

2024 学年第一学期八年级数学阶段练习

一、填空题 (每题 3 分, 共 33 分)

1. 已知关于 x 的方程 $(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 = 0$ 有且只有一个实数解, 则 m 应满足条件_____.

【答案】 $m = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式, 熟练掌握根的判别式是解题的关键. 分两种情况讨论: 当 $m^2 - 1 = 0$ 时; 当 $m^2 - 1 \neq 0$ 时, 根据一元二次方程根的判别式即可求解.

【详解】 解: 当 $m^2 - 1 = 0$ 时, $m = \pm 1$,

当 $m = -1$ 时, 原方程为 $-4x + 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{4}$, 符合题意;

当 $m = 1$ 时, 方程左边 $= 1$, 右边 $= 0$, 不成立, 不符合题意;

当 $m^2 - 1 \neq 0$, 即 $m \neq \pm 1$ 时,

$\therefore$ 方程 $(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 = 0$ 有且只有一个实数解,

$$\therefore \Delta = 4(m - 1)^2 - 4(m^2 - 1) = -8m + 8 = 0,$$

解得 $m = 1$, 不符合题意,

综上, 当 $m = -1$ 时, 方程 $(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 = 0$ 有且只有一个实数解,

故答案为: $m = -1$.

2. 若关于 x 的一元二次方程 $(a + 1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是 0, 则 a 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 把 $x=0$ 代入原方程, 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(a + 1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是 0,

$$\therefore a^2 - 1 = 0 \text{ 且 } a + 1 \neq 0,$$

解得: $a = 1$.

故答案为: 1

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的解, 熟练掌握能使方程左右两边同时成立的未知数的值是方程的解是解题的关键.

3. 已知 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 6$, 则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} =$ _____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 此题考查了二次根式的非负性，解一元二次方程，解题的关键是掌握二次根式的非负性．设 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = x$ ，原方程变为 $x(x-1) = 6$ ，求出 $x_1 = 3$ ， $x_2 = -2$ ，根据 $\sqrt{a} \geq 0$ ， $\sqrt{b} \geq 0$ ，得出 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$ ，即可得出答案．

【详解】 解：设 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = x$ ，则方程 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 6$ 可变为：

$$x(x-1) = 6,$$

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

$$(x-3)(x+2) = 0,$$

$$\therefore x-3=0 \text{ 或 } x+2=0,$$

$$\text{解得： } x_1 = 3, \quad x_2 = -2,$$

$$\because \sqrt{a} \geq 0, \quad \sqrt{b} \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0,$$

$$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} = 3,$$

故答案为： 3.

4. 若 $\sqrt{\frac{-x+1}{x^2}}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq 1$ 且 $x \neq 0$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，根据二次根式有意义的条件得出 $\frac{-x+1}{x^2} \geq 0$ ，结合题意得出 $x^2 > 0$ ，则可得出 $-x+1 \geq 0$ ，然后解不等式即可．

【详解】 解： $\because \sqrt{\frac{-x+1}{x^2}}$ 有意义，

$$\therefore \frac{-x+1}{x^2} \geq 0, \quad x \neq 0,$$

$$\because x^2 \geq 0, \quad x \neq 0,$$

$$\therefore x^2 > 0,$$

$$\therefore -x+1 \geq 0,$$

$$\therefore x \leq 1,$$

综上：若 $\sqrt{\frac{-x+1}{x^2}}$ 有意义，则 x 的取值范围是 $x \leq 1$ 且 $x \neq 0$ ，

故答案为： $x \leq 1$ 且 $x \neq 0$.

5. 化简： $x\sqrt{-\frac{12}{x^3}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{x}\sqrt{-3x}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简，利用二次根式的运算公式直接化简即可得出答案，掌握二次根式的运算性质是解题的关键.

【详解】 解：根据题意知： $x < 0$ ，

$$\therefore x\sqrt{-\frac{12}{x^3}} = x\sqrt{\frac{4}{x^4} \cdot (-3x)} = x \cdot \frac{2\sqrt{-3x}}{x^2} = \frac{2}{x}\sqrt{-3x},$$

故答案为： $\frac{2}{x}\sqrt{-3x}$.

6. 化简： $\sqrt{5-\sqrt{21}} - \sqrt{5+\sqrt{21}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简求值，设 $\sqrt{5-\sqrt{21}} - \sqrt{5+\sqrt{21}} = x$ ，然后两边同时平方求出 x 的值即可.

