

2024-2025 学年上海市杨浦区存志学校东校八年级（上）月考数学试卷

(12 月份)

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 下列二次根式中，属于最简二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{0.1x}$ B. $\sqrt{x^2}$ C. $\sqrt{27}$ D. $\sqrt{x^2+3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式，根据最简二次根式必须满足两个条件：（1）被开方数不含分母；（2）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式．逐一判断即可解答．

【详解】解：A、 $\sqrt{0.1x} = \sqrt{\frac{x}{10}} = \frac{\sqrt{10x}}{10}$ ，不是最简二次根式，不符合题意；

B、 $\sqrt{x^2} = |x|$ ，不是最简二次根式，不符合题意；

C、 $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ ，不是最简二次根式，不符合题意；

D、 $\sqrt{x^2+3}$ ，是最简二次根式，符合题意，

故选：D．

2. 在关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 中，若 a 与 c 异号，则方程（ ）

- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 没有实数根 D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】判断一元二次方程的根的情况，只要看根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值的符号即可．

【详解】解：∵ a 与 c 异号，

$$\therefore ac < 0,$$

$$\therefore -4ac > 0, \quad b^2 \geq 0,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

∴ 原方程有两个不相等的实数根．

故选 A．

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，有理数乘法符号法则，完全平方非负性，一元二次方程

根的情况与判别式 Δ 的关系：(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根. 熟练掌握是解题的关键.

3. 下列函数中， y 的值随 x 的值增大而增大的是 ()

A. $y = \frac{5}{x}$

B. $y = \frac{1}{5}x$

C. $y = -\frac{1}{5}x + 1$

D. $y = -\frac{5}{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查正比例函数和反比例函数的性质，解题的关键是掌握正比例函数和反比例函数的性质. 由正比例函数与反比例函数的图像和性质知， $y = kx (k \neq 0)$ ， $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大，反之 y 随 x 的增大而减小； $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中应在每个象限内讨论增减性.

【详解】解：A、 $y = \frac{5}{x}$ 中，

$$\because 5 > 0,$$

$\therefore$ 在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，不符合题意；

B、 $y = \frac{1}{5}x$ 中，

$$\because \frac{1}{5} > 0,$$

$\therefore y$ 随 x 增大而增大，符合题意；

C、 $y = -\frac{1}{5}x + 1$ 中，

$$\because -\frac{1}{5} < 0,$$

$\therefore y$ 随 x 增大而减小，不符合题意；

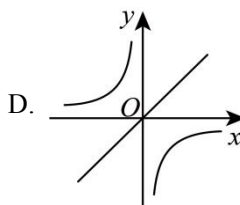
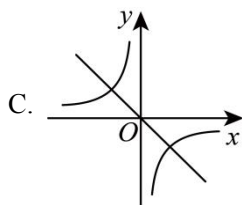
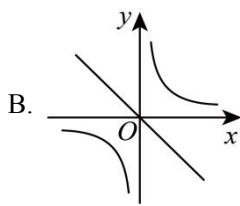
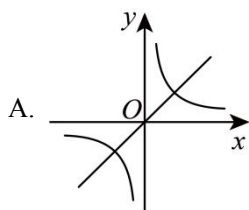
D、 $y = -\frac{5}{x}$ ，

$$\because -5 < 0,$$

$\therefore$ 在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，不符合题意；

故选：B.

4. 在同一坐标系中， $y = (m-1)x$ 与 $y = -\frac{m}{x}$ 的图象的大致位置不可能的是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数以及正比例函数的性质，利用正比例函数以及反比例函数图象分布规律进而分析得出即可．

【详解】解：A、当正比例函数图象正确，则 $m-1>0$ ，则 $m>1$ ，故 $y=-\frac{m}{x}$ 中， $-m<0$ ，则其图象分布在第二、四象限，故此选项符合题意；

B、当正比例函数图象正确，则 $m-1<0$ ，则 $m<1$ ，故 $y=-\frac{m}{x}$ 中， $-m$ 符号不确定，则其图象分布在第二、四象限或第一、三象限，故此选项不合题意；

C、当正比例函数图象正确，则 $m-1<0$ ，则 $m<1$ ，故 $y=-\frac{m}{x}$ 中， $-m$ 符号不确定，则其图象分布在第二、四象限或第一、三象限，故此选项不合题意；

D、当正比例函数图象正确，则 $m-1>0$ ，则 $m>1$ ，故 $y=-\frac{m}{x}$ 中， $-m<0$ ，则其图象分布在第二、四象限，故此选项不符合题意；

故选：A.

