形间的公共边和公共角，必要时添加适当辅助线构造三角形.

24. 今年某超市以每件 25 元的进价购进一批商品，当商品售价为 40 元时，三月份销售 256 件，四、五月该商品十分畅销，销售量持续上涨，在售价不变的基础上，五月份的销售量达到 400 件.

(1) 求四、五这两个月的月平均增长率.

(2) 从六月份起，商场为了减少库存，从而采用降价促销方式，经调查发现，该商品每降价 1 元，月销量增加 5 件，当商品降价多少元时，商场月获利 4250 元？

【答案】(1) 四、五这两个月的月平均增长率 25%；

(2) 当商品降价 5 元时，商场月获利 4250 元.

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用.

(1) 设四月，五月的月平均增长率为 x ，根据题意，得 $256(1+x)^2 = 400$ ，解方程即可；

(2) 设降价 m 元，商场月获利 4250 元，根据题意，得 $(40-m-25)(400+5m) = 4250$ ，解方程即可.

【小问 1 详解】

解：设四月，五月的月平均增长率为 x ，

根据题意，得 $256(1+x)^2 = 400$ ，

解得 $x_1 = 0.25 = 25\%$ ， $x_2 = -2.25$ （舍去），

答：四、五这两个月的月平均增长率 **25%**；

【小问 2 详解】

解：设降价 m 元，商场月获利 4250 元，

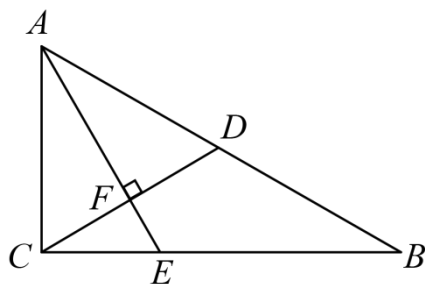
根据题意，得

$$(40 - m - 25)(400 + 5m) = 4250,$$

解得 $m_1 = 5$ ， $m_2 = -70$ （舍去），

答：当商品降价 5 元时，商场月获利 4250 元.

25. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是斜边 AB 上的中线，过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 F ，交 CB 于点 E .



(1) 求证： $\angle CAE = \angle B$ ；

(2) 若 $\angle EAB = \angle DCB$ ，求证： $BE = 2CE$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $AE \perp CD$ ，得出 $\angle CAE + \angle ACF = 90^\circ$ ，根据 $\angle ACF + \angle DCB = 90^\circ$ ，推出 $\angle CAE = \angle DCB$ ，根据 CD 是斜边 AB 上的中线，得出 $CD = BD = \frac{1}{2}AB$ ，进而得出 $\angle B = \angle DCB$ ，即可等量代换求证；

(2) 由 (1) 可得： $\angle CAE = \angle DCB = \angle B$ ，则 $\angle CAE = \angle DCB = \angle B = \angle EAB$ ，得出则 AE 平分 $\angle BAC$ ，推出 $AC = AD$ ，进而得出 $\triangle ACD$ 为等边三角形，则 $\angle CAE = \frac{1}{2}\angle CAD = 30^\circ$ ，得出 $AE = 2CE$ ，根据等角对等边得出 $AE = BE$ ，即可求证.

【小问 1 详解】

证明: $\because AE \perp CD$,

$$\therefore \angle CAE + \angle ACF = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle DCB,$$

$\because CD$ 是斜边 AB 上的中线,

$$\therefore CD = BD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \angle B = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle B;$$

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可得: $\angle CAE = \angle DCB = \angle B$,

$$\because \angle EAB = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle DCB = \angle B = \angle EAB, \text{ 则 } AE \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\because AE \perp CD,$$

$$\therefore AC = AD,$$

$\because CD$ 是斜边 AB 上的中线,

$$\therefore CD = AD,$$

$$\therefore \triangle ACD \text{ 为等边三角形, 则 } \angle CAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \frac{1}{2}\angle CAD = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = 2CE,$$