【详解】 解：设 $\sqrt{5-\sqrt{21}} - \sqrt{5+\sqrt{21}} = x$ ，

$$\text{则 } x^2 = 5 - \sqrt{21} - 2\sqrt{5-\sqrt{21}} \times \sqrt{5+\sqrt{21}} + 5 + \sqrt{21}$$

$$= 10 - 2\sqrt{4}$$

$$= 6,$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{6},$$

$$\therefore 5 - \sqrt{21} - (5 + \sqrt{21}) = -2\sqrt{21} < 0,$$

$$\therefore \sqrt{5-\sqrt{21}}-\sqrt{5+\sqrt{21}}=-\sqrt{6},$$

故答案为: $-\sqrt{6}$.

7. 求值: $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2023^2}+\frac{1}{2024^2}}=$ _____.

【答案】 $2023\frac{2023}{2024}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的运算, 完全平方公式的应用, 先推导公式 $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

然后利用公式计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+n^2+(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{[n(n+1)]^2+2n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$= \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n(n+1)+(n+1)-n}{n(n+1)}$$

$$= 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

$$\therefore \text{原式} = 1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+1+\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}$$

$$= 2023 \times 1 + 1 - \frac{1}{2024}$$

$$= 2023\frac{2023}{2024},$$

故答案为: $2023\frac{2023}{2024}$.

8. 已知 $a + \sqrt{4 - 4a + a^2} = 2$ ，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \leq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，解不等式等知识，利用二次根式的性质可得出 $|2 - a| = 2 - a$ ，然后利用绝对值的意义得出 $2 - a \geq 0$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because a + \sqrt{4 - 4a + a^2} = 2$,

$$\therefore a + \sqrt{(2 - a)^2} = 2,$$

$$\therefore a + |2 - a| = 2,$$

$$\therefore |2 - a| = 2 - a,$$

$$\therefore 2 - a \geq 0,$$

$$\therefore a \leq 2,$$

故答案为： $a \leq 2$.

9. 在实数范围内分解因式： $-2x^2 + 3xy + y^2 =$ _____.

【答案】 $-2\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}y\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式的因式分解，一元二次方程的解法，令 $-2x^2 + 3xy + y^2 = 0$ ，将 y 看作常数解得 x 的值，是解题的关键. 令 $-2x^2 + 3xy + y^2 = 0$ ，将 y 看作常数，利用公式法解得 x 的值，继而求得答案.

【详解】 解： 令 $-2x^2 + 3xy + y^2 = 0$ ，将 y 看作常数，

$$\text{则 } a = -2, \quad b = 3y, \quad c = y^2,$$

$$\text{那么 } \Delta = (3y)^2 - 4 \times (-2) \times y^2 = 17y^2 \geq 0,$$

$$\text{则 } x = \frac{-3y \pm \sqrt{17y^2}}{2 \times (-2)} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}y,$$

$$\therefore -2x^2 + 3xy + y^2 = -2\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}y\right).$$

10. 已知等腰 ABC 的一条边长为 4, 另外两边长是关于 x 的方程 $x^2 - mx + 5 = 0$ 的两根, 则三角形的周长为_____.

【答案】 $4 + 2\sqrt{5}$ 或 $\frac{37}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系和根的判别式, 等腰三角形的定义, 构成三角形的条件, 分当腰长为 4 时, 当底边长为 4 时, 两种情况根据根与系数和判别式求出方程的两个根, 进而确定等腰三角形的三边长, 再根据三角形周长计算公式求解即可.

【详解】 解: 当腰长为 4 时, 则 $x = 4$ 是方程 $x^2 - mx + 5 = 0$ 的一个根, 设方程的另一个根为 y ,

$$\therefore 4y = 5,$$

$$\text{解得 } y = \frac{5}{4},$$

$$\therefore 4 + \frac{5}{4} > 4,$$

$\therefore$ 此时能组成三角形,

$$\therefore \text{等腰三角形的底边长为 } \frac{5}{4},$$

$$\therefore \text{该等腰三角形的周长为 } 4 + 4 + \frac{5}{4} = \frac{37}{4};$$

当底边长为 4 时, 则关于 x 的方程 $x^2 - mx + 5 = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-m)^2 - 4 \times 5 = 0,$$

$$\text{解得 } m = \pm 2\sqrt{5},$$

$\therefore$ 等腰三角形的腰长为正数, 且由根与系数的关系可知腰长的 2 倍为 m 的值,

$$\therefore m = 2\sqrt{5}, \text{ 腰长为 } \sqrt{5},$$

$$\therefore \sqrt{5} + 4 > \sqrt{5},$$

$\therefore$ 此时能组成三角形,

$$\text{该等腰三角形的周长为 } 4 + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 4 + 2\sqrt{5};$$

