

初二年级第一学期数学检测 1

一、填空题 (每空 2 分, 共 42 分)

1. 当 a _____ 时, $\sqrt{-a^2}$ 有意义; 若 $\frac{\sqrt{3-x}}{x-2}$ 有意义, 则 x 必须满足_____.

【答案】 ①. $=0$ ②. $x \leq 3$ 且 $x \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查代数式有意义的条件, 根据被开方数为非负数, 分式的分母不为 0, 进行求解即可.

【详解】 解: 当 $-a^2 \geq 0$, 即 $a=0$ 时, $\sqrt{-a^2}$ 有意义;

当 $3-x \geq 0$ 且 $x-2 \neq 0$, 即: $x \leq 3$ 且 $x \neq 2$ 时, $\frac{\sqrt{3-x}}{x-2}$ 有意义,

故答案为: $=0$, $x \leq 3$ 且 $x \neq 2$.

2. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 的一个有理化因式为_____, $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式为_____.

【答案】 ①. $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ ②. $\sqrt{x+y}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的有理化, 根据二次根式的乘法法则进行二次根式有理化. 本题二次根式有理化主要利用平方差公式和完全平方公式.

二次根式的有理化的目的就是去掉根号, 分别根据平方差公式和完全平方公式即可求解.

【详解】 解: $\because (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$,

$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y}$ 的一个有理化因式为 $\sqrt{x} - \sqrt{y}$;

$\because \sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x+y} = (\sqrt{x+y})^2 = x+y$,

故 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x+y}$,

故答案为: $\sqrt{x} - \sqrt{y}$, $\sqrt{x+y}$.

3. 已知最简二次根式 $\sqrt{2x+5}$ 与 $\sqrt{5x-4}$ 是同类二次根式, 则 x 的值为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查同类二次根式, 根据两个最简二次根式的被开方数相同, 这样的二次根式叫做同类二次根式, 进行求解即可.

【详解】解：由题意，得： $2x+5=5x-4$ ，

解得： $x=3$ ；

故答案为：3.

4. $4\sqrt{3}-7$ 的绝对值是_____， $4\sqrt{3}-7$ 的倒数是_____.

【答案】 ①. $7-4\sqrt{3}$ ②. $-7-4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】此题主要考查了二次根式分母有理化和二次根式比较大小，也考查了绝对值的性质和倒数的定义，正确掌握二次根式分母有理化是解题关键.

直接利用绝对值的性质和倒数的定义得出答案.

【详解】解： $\because (4\sqrt{3})^2 = 48 < 7^2$

$\therefore 4\sqrt{3}-7$ 的绝对值是： $7-4\sqrt{3}$.

$4\sqrt{3}-7$ 的倒数是 $\frac{1}{4\sqrt{3}-7} = \frac{1 \times (4\sqrt{3}+7)}{(4\sqrt{3}-7) \times (4\sqrt{3}+7)} = -7-4\sqrt{3}$ ；

故答案为： $7-4\sqrt{3}$ ， $-7-4\sqrt{3}$.

5. 若 $\sqrt{(3x-2)^2} = 2-3x$ ，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】本题考查二次根式的性质，解题的关键是熟练运用二次根式的性质，本题属于基础题型. 根据二次根式的性质列出不等式即可求出答案.

【详解】解：由题意可知： $2-3x \geq 0$ ，

$\therefore x \leq \frac{2}{3}$

故答案为： $x \leq \frac{2}{3}$.

6. 在 $\sqrt{0.2}$ ， $\sqrt{50}$ ， $\sqrt{45}$ ， $\sqrt{5a^4}$ ， $\sqrt{\frac{27}{125}}$ ， $\sqrt{\frac{1}{20}}$ 中不是 $\sqrt{5}$ 的同类二次根式的有_____.

【答案】 $\sqrt{50}$ ， $\sqrt{\frac{27}{125}}$

【解析】

【分析】 本题考查同类二次根式的概念，同类二次根式是化为最简二次根式后，被开方数相同的二次根式称为同类二次根式.

