

2024 学年第一学期八年级数学学科第二次阶段性检测试卷

(时间 90 分钟, 满分 150 分) 2024.12

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分).

1. 下列根式中, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{4}$ C. $\sqrt{20}$ D. $\sqrt[3]{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式的判断, 先把二次根式化为最简二次根式后, 根据被开方数相同的二次根式就是同类二次根式判断即可.

【详解】解: A. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 故该选项符合题意;

B. $\sqrt{4} = 2$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 故该选项不符合题意;

C. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, 不是同类二次根式, 故该选项不符合题意;

D. $\sqrt[3]{2}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 故该选项不符合题意;

故选: A.

2. 下列根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{ab^3}$ B. $\sqrt{a+b^3}$
C. $\sqrt{a^2+b^2-2ab}$ D. $\sqrt{8a}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查最简二次根式, 理解最简二次根式的意义是正确判断的关键. 根据最简二次根式的意义逐项进行判断即可.

【详解】解: A. $\sqrt{ab^3} = |b|\sqrt{ab}$, 故该选项不符合题意;

B. $\sqrt{a+b^3}$ 是最简二次根式, 故该选项符合题意;

C. $\sqrt{a^2+b^2-2ab} = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$, 故该选项不符合题意;

D. $\sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$, 故该选项不符合题意;

故选: B.

3. 已知反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图像上有两点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 且 $x_1 < x_2$, 那么下列结论正确的是 ()

A. $y_1 < y_2$

B. $y_1 > y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. y_1 与 y_2 之间的大小关系不能确定

【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查了比较反比例函数值的大小, 根据题意无法确定 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 这两点的位置, 故无法比较对应的函数值大小, 据此可得答案.

【详解】 解: $\because$ 反比例函数解析式为 $y = -\frac{1}{x}$,

$\therefore$ 反比例函数图像经过第二、四象限, 且在每个象限内 y 随 x 增大而增大,

当 (x_1, y_1) 位于第二象限, (x_2, y_2) 位于第四象限时, $x_1 < x_2$, 则 $y_1 > y_2$;

当 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 这两点位于同一象限时, $x_1 < x_2$, 则 $y_1 < y_2$;

由于 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 这两点的位置, 故由 $x_1 < x_2$ 无法判断 y_1 与 y_2 之间的大小关系,

故选: D.

4. 已知等腰三角形的周长为 36, 腰长为 x , 底边长为 y , 那么 y 关于 x 的函数关系式及定义域是 ()

A. $x = \frac{36-y}{2} (9 < y < 18)$

B. $y = 36 - 2x (9 < x < 18)$

C. $x = \frac{36-y}{2} (0 < y < 18)$

D. $y = 36 - 2x (0 < x < 18)$

【答案】B

【解析】

【分析】 根据等腰三角形的定义及三角形周长可列出函数关系式; 然后根据三角形的三边关系即可求出定义域.

【详解】 解: $\because$ 等腰三角形的周长是 36, 设腰长为 x , 底边长为 y ,

$\therefore y$ 关于 x 的函数关系式为 $y = 36 - 2x$,

根据题意, 得:
$$\begin{cases} x > 0 \\ 36 - 2x > 0 \\ 2x > 36 - 2x \end{cases},$$

解得: $9 < x < 18$,

即 $y = 36 - 2x (9 < x < 18)$,

故选: B.

【点睛】 本题主要考查了根据实际问题列函数关系式和三角形周长及等腰三角形的定义——等腰三角形两腰相等, 解题的关键是熟练掌握根据实际问题列函数关系式的方法和三角形周长, 等腰三角形的定义.

5. 下列命题正确的是 ()

- A. 到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上;
- B. 线段的垂直平分线上的点与该线段的两端点均能构成等腰三角形;
- C. 三角形一边的两端到这边中线所在的直线的距离相等;
- D. 两边及第三边上的高对应相等的两个三角形全等.

【答案】 C

【解析】

【分析】 A、B、D 均可举反例说明错误, C 选项可构成图形证明.

【详解】 解: 到角两边距离相等的点, 在角的平分线所在直线上, 很明显 A 的叙述有漏解的情况 (这个点可能在这个角的邻补角的角平分线上), 故 A 错误;

线段的垂直平分线上的点与该线段的两端点均能构成等腰三角形, 如果这个点在线段上不能构成三角形, 故 B 错误;

如下图, 当 $\triangle ABC$ 是以 BC 为底的等腰三角形, 根据等腰三角形三线合一即可得出三角形一边的两端到这边中线所在的直线的距离相等;

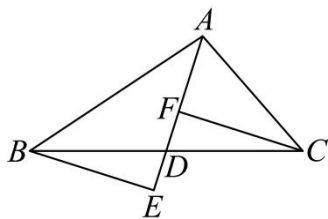
当 $\triangle ABC$ 是一般三角形, 如下图通过 AD 为中线可得 $BD=CD$, BE 、 CF 分别为 B 、 C 到线段 AE 的距离, 可得 $\angle CFD = \angle BED$,

根据对顶角的定义可得 $\angle ADC = \angle BDE$,

所以可得 $\triangle BDE \cong \triangle CDF$,

由此可得 $BE=CF$, 即三角形一边的两端到这边中线所在的直线的距离相等,

选项 C 正确;



有两边及第三边上的高对应相等, 这两边的夹角有可能一个是锐角一个是钝角, 所以这两个三角形不一定

全等，故 D 错误.