综上所述, 该等腰三角形的周长为 $4 + 2\sqrt{5}$ 或 $\frac{37}{4}$,

故答案为: $4+2\sqrt{5}$ 或 $\frac{37}{4}$.

11. 若三个整数 a 、 b 、 c 使得方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 a, b , 则 $a+b+c$ 的值为_____.

【答案】 18

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解以及根与系数之间的关系, 熟练掌握根与系数之间的关系是解题关键.

先通过根与系数之间的关系得到 $a+b=-\frac{b}{a}$, $ab=\frac{c}{a}$, 再通过计算 a^2+ab 得出 a 的解, 进而得出 b 与 c 的解, 进而可得到答案.

【详解】 解: $\because a$ 与 b 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根, 故通过韦达定理可得到 $a+b=-\frac{b}{a}$, $ab=\frac{c}{a}$

$$\text{故 } a^2+ab=a(a+b)=a\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-b$$

$$\therefore b=-\frac{a^2}{a+1}=-\frac{a^2-1+1}{a+1}=-\frac{(a+1)(a-1)}{a+1}-\frac{1}{a+1}=-a+1-\frac{1}{a+1}$$

$\because b$ 为整数,

$$\therefore a+1=1 \text{ 或 } a+1=-1$$

故 $a=0$ (舍), $a=-2$

$$\therefore b=4$$

$$\therefore ab=-8=\frac{c}{-2}, \text{ 故 } c=16$$

$$\therefore a+b+c=18$$

故答案为: 18.

二、选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

12. 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

A. $\sqrt{0.3a}$

B. $\sqrt{40}$

C. $\sqrt{a^2-b^2}$

D. $\sqrt{a-\frac{1}{2}}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了最简二次根式的判断, 掌握最简二次根式的概念是解题的关键. 被开方数不含分母, 被开方数不含能开得尽方的因数或因式, 这样的二次根式是最简二次根式, 根据最简二次根式的定义进行判断即可.

【详解】解： $\sqrt{0.3a}$ 、 $\sqrt{a-\frac{1}{2}}$ 中被开方数中含有分母，不是最简二次根式； $\sqrt{40}$ 中含有开得尽方的因式

4，故 $\sqrt{40}$ 也不是最简二次根式， $\sqrt{a^2-b^2}$ 是最简二次根式；

故选：C.

13. 根式 $\sqrt{45}$, $\sqrt{\frac{1}{27}}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{\frac{1}{50}}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{10}}$ 中，与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的有 () 个

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式的定义，把二次根式化为最简二次根式后，若被开方数相同，那么这样的二次根式叫做最简二次根式，据此求解即可.

【详解】解： $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ， $\sqrt{\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ ， $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ， $\sqrt{\frac{1}{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$ ， $\sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ，

$\therefore$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根的有 $\sqrt{\frac{1}{50}}$ ，共 1 个，

故选：A.

14. 下列方程中，是一元二次方程的是 ()

A. $2x^2 + 3x = (1+2x)(2+x)$

B. $(k-1)x^2 - 6kx + 5 = 0$

C. $\frac{2x^3}{x} - 8x + 1 = 0$

D. $x^2 = -1$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的定义，只含有一个未知数，且未知数的最高次为 2 的整式方程叫做一元二次方程，据此求解即可.

【详解】解：A、原方程整理得 $2x+2=0$ ，未知数的最高次不是 2，不是一元二次方程，不符合题意；

B、当 $k=1$ 时，原方程为 $-6x+5=0$ ，未知数的最高次不是 2，不是一元二次方程，不符合题意；

C、 $\frac{2x^3}{x} - 8x + 1 = 0$ 不是整式方程，不是一元二次方程，不符合题意；

D、 $x^2 = -1$ 是一元二次方程，符合题意；

故选：D.