将二次根式 $\sqrt{0.2}$ ， $\sqrt{50}$ ， $\sqrt{45}$ ， $\sqrt{5a^4}$ ， $\sqrt{\frac{27}{125}}$ ， $\sqrt{\frac{1}{20}}$ 分别化简后得到与 $\sqrt{5}$ 是同类二次根式的个数.

【详解】 解：二次根式 $\sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ ， $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ， $\sqrt{5a^4} = a^2\sqrt{5}$ ，

$$\sqrt{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{3\sqrt{15}}{25}，\sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20} = \frac{\sqrt{5}}{10}，$$

与 $\sqrt{5}$ 不是同类二次根式是： $\sqrt{50}$ ， $\sqrt{\frac{27}{125}}$.

故答案为： $\sqrt{50}$ ， $\sqrt{\frac{27}{125}}$.

7. 化简：

(1) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) $(\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{(1-x)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 当 $ab < 0$ 时， $\sqrt{24a^2b^3} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(4) 当 $y > 0$ 时， $\sqrt{\frac{27y^2}{2x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 ①. $\sqrt{5}-2$ ②. $2x-2$ ③. $-2ab\sqrt{6b}$ ④. $\frac{3y\sqrt{6x}}{2x}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的化简，牢记二次根式有意义的条件（被开方数大于等于0）、二次根式的乘除的运算法则和最简二次根式的定义是解题的关键.

(1) 根据二次根式的性质化简即可；

(2) 根据二次根式有意义的条件可得到 $x \geq 1$ ，再根据二次根式的性质化简即可；

(3) 根据二次根式有意义的条件可得到 $a < 0, b > 0$ ，再根据二次根式的性质化简即可；

(4) 根据二次根式的性质化简和最简二次根式的定义计算即可.

【详解】 解：(1) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$ ；

(2) $\therefore x-1 \geq 0$ ，

$$\therefore x \geq 1,$$

$$\therefore (\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{(1-x)^2} = x-1 + |1-x| = x-1-1+x = 2x-2;$$

$$(3) \because ab < 0, \quad 24a^2b^3 \geq 0,$$

$$\therefore a < 0, b > 0,$$

$$\therefore \sqrt{24a^2b^3} = -2ab\sqrt{6b};$$

$$(4) \because \frac{27y^2}{2x} \geq 0, x \neq 0, y > 0,$$

$$\therefore x > 0,$$

$$\therefore \sqrt{\frac{27y^2}{2x}} = \frac{3y\sqrt{3} \cdot \sqrt{2x}}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{2x}} = \frac{3y\sqrt{6x}}{2x};$$

$$\text{故答案为: } \sqrt{5}-2, \quad 2x-2, \quad -2ab\sqrt{6b}, \quad \frac{3y\sqrt{6x}}{2x}.$$

8. 分母有理化:

$$(1) \frac{5}{\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 ①. $\sqrt{5}$ ②. $\sqrt{3}-1$ ③. $(x+1)\sqrt{x-1}$

【解析】

【分析】 本题考查分母有理化，根据分母有理化的方法，分子，分母同乘有理化因式，逐一进行计算即可.

【详解】 解: (1) $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \sqrt{5};$

故答案为: $\sqrt{5}$;

$$(2) \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}-1;$$

故答案为: $\sqrt{3}-1$;

$$(3) \frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = \frac{(x+1)(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}} = (x+1)\sqrt{x-1};$$

故答案为: $(x+1)\sqrt{x-1}$.

9. 比较大小:

$$(1) \frac{1}{2-\sqrt{5}} \text{ ————— } \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}};$$

$$(2) 2-\sqrt{3} \text{ ————— } \sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

【答案】 ①. $>$ ②. $<$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式比较大小, 分母有理化:

(1) 分母有理化后比较大小即可;

(2) 比较两数的倒数, 进而得出两数的大小关系即可.

$$\text{【详解】 解: (1) } \because \frac{1}{2-\sqrt{5}} = \frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = -(2+\sqrt{5}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{(\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{6})} = -(\sqrt{5}+\sqrt{6}),$$

$$\because 2+\sqrt{5} = \sqrt{4}+\sqrt{5} < \sqrt{5}+\sqrt{6},$$

$$\therefore -(2+\sqrt{5}) > -(\sqrt{5}+\sqrt{6}),$$

$$\therefore \frac{1}{2-\sqrt{5}} > \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}};$$

故答案为: $>$;

$$(2) \because \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3},$$

$$\because 2+\sqrt{3} = \frac{6+3\sqrt{3}}{3} > \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \frac{1}{2-\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}},$$

$$\therefore 2-\sqrt{3} < \sqrt{5}-\sqrt{2};$$

故答案为: $<$.