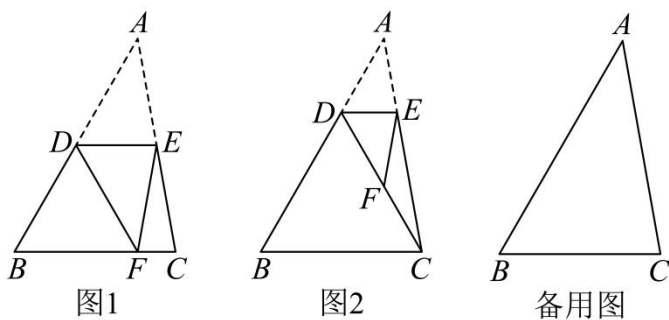
$$\because \angle B = \angle EAB,$$

$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore BE = 2CE.$$

【点睛】 本题主要考查了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 等边三角形的判定和性质, 等腰三角形等角对等边, 解题的关键是熟练掌握相关性质定理, 并灵活运用.

26. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 60^\circ$, D 是边 AB 上的动点, 过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E , 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折叠, 点 A 的对应点为点 F .



- (1) 如图 1, 若点 F 恰好落在边 BC 上, 判断 BDF 的形状, 并证明;
- (2) 如图 2, 若点 F 落在 ABC 内, 且 DF 的延长线恰好经过点 C , $CF = EF$, 求 $\angle A$ 的度数;
- (3) 若 $AB = 9$, 当 BDF 是直角三角形时, 直接写出 AD 的长.

【答案】 (1) BDF 是等边三角形, 理由见解析

(2) $\angle A = 40^\circ$

(3) AD 的长是 3 或 6

【解析】

【分析】 (1) 根据平行线的性质即可求出相等的角, 再根据等边三角形的判定即可得到结论;

(2) 根据折叠的性质可 $\angle ADC = 120^\circ$, 由 $CF = EF$ 可得 $\angle FEC = \angle FCE$, $\angle FEC = \angle FCE = x$, 再根据三角形的内角和定理构造方程求 x 即可;

(3) 根据题意分两种情况, 再根据图形以及折叠的性质得到 AD 的长度.

【小问 1 详解】

BDF 是等边三角形, 理由如下:

$$\because \angle B = 60^\circ, DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B = 60^\circ,$$

由折叠可得 $\angle FDE = \angle ADE = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle B = \angle BDF = 60^\circ,$$

$\therefore BDF$ 是等边三角形;

【小问 2 详解】

由折叠可得 $\angle A = \angle DFE$,

$$\because \angle FDE = \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 120^\circ,$$

$$\because CF = EF,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle FCE,$$

设 $\angle FEC = \angle FCE = x$ ，则 $\angle A = \angle DFE = \angle FEC + \angle FCE = 2x$ ，

在 $\triangle ADC$ 中， $\angle A + \angle ACD + \angle ADC = 180^\circ$ ，

即 $2x + x + 120^\circ = 180^\circ$ ，

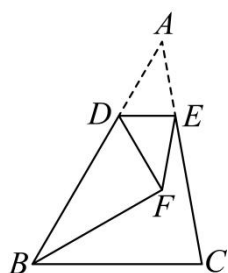
解得 $x = 20^\circ$ ，

$\therefore \angle A = 2x = 40^\circ$ ；

【小问 3 详解】

AD 的长是 3 或 6，理由如下：

如图，当 $\angle BFD = 90^\circ$ 时，点 F 在 ABC 内，



$\therefore \angle BDF = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DBF = 30^\circ$ ，

$\therefore BD = 2DF$ ，

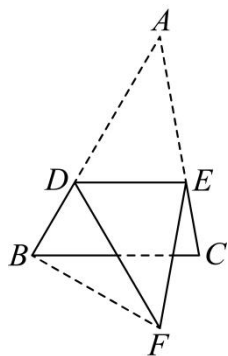
由折叠得 $DF = AD$ ，

$\therefore BD = 2AD$ ，

$\therefore 3AD = 9$ ，

$\therefore AD = 3$ ；

当 $\angle DBF = 90^\circ$ 时，点 F 在 ABC 外，



同理可得 $AD = DF = 2BD$ ，

$\therefore AD = 6$ 。

【点睛】 本题考查了折叠的性质，等边三角形的性质， 30° 直角三角形的性质，平行线的性质，根据题意画出图形是解题的关键。