15. 关于 x 的两个方程 $x^2 + 4mx + 4m^2 + 2m + 3 = 0$, $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$ 中至少有一个方程有实数根, 则 m 的取值范围是 ()

A. $-\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{4}$

B. $m \leq -\frac{3}{2}$ 或 $m \geq -\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$

D. $m \leq -\frac{3}{2}$ 或 $m \geq \frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】解：本题考查了根的判别式，熟练掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，当 $\Delta \geq 0$ 时，方程有实数根，是解答本题的关键。根据方程有实根，求出 m 的取值范围即可。

【详解】解：对于 $x^2 + 4mx + 4m^2 + 2m + 3 = 0$,

当 $\Delta = (4m)^2 - 4(4m^2 + 2m + 3) \geq 0$ 时，该方程有实数根，

即 $m \leq -\frac{3}{2}$ 时，该方程有实数根，

对于 $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$,

当 $\Delta = (2m+1)^2 - 4m^2 \geq 0$ 时，该方程有实数根，

即 $m \geq -\frac{1}{4}$ 时，该方程有实数根，

$\therefore$ 当 $m \leq -\frac{3}{2}$ 或 $m \geq -\frac{1}{4}$ 时，关于 x 的两个方程 $x^2 + 4mx + 4m^2 + 2m + 3 = 0$, $x^2 + (2m+1)x + m^2 = 0$ 中至少有一个方程有实数根，

故选：B.

16. 甲容器盛满酒精，乙容器盛满水，乙容器的容量是甲容器的 2 倍。现从两容器中各取出 6L 来，然后把酒精注入乙容器，把水注入甲容器，这时甲、乙两容器中酒精与水量的比相等，则甲容器原有酒精 ()

A. 6L

B. 9L

C. 12L

D. 18L

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了分式方程的应用，设甲容器的容积为 x L，则乙容器的容积为 $2x$ L，根据从两容器中各取出 6L 来，然后把酒精注入乙容器，把水注入甲容器，这时甲、乙两容器中酒精与水量的比相等，列出方程，解方程即可。

【详解】解：设甲容器的容积为 x L，则乙容器的容积为 $2x$ L，根据题意得：

$$\frac{x-6}{6} = \frac{6}{2x-6},$$

解得: $x_1 = 9$, $x_2 = 0$,

经检验 $x_1 = 9$, $x_2 = 0$ 都是原方程的根, 但 $x_2 = 0$ 不符合题意舍去,

∴ 甲容器原有酒精 9L,

故选: B.

三、计算与解关于 x 的方程 (每题 4 分, 共 24 分)

17. 计算: $(-\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6})(-\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{6})$

【答案】 $-5 - 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合计算, 先把原式变形为 $[-\sqrt{3} + (\sqrt{2} + \sqrt{6})][-\sqrt{3} - (\sqrt{2} + \sqrt{6})]$, 再利用平方差公式和完全平方公式去括号求解即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & (-\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6})(-\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{6}) \\ &= [-\sqrt{3} + (\sqrt{2} + \sqrt{6})][-\sqrt{3} - (\sqrt{2} + \sqrt{6})] \\ &= (-\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 \\ &= 3 - (2 + 4\sqrt{3} + 6) \\ &= 3 - 8 - 4\sqrt{3} \\ &= -5 - 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

18. $-6\sqrt{\frac{3m^2-3n^2}{2a^2}} \div \frac{3}{2}\sqrt{\frac{m+n}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{m-n}} \cdot \sqrt{-a}$

【答案】 $2\sqrt{6a}\sqrt{-a}$

【解析】

【分析】 此题考查了二次根式的乘除运算, 二次根式性质, 解题的关键是熟练掌握二次根式的乘除运算法则. 根据二次根式有意义的条件得出 $a < 0$, 再根据二次根式的混合运算法则和二次根式性质化简求解即可.

$$\text{【详解】 解: } \because -6\sqrt{\frac{3m^2-3n^2}{2a^2}} \div \frac{3}{2}\sqrt{\frac{m+n}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{m-n}} \cdot \sqrt{-a} \text{ 有意义,}$$