10. 已知 $a = \sqrt{b-8} + \sqrt{8-b} + \frac{1}{3}$, 则 $\sqrt{ab} =$ _____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ## $\frac{2}{3}\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查化简二次根式, 根据二次根式有意义的条件, 求出 a, b 的值, 再代入二次根式, 利用二次根式的性质计算即可.

【详解】 解: $\because a = \sqrt{b-8} + \sqrt{8-b} + \frac{1}{3}$,

$$\therefore b-8 \geq 0, 8-b \geq 0,$$

$$\therefore b-8=0,$$

$$\therefore b=8,$$

$$\therefore a = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3};$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

11. 等式 $\sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = -\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 成立的条件是_____.

【答案】 $-1 \leq x < 0$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式商的性质, 掌握二次根式商的性质是解题的关键.

利用二次根式的性质, 商的算术平方根等于算术平方根的商, 其中要满足的条件是分子的被开方数必须大于等于 0, 分母的被开方数大于 0, 列出关于 x 的一元一次不等式组求解即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x+1}}{|x|}$,

要使 $\sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = -\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 有意义,

$$\text{则} \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases},$$

解得: $-1 \leq x < 0$,

故答案为: $-1 \leq x < 0$.

12. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = -5$, 则 $\frac{\sqrt{x} + y}{3y - 2\sqrt{x}}$ 的值等于_____.

【答案】 $5\sqrt{2} + 7$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式, 二次根式的化简求值, 解题的关键是利用完全平方公式的非负性进行求解及掌握二次根式化简的基本步骤及方法. 先根据 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = -5$ 求出 x, y 的值, 再对 $\frac{\sqrt{x} + y}{3y - 2\sqrt{x}}$ 进行化简代值计算可得.

【详解】 解: $\because x^2 + y^2 - 4x - 2y = -5$,

$$\therefore x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 0,$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0,$$

$$\therefore x - 2 = 0, y - 1 = 0,$$

解得: $x = 2, y = 1$,

$$\therefore \frac{\sqrt{x} + y}{3y - 2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{3 \times 1 - 2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + 1) \times (3 + 2\sqrt{2})}{(3 - 2\sqrt{2}) \times (3 + 2\sqrt{2})} = 5\sqrt{2} + 7,$$

故答案为: $5\sqrt{2} + 7$.

二、选择题 (每题 2 分, 共 8 分)

13. 下列二次根式中, 最简二次根式为 ()

A. $\sqrt{5x^2y}$

B. $\sqrt{\frac{x}{3}}$

C. $\sqrt{4a^2 - 4a + 1}$

D. $\sqrt{a^2 - b^2}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查最简二次根式, 根据最简二次根式的特征, 被开方数不含能开方开的尽的因数或因式, 被开方数不含分母, 逐一进行判断即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{5x^2y}$, 被开方数含能开方开的尽的因式, 不是最简二次根式;

B、 $\sqrt{\frac{x}{3}}$ ，被开方数含有分母，不是最简二次根式；

C、 $\sqrt{4a^2-4a+1}=\sqrt{(2a-1)^2}$ ，被开方数含能开方开的尽的因式，不是最简二次根式；

D、 $\sqrt{a^2-b^2}$ ，是最简二次根式；

故选 D.