5. 下列命题中错误的是（ ）

A. 等腰直角三角形的斜边上的高等于斜边的一半

B. 如果等腰三角形一腰上的高等于腰长的一半，那么这个等腰三角形的顶角为 30°

C. 到三角形三个顶点距离相等的点是三角形三边中垂线的交点

D. 在角的内部（包括顶点），到角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的角平分线

【答案】B

【解析】

【分析】根据等腰直角三角形的斜边上的高就是等腰直角三角形斜边上的中线可得 A 选项是否正确；根据等腰三角形一腰上的高等于腰长的一半，那么这个等腰三角形的顶角有两种情况可得 B 选项是否正确；根

据线段垂直平分线的判定可得 C 选项是否正确；根据角的平分线的判定可得 D 选项是否正确.

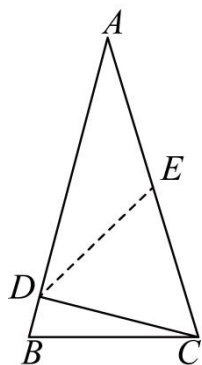
【详解】解：A、 $\because$ 等腰直角三角形的斜边上的高就是等腰直角三角形斜边上的中线，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，

$\therefore$ 等腰直角三角形的斜边上的高等于斜边的一半.

$\therefore$ A 选项正确，不符合题意；

B、等腰三角形一腰上的高等于腰长的一半，如图：

① ABC 是顶角为锐角的等腰三角形， $AB = AC$ ， $CD \perp AB$ 且 $CD = \frac{1}{2} AC$.



作 $\triangle ACD$ 的中线 DE ，

$$\therefore DE = EC = \frac{1}{2} AC,$$

$$\because CD = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore CD = DE = EC,$$

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形，

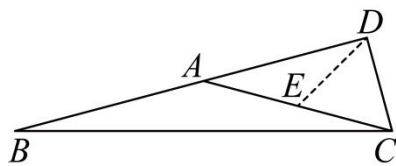
$$\therefore \angle ACD = 60^\circ,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ;$$

② ABC 是顶角为钝角的等腰三角形， $AB = AC$ ， $CD \perp AB$ 且 $CD = \frac{1}{2} AC$.



作 $\triangle ACD$ 的中线 DE ，

$$\therefore DE = EC = \frac{1}{2}AC,$$

$$\because CD = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore CD = DE = EC,$$

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ACD = 60^\circ,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 150^\circ.$$

综上, 这个等腰三角形的顶角为 30° 或 150° ,

$\therefore$ B 选项不正确, 符合题意;

C、 $\because$ 与一条线段两个端点距离相等的点, 在这条线段的垂直平分线上,

$\therefore$ 到三角形三个顶点距离相等的点是三角形三边中垂线的交点,

$\therefore$ C 选项正确, 不符合题意;

D、 $\because$ 角的内部到角的两边距离相等的点, 在角的平分线上, 点动成线,

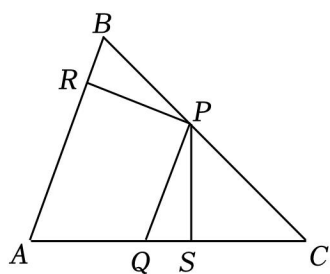
$\therefore$ 在角的内部 (包括顶点), 到角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的角平分线,

$\therefore$ D 选项正确, 不符合题意.

故选: B.