∴ $a < 0$,

$$\begin{aligned}
& -6\sqrt{\frac{3m^2-3n^2}{2a^2}} \div \frac{3}{2}\sqrt{\frac{m+n}{a^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{m-n}} \cdot \sqrt{-a} \\
& = -6\sqrt{\frac{3m^2-3n^2}{2a^2}} \times \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2}{m+n}} \times \sqrt{\frac{a^2}{m-n}} \cdot \sqrt{-a} \\
& = -4\sqrt{\frac{3(m-n)}{2}} \times \sqrt{\frac{a^2}{m-n}} \cdot \sqrt{-a} \\
& = -4\sqrt{\frac{3a^2}{2}} \cdot \sqrt{-a} \\
& = -2\sqrt{6}|a| \cdot \sqrt{-a} \\
& = 2\sqrt{6}a\sqrt{-a}.
\end{aligned}$$

$$19. 4x^4 = 9(1-x)^2$$

【答案】 $x_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{4}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{33}}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，先利用因式分解法得出 $2x^2 + 3x - 3 = 0$ 或 $2x^2 - 3x + 3 = 0$ ，然后利用公式法求解即可。

【详解】 解： $4x^4 = 9(1-x)^2$,

$$\therefore 4x^4 - 9(1-x)^2 = 0,$$

$$\therefore (2x^2 + 3x - 3)(2x^2 - 3x + 3) = 0,$$

$$\therefore 2x^2 + 3x - 3 = 0 \text{ 或 } 2x^2 - 3x + 3 = 0,$$

当 $2x^2 + 3x - 3 = 0$ 时,

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 33 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4},$$

$$\therefore x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{4};$$

当 $2x^2 - 3x + 3 = 0$ 时,

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -15 < 0,$$

∴ 方程无解,

综上, 方程的解为 $x_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{4}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{33}}{4}$.

20. 解方程: $2x^2 - 8x - 617 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{4+25\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{4-25\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 根据配方法求解即可.

【详解】 解: $\because 2x^2 - 8x - 617 = 0$,

$$\therefore x^2 - 4x = \frac{617}{2},$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 = \frac{625}{2},$$

$$\therefore (x-2)^2 = \frac{625}{2},$$

$$\therefore x-2 = \pm \frac{25\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{4+25\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{4-25\sqrt{2}}{2}.$$

21. $(\sqrt{3}-1)x^2 - (5-\sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

【答案】 $x_1 = \sqrt{3}+1, x_2 = \sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程—因式分解法, 因式分解法是利用因式分解求出方程解的方法, 解题的关键是熟练掌握因式分解法. 利用因式分解法把方程整理成 $\left[(\sqrt{3}-1)x-2\right](x-\sqrt{3})=0$ 得出

$(\sqrt{3}-1)x-2=0$ 或 $(x-\sqrt{3})=0$, 然后解一元一次方程即可.

【详解】 解: $(\sqrt{3}-1)x^2 - (5-\sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

$$\left[(\sqrt{3}-1)x-2\right](x-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore (\sqrt{3}-1)x-2=0 \text{ 或 } (x-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{3} + 1, x_2 = \sqrt{3}.$$

22. 计算: $ax^2 + 2x + a = 0$

【答案】当 $a=0$ 时, $x=0$; 当 $-1 \leq a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ 时, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}$; 当 $a > 1$ 或 $a < -1$ 时, 无解

【解析】

【分析】本题主要考查了解方程, 熟练掌握求根公式是解题的关键. 分三种情况进行讨论: 当 $a=0$ 时, 当 $-1 \leq a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ 时, 当 $a > 1$ 或 $a < -1$ 时, 分别求解方程即可.

【详解】解: $ax^2 + 2x + a = 0$,

当 $a=0$ 时, 方程 $ax^2 + 2x + a = 0$ 变为 $2x = 0$, 解得: $x=0$;

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 2^2 - 4a^2 = 4 - 4a^2 = 4(1 - a^2)$,

令 $4(1 - a^2) \geq 0$, 解得: $-1 \leq a \leq 1$,

令 $4(1 - a^2) < 0$, 解得: $a > 1$ 或 $a < -1$,

当 $-1 \leq a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ 时, $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4(1-a^2)}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}$;

当 $a > 1$ 或 $a < -1$ 时, 原方程无解;

综上所述可知: 当 $a=0$ 时, $x=0$; 当 $-1 \leq a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ 时, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a}$; 当 $a > 1$ 或 $a < -1$ 时,

无解.

四、解答题 (23、24 题每题 5 分, 25、26、27 题每题 6 分, 共 28 分)

23. 已知 $a+b=-3$, $ab=1$, 求 $a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}}$ 的值.

【答案】-7

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质, 二次根式的加减, 先判断出 $a < 0$, $b < 0$, 然后根据二次根式的性质和二次根式的加减法则化简, 最后把 $a^2 + b^2 = 7$, $ab = 1$ 整体代入计算即可.