故选: C.

【点睛】本题考查角平分线的性质，垂直平分线的性质，全等三角形的性质和判定，等腰三角形的定义，说明一个命题正确要证明它，说明一个命题错误只需要举一个反例即可.

6. 在平面直角坐标系中，点 $A(-2,0)$ ， $B(0,2)$ ，在坐标轴上取一点 C ，使 ABC 为等腰三角形，符合条件的点 C 有 ()

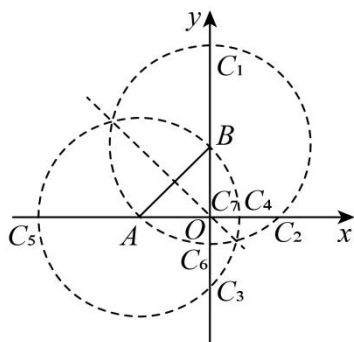
- A. 5 个 B. 6 个 C. 7 个 D. 8 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了坐标与图形的性质，等腰三角形的判定，分三种情况讨论，利用作圆和垂直平分线得到点是解答此题的关键. 由 A 、 B 坐标可得 $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，然后按 A 、 B 、 C 分别为顶点，即当 $AC = AB = 2\sqrt{2}$ ， $BC = BA = 2\sqrt{2}$ ， $CA = CB$ ，画出图形，即可找到点 C .

【详解】解：如图，



$$\because A(-2,0), B(0,2),$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

①当 A 为顶点时，即 $AC = AB = 2\sqrt{2}$ ，以 A 为圆心，以 $2\sqrt{2}$ 为半径作圆交两坐标轴于点 C_3 ， C_4 ， C_5 ，共 3 个点；

②当 B 为顶点时，即 $BC = BA = 2\sqrt{2}$ ，以 B 为圆心，以 $2\sqrt{2}$ 为半径作圆交两坐标轴于点 C_1 ， C_2 ， C_6 ，共 3 个点；

③当 C 为顶点时，即 $CA = CB$ ，作线段 AB 的垂直平分线，正好过原点，只有 1 个点，

$\therefore$ 符合条件的点 C 有 7 个.

故选: C.

二、填空题：(本大题共 12 题，每空 4 分，满分 48 分).

7. 方程 $x(x-2)=x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1=0$, $x_2=3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解法解一元二次方程，把方程变形为 $x(x-2)-x=0$ ，提公因式 x ，得出 $x(x-3)=0$ ，进一步即可求解.

【详解】 解： $x(x-2)=x$

$$x(x-2)-x=0.$$

$$x(x-2-1)=0,$$

$$x(x-3)=0,$$

$$x=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

$$\therefore x_1=0, \quad x_2=3,$$

故答案为： $x_1=0$, $x_2=3$.

8. 在实数范围内分解因式： $x^2-2x-1=$ _____.

【答案】 $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 根据完全平方方式进行配方，再运用平方差公式在实数范围内因式分解.

【详解】 $x^2-2x-1 = x^2-2x+1-2 = (x-1)^2-2 = (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

故答案为： $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

【点睛】 考核知识点：在实数范围内分解因式，运用配方法和平方差公式进行因式分解是关键.

9. 函数 $y=\sqrt{2-x}$ 的定义域为 _____.

【答案】 $x \leq 2$.

【解析】

【分析】 $y=\sqrt{2-x}$ 有意义，可得 $2-x \geq 0$ ，解不等式即可得到所求定义域.

【详解】 解： $y=\sqrt{2-x}$ 有意义，

可得 $2-x \geq 0$,

解得 $x \leq 2$.

故答案为 $x \leq 2$.

【点睛】 本题考查求函数的定义域的问题，解题时应根据函数的解析式，列出使解析式有意义的不等式，从而求出定义域来.

10. 已知正比例函数 $y = kx$ 的图像经过点 $(2, -4)$ ，那么 $k =$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查函数图像上点的坐标特征，牢记函数图像上任意一点的坐标都满足函数关系式是解题的关键. 利用函数图像上点的坐标特征，即可得出关于 k 的一元一次方程，解之即可得出 k 的值.

【详解】 解： $\because$ 正比例函数 $y = kx$ 的图像经过点 $(2, -4)$,

$$\therefore -4 = 2k,$$

$$\therefore k = -2.$$

故答案为： -2 .

11. 写出命题“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”的逆命题是_____.

【答案】 “一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形”

【解析】

【分析】 将题设与结论对调即可得到答案；

【详解】 解： 由题意可得，

逆命题为：“一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形”，

故答案为：“一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形”；

【点睛】 本题考查逆命题的定义：将题设与结论对调得到的命题叫逆命题.