14. 下列各式从左到右一定正确的是 ()

A. $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

B. $\sqrt{(-a)\cdot(-b)}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

C. $\sqrt{-a^3}=-a\sqrt{-a}$

D. $\sqrt{4a^2}=2a$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的性质与化简，掌握二次根式的性质是解决问题的关键. 利用二次根式的性质进行化简进而得出答案.

【详解】 解：A. $\sqrt{a^2+b^2}$ 不能化简，原式不符合题意；

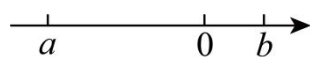
B. a, b 的符号不确定，需分情况，不符合题意；

C. $\because -a^3 \geq 0, \therefore a \leq 0, \therefore \sqrt{-a^3} = |a|\sqrt{-a} = -a\sqrt{-a}$ ，符合题意；

D. $\sqrt{4a^2} = 2|a|$ ， a 的符号不确定，不符合题意；

故选：C.

15. 实数 a, b 在数轴上的位置如图所示， $\sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{a^2}$ 化简的结果是 ()



A. b

B. $-b$

C. $-2a-b$

D. $2a+b$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，根据实数 a, b 在数轴上的位置，确定 a, b 和 0 的大小关系，本题在化简求值过程中应用了绝对值的性质. 先根据实数 a, b 在数轴上的位置，确定 a, b 和 0 的大小关系，然后根据绝对值的性质和二次根式的性质化简即可.

【详解】 解：由实数 a, b 在数轴上的位置可知 $a < 0, b > 0, -a > b$ ，

$$\therefore \sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{a^2}=|a+b|-|a|=-(a+b)+a=-a-b+a=-b,$$

故选：B.

16. 二次根式 $x\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 化成最简结果为 ()

A. $\sqrt{x}$

B. $-\sqrt{-x}$

C. $-\sqrt{x}$

D. $\sqrt{-x}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质和化简，解题的关键是掌握二次根式的性质和化简，根据二次根式有意义的条件及二次根式的性质与化简进行计算即可得.

【详解】解：由题意得， $x < 0$,

$$x\sqrt{-\frac{1}{x}} = -\sqrt{x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)} = -\sqrt{-x},$$

故选：B.

三、解答题 (30 分+6 分+8 分+6 分=50 分)

17. 计算

(1) $\sqrt{1\frac{1}{9}} - 10\sqrt{0.4} + 4\sqrt{\frac{1}{40}}$;

(2) $2\sqrt{3x^2y} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6x} + \sqrt{\frac{y^2}{x}}$;

(3) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$;

(4) $\sqrt{6} \div \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

(5) $\left(\frac{2}{b}\sqrt{ab^3} - 3b\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \div \sqrt{\frac{b}{a}} (b > 0)$;

(6) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \cdot \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b} \div \frac{1}{a+2\sqrt{ab}+b}$.

【答案】(1) $-\frac{22\sqrt{10}}{15}$

$$(2) \quad 2x\sqrt{2xy} + \frac{y}{x}\sqrt{x}$$

$$(3) \quad -2\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$(4) \quad 6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$$

$$(5) \quad -a$$

$$(6) \quad \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的运算，熟练掌握相关运算法则，正确的计算，是解题的关键：

(1) 先化简，再合并同类二次根式即可；

(2) 先化简，再进行乘法运算，然后合并同类二次根式即可；

(3) 先分母有理化，再合并同类二次根式即可；

(4) 先计算括号内，再进行除法运算即可；

(5) 先计算括号内，再进行除法运算即可；

(6) 根据乘除运算法则进行计算即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= \sqrt{\frac{10}{9}} - 10\sqrt{\frac{2}{5}} + 4\sqrt{\frac{1}{40}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{3} - 2\sqrt{10} + \frac{1}{5}\sqrt{10} \\ &= -\frac{22\sqrt{10}}{15}; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解：原式} &= 2x\sqrt{3y} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6x} + \frac{y}{x}\sqrt{x} \\ &= 2x\sqrt{2xy} + \frac{y}{x}\sqrt{x}. \end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\text{解：原式} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{10})}{(\sqrt{6} - \sqrt{10})(\sqrt{6} + \sqrt{10})} - \frac{\sqrt{6}(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+4\sqrt{5}}{-4} - \frac{6\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{6}$$

$$= -\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$= -2\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{2};$$