【详解】解: $\because ab=1 > 0$, $a+b=-3 < 0$,

$\therefore a < 0$, $b < 0$, $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 7$,

$\therefore a\sqrt{\frac{a}{b}} + b\sqrt{\frac{b}{a}} = a \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} + b \cdot \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2}}$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a}{b}\sqrt{ab} - \frac{b}{a}\sqrt{ab} \\
&= -\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\sqrt{ab} \\
&= -\frac{a^2 + b^2}{ab}\sqrt{ab} \\
&= -7.
\end{aligned}$$

24. 已知实数对 (x, y) 满足 $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 6$, 求 $\frac{x}{y}$ 的最大值.

【答案】 $\frac{x}{y}$ 的最大值 $\frac{50}{3}$.

【解析】

【分析】 本题考查了根的判别式, 设 $\frac{x}{y} = t$, 即 $x = yt$, 得到 $(1+t^2)y^2 + (8t+6)y + 19 = 0$, 根据 $\Delta \geq 0$ 即可求解, 掌握根的判别式是解题的关键.

【详解】 解: 设 $\frac{x}{y} = t$, 即 $x = yt$,

$$\therefore (x+4)^2 + (y+3)^2 = 6, \text{ 即 } (yt+4)^2 + (y+3)^2 = 6,$$

$$\text{化简整理: } (1+t^2)y^2 + (8t+6)y + 19 = 0,$$

则此方程必有实数根, 即 $\Delta \geq 0$,

$$\therefore \Delta = (8t+6)^2 - 4 \times (1+t^2) \times 19 \geq 0,$$

$$\therefore -\frac{26}{3} \leq t \leq \frac{50}{3},$$

$$\therefore t_{\max} = \frac{50}{3},$$

$$\therefore \frac{x}{y} \text{ 的最大值 } \frac{50}{3}.$$

25. 若方程 $(m^2-1)x^2 + 2(m+1)x + 1 = 0$ 没有实数根, 试判定方程 $(m+3)x^2 - 2(m-3)x - m - 5 = 0$ 的根的情况.

【答案】 方程 $(m+3)x^2 - 2(m-3)x - m - 5 = 0$ 有 2 个或 1 个实数根

【解析】

【分析】 本题考查了根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：

当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根．先根据方程 $(m^2 - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 1 = 0$ 没有实数根，求出 $m < -1$ ，然后分两种情况：当 $m < -1$ 且 $m \neq -3$ 时，当 $m = -3$ 时，讨论方程根的情况．

【详解】 解： $\because (m^2 - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 1 = 0$ 没有实数根，