12. 已知反比例函数 $y = \frac{2m-1}{x}$ ，若在每个象限内 y 随 x 的增大而增大，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查反比例函数的性质和解不等式，根据反比例函数的性质可得 $m-1 < 0$ ，解不等式即可.

【详解】解：∵反比例函数 $y = \frac{2m-1}{x}$ ，在每个象限内 y 随 x 的增大而增大，

$$\therefore 2m-1 < 0,$$

$$\text{解得： } m < \frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为： } m < \frac{1}{2}.$$

13. 将 $x = \frac{2+2y}{3y-3}$ 写成 $y = f(x)$ 的形式为_____.

$$\text{【答案】 } y = \frac{3x+2}{3x-2} \left(x \neq \frac{2}{3} \right)$$

【解析】

【分析】本题考查了函数关系式的变形，属于基本题型，正确理解题意、明确用含 x 的代数式表示 y 是关键。由题意把关系式变形为 y 关于 x 的代数式即可。

$$\text{【详解】解： } x = \frac{2+2y}{3y-3},$$

$$x(3y-3) = 2+2y$$

$$3xy-3x = 2+2y$$

$$3xy-2y = 3x+2$$

$$y(3x-2) = 3x+2$$

$$y = \frac{3x+2}{3x-2}, \text{ 且 } 3x-2 \neq 0, \text{ 即 } x \neq \frac{2}{3},$$

$$\text{故答案为： } y = \frac{3x+2}{3x-2} \left(x \neq \frac{2}{3} \right)$$

14. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 3mx + x + 2m - 1 = 0$ 的根的判别式的值为 1，那么 m 的值为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】本题考查了根的判别式、一元二次方程的定义以及因式分解法解一元二次方程，利用二次项系数非零及根的判别式为 1，找出 m 的值是解题的关键。由二次项系数非零可得出 $m \neq 0$ ，由根的判别式 $\Delta = 1$ 可得出关于 m 的方程，解之即可得出 m 的值。

【详解】解：∵方程 $mx^2 - 3mx + x + 2m - 1 = 0$ 为一元二次方程，

$$\therefore m \neq 0$$

∵方程 $mx^2 - 3mx + x + 2m - 1 = 0$ 的根的判别式的值为 1，

$$\therefore \Delta = (-3m+1)^2 - 4 \times m \times (2m-1) = 1,$$

$$\therefore 9m^2 - 6m + 1 - 8m^2 + 4m = 1,$$

$$\therefore m^2 - 2m = 0,$$

解得： $m_1 = 0$ (不合题意，舍去)， $m_2 = 2$.

故答案为： 2 .

15. $A(3, -1)$ 、 $B(1, 2)$ 、 $C(6, 1)$ 是三角形的三个顶点，则 ABC 是_____三角形.

【答案】等腰直角

【解析】

【分析】求出 AB, AC, BC 的长，再利用勾股定理逆定理，进行求解即可.

【详解】解：∵ $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{13}$ ， $BC = \sqrt{(6-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$ ，

$$AC = \sqrt{(6-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{13},$$

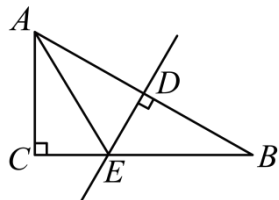
$$\therefore AB = AC, AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

∴ ABC 是等腰直角三角形；

故答案为：等腰直角.

【点睛】本题考查三角形的判定，勾股定理以及逆定理. 解题的关键是掌握两点间的距离公式.

16. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $AB = 10$. DE 垂直平分 AB ，分别交 AB 、 BC 于点 D 、 E ， CE 的长为_____.



【答案】 $\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】本题主要考查了勾股定理，线段垂直平分线的性质，由勾股定理求出 $BC = 8$ ，由线段垂直平分线

的性质得到 $AE = BE$ ，设 $CE = x$ ，则 $AE = BE = 8 - x$ ，再由勾股定理可得方程 $(8 - x)^2 = 6^2 + x^2$ ，解方程即可得到答案.

【详解】解：∵在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $AB = 10$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8,$$

∵ DE 垂直平分 AB ，

$$\therefore AE = BE,$$

设 $CE = x$ ，则 $AE = BE = 8 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中，由勾股定理得 $AE^2 = AC^2 + CE^2$ ，

$$\therefore (8 - x)^2 = 6^2 + x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{7}{4},$$

$$\therefore CE = \frac{7}{4},$$

故答案为： $\frac{7}{4}$.

17. 等腰 ABC 中，过 A 作 BC 的垂线，垂足为 D ，且 $AD = \frac{1}{2}BC$ ，则 ABC 底角的度数为_____.

【答案】 45° 或 75° 或 15° .

【解析】

【分析】 本题主要考查等腰三角形的定义和性质，直角三角形的性质，等边三角形的判定和性质，关键在于分类讨论思想的应用. 分点 A 是顶角顶点、点 A 是底角顶点、 AD 在 ABC 外部和 AD 在 ABC 内部三种情况，根据等腰三角形的性质、直角三角形的性质计算.