【小问 4 详解】

$$\text{解: 原式} = \sqrt{6} \div \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= \sqrt{6} \div \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$$

$$= \sqrt{6} \cdot \frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{6} \cdot \frac{6(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{6} \cdot (3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$$

$$= 6\sqrt{3}+6\sqrt{2};$$

【小问 5 详解】

$$\text{解: 原式} = \left(\frac{2}{b} \cdot b\sqrt{ab} - 3b \cdot \frac{\sqrt{ab}}{b} \right) \div \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= -\sqrt{ab} \div \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$= -\sqrt{ab \cdot \frac{a}{b}}$$

$$= -a;$$

【小问 6 详解】

$$\text{解: 原式} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(a-b)^2} \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(a-b)^2} \\
&= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \cdot (a-b)}{(a-b)^2} \\
&= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}.
\end{aligned}$$

18. 解不等式: $2\sqrt{2}x+2>3x$.

【答案】 $x < 4\sqrt{2}+6$

【解析】

【分析】 本题考查解一元一次不等式，二次根式的分母有理化，解题的关键是熟练掌握解不等式，二次根式分母有理化.

先移项，然后系数化为 1，然后分母有理化，即可.

【详解】 解: $2\sqrt{2}x+2>3x$,

移项得: $(2\sqrt{2}-3)x>-2$,

$$\because (2\sqrt{2})^2=8<3^2,$$

$$\therefore 2\sqrt{2}-3<0,$$

$$\therefore x < \frac{-2}{2\sqrt{2}-3},$$

$$\text{即 } x < \frac{-2(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}+3)} = 4\sqrt{2}+6.$$

综上, $x < 4\sqrt{2}+6$.

19. 当 $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}+2}$ 时, 求 $\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+b} + \frac{\sqrt{ab}-b}{a-\sqrt{ab}}$ 的值.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查已知字母的值，化简求值，先进行分母有理化，求出 a, b 的值，进而求出 ab 的值，然后代值计算即可.

$$\text{【详解】解: } \because a = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{2-\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+2)(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3},$$

$$\therefore ab = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3=1,$$

$$\therefore \sqrt{ab} = 1,$$

$$\therefore \frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}+b} + \frac{\sqrt{ab}-b}{a-\sqrt{ab}}$$

$$= \frac{a+1}{1+b} + \frac{1-b}{a-1}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}+1}{1+2-\sqrt{3}} + \frac{1-2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{3})^2}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{12+6\sqrt{3}}{6} + \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}$$

$$= 4.$$

20. 对于两个含有根号的无理数，如果它们的和等于它们的积，那么我们称这两个无理数互为“友好无理数”。

(1) 求 $\sqrt{2}$ 的“友好无理数”；

(2) 请你再写出一组符号不同的“友好无理数”，并说明理由。

【答案】(1) $2+\sqrt{2}$

(2) $-\sqrt{2}$ 和 $2-\sqrt{2}$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】该题主要考查了一元一次方程，分母有理化以及二次根式的混合运算，解题的关键是读懂题意。

(1) 设 $\sqrt{2}$ 的“友好无理数”是 a ，根据“友好无理数”的定义解答即可；

(2) 根据“友好无理数”的定义，写出一组符号不同的即可；

【小问1详解】

解：设 $\sqrt{2}$ 的“友好无理数”是 a ,

则 $\sqrt{2}+a=\sqrt{2}a$,

$$\text{故 } a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2} \times (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1) \times (\sqrt{2}+1)} = 2 + \sqrt{2},$$

$\therefore \sqrt{2}$ 的“友好无理数”是 $2 + \sqrt{2}$;

【小问2详解】

解：一组符号不同的“友好无理数”，如 $-\sqrt{2}$ 和 $2-\sqrt{2}$.

理由： $-\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}$,

$$-\sqrt{2} \times (2 - \sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 2 = 2 - 2\sqrt{2},$$

即 $-\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = -\sqrt{2} \times (2 - \sqrt{2})$,

故 $-\sqrt{2}$ 和 $2 - \sqrt{2}$ 是“友好无理数”.