$$\therefore [2(m + 1)]^2 - 4(m^2 - 1) < 0,$$

解得： $m < -1$ ，

当 $m < -1$ 且 $m \neq -3$ 时，方程 $(m + 3)x^2 - 2(m - 3)x - m - 5 = 0$ 中，

$$\Delta = [-2(m - 3)]^2 - 4(m + 3)(-m - 5)$$

$$= 8m^2 + 8m + 96$$

$$= 8(m^2 + m) + 96$$

$$= 8\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 94,$$

$$\text{又} \because \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0,$$

$$\therefore 8\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 94 > 0,$$

$$\therefore \Delta > 0,$$

$\therefore$ 此时方程 $(m + 3)x^2 - 2(m - 3)x - m - 5 = 0$ 有两个不相等的实数根，

当 $m = -3$ 时，方程 $(m + 3)x^2 - 2(m - 3)x - m - 5 = 0$ 可变为 $12x - 2 = 0$ ，

$\therefore$ 方程 $12x - 2 = 0$ 只有一个实数根，

$\therefore$ 当 $m = -3$ 时，方程 $(m + 3)x^2 - 2(m - 3)x - m - 5 = 0$ 有 1 个实数根．

综上所述可知：方程 $(m + 3)x^2 - 2(m - 3)x - m - 5 = 0$ 有 2 个或 1 个实数根．

26. 某种时装，平均每天销售 20 件，每件盈利 44 元；若每件降价 1 元，则每天可多售出 5 件．

(1) 若想达到每天盈利 1600 元，每件可降价多少元？

(2) 若想盈利达到最大值，每件可降价多少元？

【答案】(1) 4 元或 36 元

(2) 20 元

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的实际应用，配方法的应用：

(1) 设每件降价 x 元，根据利润 = 单件利润 $\times$ 销售量列出方程求解即可；

(2) 设每件降价 x 元，每天盈利为 W 元，利润 = 单件利润 $\times$ 销售量列出 W 关于 x 的关系式，再利用配方法求解即可。

【小问 1 详解】

解：解：设每件降价 x 元，

由题意得， $(20 + 5x)(44 - x) = 1600$ ，

整理得 $x^2 - 40x + 144 = 0$

$\therefore x_1 = 4$ 或 $x_2 = 36$ ，

答：想达到每天盈利 1600 元，每件可降价 4 元或 36 元；

【小问 2 详解】

解：解：设每件降价 x 元，每天盈利为 W 元，

则 $W = (20 + 5x)(44 - x)$

$= -5x^2 + 200x + 880$

$= -5(x - 20)^2 + 2880$ ，

$\therefore (x - 20)^2 \geq 0$ ，

$\therefore -5(x - 20)^2 + 2880 \leq 2880$ ，当且仅当 $x - 20 = 0$ ，即 $x = 20$ 时等号成立，

$\therefore$ 当 $x = 20$ 时，盈利最大，

答：想盈利达到最大值，每件可降价 20 元。

27. 已知关于 x 的两个一元二次方程：方程①： $\left(1 + \frac{k}{2}\right)x^2 + (k + 2)x - 1 = 0$ ；方程②：

$x^2 + (2k + 1)x - 2k - 3 = 0$ 。

(1) 若方程①和②只有一个方程有实数根，求整数 k ；

(2) 若方程①和②有一个公共根 a ，求代数式 $(a^2 + 4a - 2)k + 3a^2 + 5a$ 的值。

【答案】(1) -3

(2) 5

【解析】

【分析】 本题主要考查根的判别式，熟练掌握一元二次方程根的个数与根的判别式的关系是解题的关键.

(1) 计算第 2 个方程的判别式得 $\Delta_2 = (2k+3)^2 + 4 > 0$ ，利用判别式的意义可判断方程②总有实数根，于是可判断此时方程①没有实数根，然后方程①没有实数根列出关于 k 的不等式求解即可；

(2) 把 $x = a$ 分别代入两个方程，整理即可求得所求代数式的值.

【小问 1 详解】

解：对于方程②： $x^2 + (2k+1)x - 2k - 3 = 0$ ，

$$\therefore \Delta_2 = (2k+1)^2 - 4(-2k-3)$$

$$= 4k^2 + 12k + 13$$

$$= (2k+3)^2 + 4 > 0,$$

$\therefore$ 无论 k 为何值时，方程②总有实数根，

$\therefore$ 方程②总有实数根，

$\therefore$ 方程①、②只有一个方程有实数根，

$\therefore$ 此时方程①没有实数根，

对于方程①： $\left(1 + \frac{k}{2}\right)x^2 + (k+2)x - 1 = 0$ ，

$$\Delta_1 = (k+2)^2 - 4 \times \left(1 + \frac{k}{2}\right) \times (-1) = k^2 + 6k + 8 = (k+2)(k+4) < 0.$$

$$\therefore \begin{cases} k+2 > 0 \\ k+4 < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k+2 < 0 \\ k+4 > 0 \end{cases},$$

解不等式组 $\begin{cases} k+2 > 0 \\ k+4 < 0 \end{cases}$ ，得无解；

解不等式组 $\begin{cases} k+2 < 0 \\ k+4 > 0 \end{cases}$ ，得 $-4 < k < -2$ ，

$\therefore$ 整数 k 的值为 -3 ；

【小问 2 详解】

解：根据 a 是方程①和②的公共根，

$$\therefore \left(1 + \frac{k}{2}\right)a^2 + (k+2)a - 1 = 0 \text{ ③}, \quad a^2 + (2k+1)a - 2k - 3 = 0 \text{ ④}$$

$$\therefore \text{③} \times 2 \text{ 得: } (2+k)a^2 + (2k+4)a - 2 = 0 \text{ ⑤},$$

$$\text{⑤} + \text{④} \text{ 得: } (3+k)a^2 + (4k+5)a - 2k = 5,$$

$$\text{代数式} = (a^2 + 4a - 2)k + 3a^2 + 5a = (3+k)a^2 + (4k+5)a - 2k = 5.$$

故代数式的值为 5.