【详解】解：①如图 1，当点 A 是顶角顶点时，

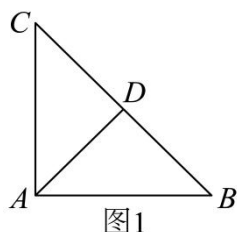


图1

$$\therefore AB = AC, AD \perp AC,$$

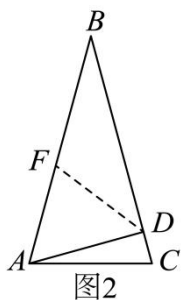
$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC, \angle DAB = \angle DAC, \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AD = DC = BD,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle ADB = \angle ADC = 45^\circ$$

②如图 2，当点 A 是底角顶点，且 AD 在 ABC 内部时，



设 $AB = BC = 2a$,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AD = a,$$

取 AB 的中点 F ，连接 DF ，

$$\therefore DF = AF = \frac{1}{2}AB = a,$$

$$\therefore DF = AF = AD = a,$$

$\therefore \triangle ADF$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle AFD = \angle ADF = 60^\circ,$$

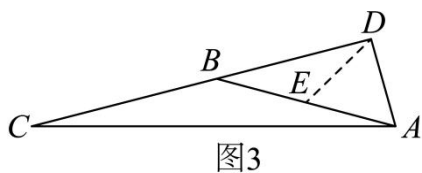
$$\therefore \angle FDB = 30^\circ, \quad \angle BFD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ,$$

故底角为 75° ，

③如图 3，当点 A 是底角顶点，且 AD 在 ABC 外部时，



设 $AB = BC = 2a$,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AD = a,$$

取 AB 的中点 E ，连接 DE ，

$$\therefore DE = AE = \frac{1}{2}AB = a,$$

$$\therefore DE = AE = AD = a,$$

$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CBA = 180^\circ - \angle DBA = 150^\circ$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

综上: $\triangle ABC$ 底角的度数为 45° 或 75° 或 15° .

故答案为: 45° 或 75° 或 15° .

18. 已知,在 $\triangle ABC$ 中, $BC=3$, $\angle A=22.5^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 翻折使得点 B 与点 A 重合, 折痕与边 AC 交于点 P , 如果 $AP=4$, 那么 AC 的长为_____

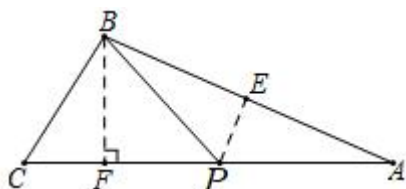
【答案】 $5+2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 过 B 作 $BF \perp CA$ 于 F , 构造直角三角形, 分两种情况讨论, 利用勾股定理以及等腰直角三角形的性质, 即可得到 AC 的长.

【详解】 分两种情况:

①当 $\angle C$ 为锐角时, 如图所示, 过 B 作 $BF \perp AC$ 于 F ,



由折叠可得, 折痕 PE 垂直平分 AB ,

$$\therefore AP = BP = 4,$$

$$\therefore \angle BPC = 2\angle A = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BFP$ 是等腰直角三角形,

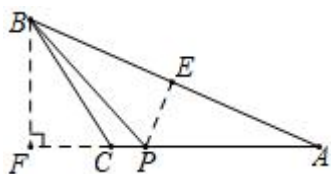
$$\therefore BF = PF = 2\sqrt{2},$$

又 $\because BC = 3$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle BFC \text{ 中, } CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = 1,$$

$$\therefore AC = AP + PF + CF = 5 + 2\sqrt{2};$$

②当 $\angle ACB$ 为钝角时, 如图所示, 过 B 作 $BF \perp AC$ 于 F ,



同理可得， $\triangle BFP$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore BF=FP=2\sqrt{2},$$

又 $\because BC=3$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle BCF \text{ 中, } CF=\sqrt{BC^2-BF^2}=1,$$

$$\therefore AC=AF-CF=3+2\sqrt{2}.$$

故答案为： $5+2\sqrt{2}$ 或 $3+2\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查了折叠问题以及勾股定理的运用，解决问题的关键是分两种情况画出图形进行求解。解题时注意：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 计算： $\frac{2}{\sqrt{3}-1}+(\sqrt{48}-3)\div\sqrt{3}+\sqrt{12}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{6}\right).$

【答案】 $5+8\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的混合计算，先分母有理化和计算二次根式乘法，再计算加减法即可得到答案。

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & \frac{2}{\sqrt{3}-1}+(\sqrt{48}-3)\div\sqrt{3}+\sqrt{12}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{6}\right) \\ & =\frac{2\times(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{3}-1)}+(\sqrt{16}-\sqrt{3})+\sqrt{8}+\sqrt{72} \\ & =\frac{2\times(\sqrt{3}+1)}{3-1}+4-\sqrt{3}+2\sqrt{2}+6\sqrt{2} \\ & =\sqrt{3}+1+4-\sqrt{3}+2\sqrt{2}+6\sqrt{2} \\ & =5+8\sqrt{2}. \end{aligned}$$

20. 解方程: $(2x-3)^2 = x(x-5) + 6$.

【答案】 $x_1 = \frac{7+\sqrt{13}}{6}$, $x_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{6}$.

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，把原方程变形为 $3x^2 - 7x + 3 = 0$ ，然后利用公式法解方程即可.

【详解】 解: $(2x-3)^2 = x(x-5) + 6$

$$4x^2 - 12x + 9 = x^2 - 5x + 6$$

$$4x^2 - x^2 - 12x + 5x + 9 - 6 = 0$$

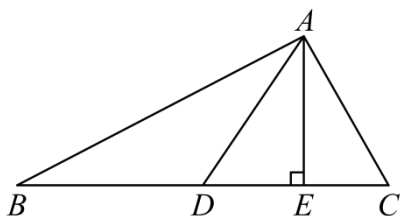
$$3x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\therefore \Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 13 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6},$$

$$\therefore x_1 = \frac{7+\sqrt{13}}{6}, \quad x_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{6}.$$

21. 已知: 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, 且 $AD = \frac{1}{2}BC$, $AE \perp BC$.



(1) 求证: $\angle CAE = \angle B$;

(2) 若 $\angle CAE = 30^\circ$, $CE = 2$, 求 AB 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 (1) 根据中线的定义推出 $AD = DC = BD$, 进而得到 $\angle B = \angle BAD$, $\angle C = \angle DAC$, 推出 $\angle B + \angle C = 90^\circ$, 根据同角的余角相等, 即可得证;

(2) 根据含 30° 度角的直角三角形的性质, 结合勾股定理进行求解即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD$ 为 BC 边上的中线,

$$\therefore BD = DC = \frac{1}{2}BC,$$

$$\because AD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AD = DC = BD,$$

$$\therefore \angle B = \angle BAD, \quad \angle C = \angle DAC,$$

$$\because \angle B + \angle BAD + \angle DAC + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore 2(\angle B + \angle C) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp BC,$$

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle B;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \angle AEC = 90^\circ, \quad \angle CAE = 30^\circ, \quad CE = 2,$$

$$\therefore AC = 2CE = 4,$$

$$\because \angle B + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = \angle CAE = 30^\circ,$$

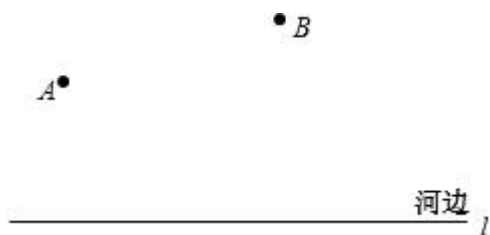
$$\therefore BC = 2AC = 8,$$

$$\therefore AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore AB \text{ 的长为 } 4\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查等边对等角, 勾股定理, 含 30° 度角的直角三角形. 解题的关键是掌握相关知识点, 并灵活运用.

22. 如图, 要在河边修建一个水泵站, 分别向张村 A 和李庄 B 送水, 已知张村 A、李庄 B 到河边的距离分别为 2km 和 7km, 且张、李二村庄相距 13km.



- (1) 水泵应建在什么地方，可使所用的水管最短？请在图中设计出水泵站的位置.
- (2) 如果铺设水管的工程费用为每千米 1500 元，为使铺设水管费用最节省，请求出最节省的铺设水管的费用为多少元？

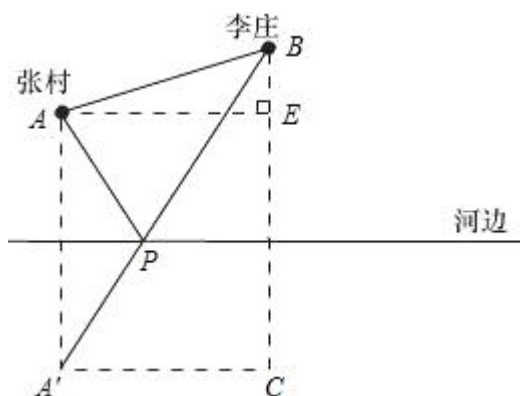
【答案】(1) 详见解析；(2) 22500

【解析】

【分析】(1) 作点 A 关于河边所在直线 l 的对称点 A'，连接 A'B 交 l 于 P，则点 P 为水泵站的位置；

(2) 利用了轴对称的性质可得 $AP=A'P$ ，在 $\triangle AEB$ 中利用勾股定理可以算出 AE 的长，再在 $\triangle ACB$ 中利用勾股定理算出 A'B 的长，根据两点之间线段最短的性质即可求解.

【详解】(1) 作 A 关于 l 的对称点 A'，再连接 A'B，A'B 与 l 交于点 P，P 点就是水泵站的位置；



(2) 过 B 点作 l 的垂线，过 A' 作 l 的平行线，
设这两线交于点 C，则 $\angle C=90^\circ$.

又过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E，

依题意 $BE=5$ ， $AB=13$ ，

$$\therefore AE^2 = AB^2 - BE^2 = 13^2 - 5^2 = 144.$$

$$\therefore AE = 12.$$

由平移关系， $A'C = AE = 12$ ，

$\triangle BA'C$ 中，

$$\therefore BC = 7 + 2 = 9, \quad A'C = 12,$$

$$\therefore A'B^2 = A'C^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225,$$

$$\therefore A'B = 15.$$

$$\therefore PA=PA',$$

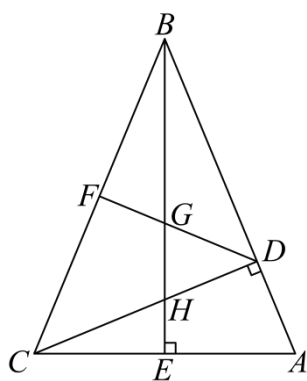
$$\therefore PA+PB=A'B=15.$$

$$\therefore 1500 \times 15 = 22500 \text{ (元)}.$$

答：最节省的铺设水管的费用为 22500 元

【点睛】此题主要考查了最短路线问题，正确作出图形，确定线路是解决此题的关键，也是难点．在直线 L 上的同侧有两个点 A、B，在直线 L 上有到 A、B 的距离之和最短的点存在，可以通过轴对称来确定，即作出其中一点关于直线 L 的对称点，对称点与另一点的连线与直线 L 的交点就是所要找的点

23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC = BA$ ， BE 平分 $\angle CBA$ 交边 CA 于点 E ， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为 D ， F 为 BC 中点， BE 与 DF 、 DC 分别交于点 G 、 H ．



(1) 求证： $BH = CA$ ；

(2) 求证： $BG^2 = GE^2 + EA^2$ ．

【答案】(1) 证明过程见详解 (2) 证明过程见详解

【解析】

【分析】(1) 根据题意可得 $\angle DBH + \angle DHB = 90^\circ$ ， $\angle DCB = 45^\circ$ ， $\triangle BCD$ 是等腰直角三角形，则 $DB = DC$ ， $\angle ECH = \angle DBH$ ，再证 $\triangle ACD \cong \triangle HBD$ ，得到 $BG = CA$ ，即可求解；

(2) 如图所示，连接 CG ，运用等腰三角形的性质，线段垂直平分线的性质得到 $AG = CG$ ， $BG = CG$ ，在 $Rt\triangle AGE$ 中由勾股定理得到 $AG^2 = GE^2 + EF^2$ ，即可求解．

【小问 1 详解】

证明： $\because BA = BC$ ， BE 平分 $\angle CBA$ ，

$$\therefore BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle ECH + \angle EHC = 90^\circ,$$

$$\because CD \perp AB, \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DBH + \angle DHB = 90^\circ, \angle DCB = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BCD$ 是等腰直角三角形, 则 $DB = DC$,

$$\therefore \angle EHC = \angle DHB,$$

$$\therefore \angle ECH = \angle DBH,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle HBD$ 中,

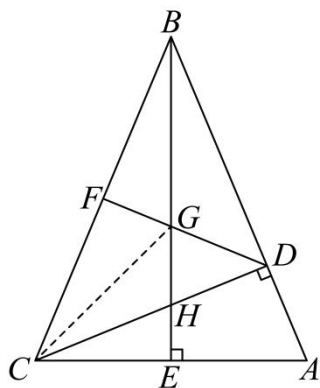
$$\begin{cases} \angle ACD = \angle HBD \\ CD = BD \\ \angle ADC = \angle HDB = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle HBD,$$

$$\therefore BG = CA;$$

【小问 2 详解】

证明: 如图所示, 连接 CG ,



$$\therefore AB = BC, BE \perp AC,$$

$$\therefore BE \text{ 垂直平分 } AC,$$

$$\therefore AG = CG,$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 是 } BC \text{ 的中点, } BD = CD,$$

$$\therefore DF \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore BG = CG,$$

$$\therefore AG = BG, BG^2 = GE^2 + AE^2,$$

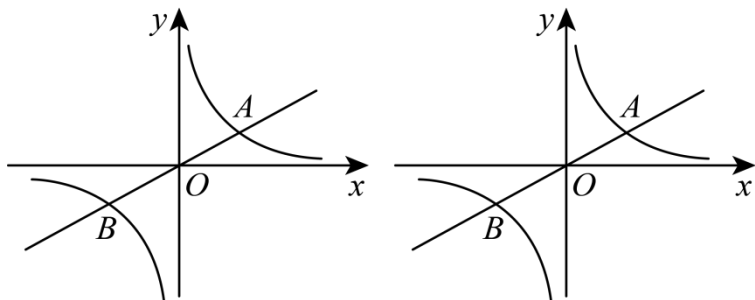
$$\text{在 } Rt\triangle AGE \text{ 中, } AG^2 = GE^2 + EF^2,$$

$$\therefore BG^2 = GE^2 + EA^2.$$

【点睛】 本题主要考查等腰三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 线段垂直平分线的性质, 勾

股定理的运用，掌握等腰三角形的判定和性质，线段垂直平分线的性质，勾股定理的运用是关键.

24. 如图所示，已知直线 $y = \frac{1}{2}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 交于 A 、 B 两点，且点 A 的横坐标为 4.



(1) k 的值为____，点 B 的坐标为_____.

(2) 若双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 上一点 C 的纵坐标为 8，求 $\triangle AOC$ 的面积.

(3) 过原点 O 的另一条直线 l 交双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 于 P 、 Q 两点 (点 P 在第一象限)，若由点 A 、 B 、 P 、 Q 为顶点组成的四边形面积为 24，求点 P 的坐标.

【答案】(1) 8; $(-4, -2)$

(2) 15 (3) $P(2, 4)$ 或 $P(8, 1)$

【解析】

【分析】(1) 根据一次函数与反比例函数相交于点 A ，将点 A 的横坐标代入 $y = \frac{1}{2}x$ ，求出点 A 的坐标，再将点 A 的坐标代入函数解析式即可求得 k 的值，联立两个函数解析式，求出点 B 的坐标即可；

(2) 求出点 C 的坐标为 $(1, 8)$ ，过点 A 、 C 分别作 x 轴、 y 轴的垂线，垂足为 M 、 N ，得矩形 $DMON$ ，得出 $DN = 4$ ， $CN = 1$ ， $MD = 8$ ， $CD = 4 - 1 = 3$ ， $MA = 2$ $AD = 8 - 2 = 6$ ，根据

$S_{\triangle AOC} = S_{\text{矩形} ONDM} - S_{\triangle ONC} - S_{\triangle CDA} - S_{\triangle OAM}$ ，求出结果即可；

(3) 设点 P 的横坐标为 m ($m > 0$ 且 $m \neq 4$)，则 $P\left(m, \frac{8}{m}\right)$ ，分两种情况：当 $0 < m < 4$ 时，当 $m > 4$ 时，分别画出图形求出结果即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 A 横坐标为 4，

$\therefore$ 把 $x = 4$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$ 得： $y = 2$ ，

$\therefore A(4, 2)$ ，

$\therefore$ 点 A 是直线 $y = \frac{1}{2}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的交点,

$$\therefore k = 4 \times 2 = 8,$$

$\therefore$ 反比例函数解析式为: $y = \frac{8}{x}$,

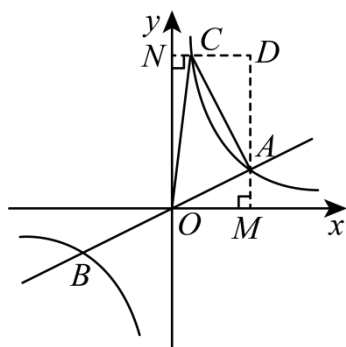
$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{8}{x} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为: $(-4, -2)$;

【小问 2 详解】

解: 如图,



$\therefore$ 点 C 在双曲线上, 纵坐标为 8,

$\therefore$ 把 $y = 8$ 代入 $y = \frac{8}{x}$ 得: $x = 1$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(1, 8)$,

过点 A 、 C 分别作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足为 M 、 N , 得矩形 $DMON$,

则 $DN = 4$, $CN = 1$, $MD = 8$, $CD = 4 - 1 = 3$, $MA = 2$, $AD = 8 - 2 = 6$,

$$\therefore S_{\triangle AOC} = S_{\text{矩形} ONDM} - S_{\triangle ONC} - S_{\triangle CDA} - S_{\triangle OAM}$$

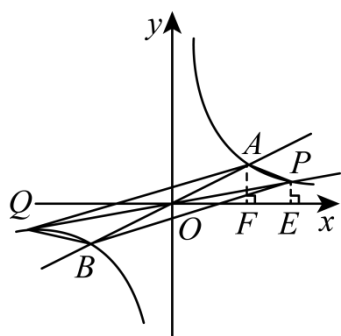
$$= 4 \times 8 - \frac{1}{2} \times 1 \times 8 - \frac{1}{2} \times 3 \times 6 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2$$

$$= 32 - 4 - 9 - 4$$

$$= 15;$$

【小问 3 详解】

解: $\therefore$ 反比例函数图象是关于原点 O 的中心对称图形,



$$\therefore S_{\triangle AOF} + S_{\text{四边形}AFEP} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle POE},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}PEFA} = S_{\triangle POA} = 6.$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{8}{m}\right) \cdot (m-4) = 6,$$

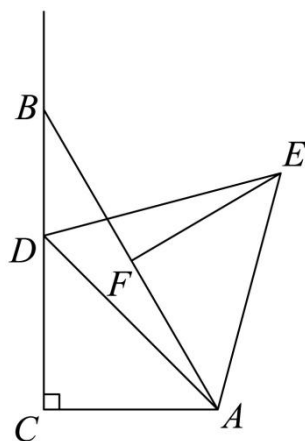
解得 $m_1 = 8$, $m_2 = -2$ (舍去),

$$\therefore P(8,1).$$

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $(2,4)$ 或 $(8,1)$.

【点睛】 本题主要考查反比例函数与一次函数的图像交点问题，反比例函数几何综合，求反比例函数解析式，解题的关键是数形结合，熟练掌握相关的性质，注意进行分类讨论.

25. 如图，已知在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle CAB=60^\circ$ ， $AB=10$ ，点 F 是 AB 中点，点 D 是射线 CB 上的一个动点， $\triangle ADE$ 是等边三角形，联结 EF .



(1) 当点 D 在线段 CB 上时,

①求证: $\triangle AEF \cong \triangle ADC$;

②联结 BE ，设 C 、 D 间距离为 x ， $\frac{BE}{BF} = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式及定义域;

(2) 当 $\angle DAB=15^\circ$ 时，求 $\triangle ADE$ 的面积 (直接写出答案).

【答案】(1) ①见解析; ② $y = \frac{\sqrt{25+x^2}}{5} (0 \leq x \leq 5\sqrt{3})$

(2) $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ 或 $50\sqrt{3} + 75$

【解析】

【分析】(1) ①证明: 直角 $\triangle ABC$ 中, 利用特殊角和斜边的中线是斜边的一半, 可得 $AF=BF=AC$, 再结合等边 $\triangle ADE$, 有 $AE=AD$, 利用 SAS 即可得 $\triangle ADC \cong \triangle EAF(SAS)$; ②根据 $\triangle ADC \cong \triangle EAF$, 有 $\angle EFA = \angle C = 90^\circ$, 结合 F 是 AB 中点, 即有 EF 是 AB 的中垂线, 进而有 $AE=EB$, $AD=AE=EB$, 在 $Rt\triangle ACD$ 中, 有

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 = 25 + x^2, \text{ 即 } AD = \sqrt{25+x^2}, \text{ 则有 } y = \frac{BE}{BF} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{5} (0 \leq x \leq 5\sqrt{3});$$

(2) 分两种情况讨论, 即当点在线段 BC 上和点在 CB 的延长线上两种情况, 分别求出 AD , 即可得等边 $\triangle ADE$ 的面积.

【小问1详解】

解: 证明①: 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle CAB=60^\circ$, $AB=10$,

$$\therefore \angle ABC=30^\circ,$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$\therefore F$ 是 AB 的中点,

$$\therefore AF=BF = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore AF=BF=AC,$$

$\therefore$ 等边 $\triangle ADE$,

$$\therefore AE=AD, \angle EAD=60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD - \angle BAD = \angle CAB - \angle BAD,$$

即 $\angle DAC = \angle EAF$,

$$\text{在}\triangle ADC\text{与}\triangle EAF\text{中}, \begin{cases} AD=AE \\ \angle DAC = \angle EAF, \\ AC=AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EAF(SAS);$$

$$\text{②} \because \triangle ADC \cong \triangle EAF,$$

$$\therefore \angle EFA = \angle C = 90^\circ,$$

又 F 是 AB 中点,

$\therefore EF$ 是 AB 的中垂线,

$$\therefore AE = EB,$$

$$\therefore AD = AE = EB,$$

在 $Rt\triangle ACD$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

$$\therefore AD^2 = AC^2 + DC^2 = 25 + x^2,$$

$$\therefore AD = \sqrt{25 + x^2},$$

$$\therefore y = \frac{BE}{BF} = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{5} \quad (0 \leq x \leq 5\sqrt{3});$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } S_{\triangle ADE} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } S_{\triangle ADE} = 50\sqrt{3} + 75,$$

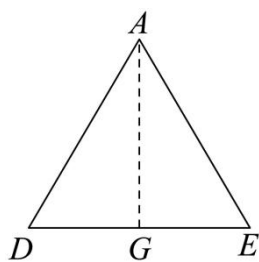
分情况讨论:

第一种情况: 当点在线段 BC 上时,

由 $\angle DAB = 15^\circ$, 可得 $\angle CAD = 45^\circ$, $\triangle ADC$ 是等腰直角三角形,

则 $AD^2 = 50$, 则 $AD = 5\sqrt{2}$,

如图, 过 A 点作 $AG \perp DE$ 于 G 点,



在等边 $\triangle ADE$ 中, 由 $AG \perp DE$ 可得 $DG = DE = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} AD = \frac{5\sqrt{2}}{2}$,

则利用勾股定理可得: $AG = \sqrt{AD^2 - DG^2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$,

则等边 $\triangle ADE$ 的面积为: $S_{\triangle ADE} = DG \times AG \times \frac{1}{2} = 5\sqrt{2} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$,

第二种情况：当点在线段 CB 的延长线上时，

由 $\angle DAB=15^\circ$ ，可得 $\angle ADB=15^\circ$ ，

$\therefore BD=BA=10$ ，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ACD$ 中，利用勾股定理可得： $AD^2 = 200 + 100\sqrt{3}$ ，

则同理可求得等边 $\triangle ADE$ 的面积为： $50\sqrt{3} + 75$ ，

综上所述： $S_{\triangle ADE} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$ 或 $S_{\triangle ADE} = 50\sqrt{3} + 75$ ，

【点睛】 此题考查了勾股定理、全等三角形的判定与性质以及等边三角形的性质等知识，解题的关键是正确找到全等三角形以及熟练掌握勾股定理.