【点睛】本题综合考查命题与定理的相关知识, 涉及等腰三角形的性质、等边三角形的判定与性质、线段垂直平分线的性质、角平分线的判定, 熟练掌握相关性质, 正确判断是解答的关键. 易错点为: 等腰三角形一腰上的高等于腰长的一半, 那么这个等腰三角形的顶角有两种情况.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, P 、 Q 分别是 BC 、 AC 边上的点, 作 $PR \perp AB$ 于 R , $PS \perp AC$ 于 S , 若 $AQ = PQ$, $PR = PS$, 则下列结论错误的是 ()



A. $PQ = PB$

B. $AS = AR$

C. $\triangle BRP \cong \triangle QSP$

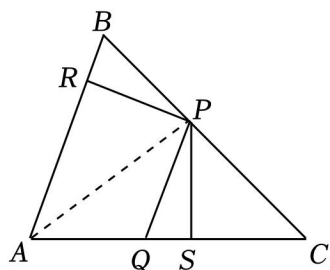
D. $\angle C = \angle SPC$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质等知识，连接 AP ，由 $PR \perp AB$ 于 R ， $PS \perp AC$ 于 S ，得 $\angle PRB = \angle ARP = \angle ASP = \angle PSC = 90^\circ$ ，可根据“HL”证明 $\text{Rt}\triangle APS \cong \text{Rt}\triangle APR$ ，得 $AS = AR$ ， $\angle PAS = \angle PAR$ ，可判断 B 不符合题意，由 $AQ = PQ$ ，得 $\angle PAS = \angle APQ$ ，则 $\angle APQ = \angle PAR$ ，所以 $PQ \parallel AB$ ，由 $AC = BC$ ，得 $\angle B = \angle CAB$ ，推导出 $\angle CPQ = \angle CQP$ ，则 $QC = PC$ ，所以 $AQ = PB$ ，则 $PQ = PB$ ，可判断 A 不符合题意；由 $\angle PRB = \angle PSQ$ ， $\angle B = \angle PQS$ ， $PR = PS$ ，根据“AAS”证明 $BRP \cong QSP$ ，可判断 C 不符合题意；若 $\angle C = \angle SPC$ ，则 $\angle C = 45^\circ$ ，与已知条件不符，可判断 D 符合题意，于是得到问题的答案.

【详解】解：连接 AP ，



$\because PR \perp AB$ 于 R ， $PS \perp AC$ 于 S ，

$\therefore \angle PRB = \angle ARP = \angle ASP = \angle PSC = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle APS$ 和 $\text{Rt}\triangle APR$ 中，

$$\begin{cases} AP = AP \\ PS = PR \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle APS \cong \text{Rt}\triangle APR (\text{HL})$ ，

$\therefore AS = AR$ ， $\angle PAS = \angle PAR$ ，故 B 不符合题意，

$\because AQ = PQ$ ，

$\therefore \angle PAS = \angle APQ$ ，

$\therefore \angle APQ = \angle PAR$ ，

$\therefore PQ \parallel AB$ ，

$\therefore \angle CPQ = \angle B$ ， $\angle CQP = \angle CAB$ ，

$\because AC = BC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle CPQ = \angle CQP,$$

$$\therefore QC = PC,$$

$$\therefore AC - QC = BC - PC,$$

$$\therefore AQ = PB,$$

$$\therefore PQ = PB, \text{ 故 A 不符合题意;}$$

$$\because \angle B = \angle CAB, \angle PQS = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle B = \angle PQS,$$

在 $\triangle BRP$ 和 $\triangle QSP$ 中,

$$\begin{cases} \angle PRB = \angle PSQ \\ \angle B = \angle PQS \\ PR = PS \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BRP \cong \triangle QSP (\text{AAS}), \text{ 故 C 不符合题意;}$$

若 $\angle C = \angle SPC$, 则 $\angle C = 45^\circ$, 与已知条件不符,

$$\therefore \angle C \text{ 与 } \angle SPC \text{ 不一定相等,}$$

$$\therefore \angle C = \angle SPC \text{ 这一结论是错误的, 故 D 符合题意,}$$

故选: D.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

7. 使二次根式 $\sqrt{1-3x}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件, 列出关于 x 的不等式, 解不等式即可.

【详解】 解: $\because$ 二次根式 $\sqrt{1-3x}$ 有意义,

$$\therefore 1-3x \geq 0, \text{ 即 } x \leq \frac{1}{3},$$

故答案为: $x \leq \frac{1}{3}$

【点睛】 本题考查二次根式有意义的条件, 解题的关键是掌握二次根式有意义的条件: 被开方数大于等于 0.

8. 关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2 + x - m^2 + 5m - 6 = 0$ 有一个根为 0, 则 $m =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解．也考查了一元二次方程的定义．先根据题意得到 $m \neq 3$ ，把 $x=0$ 代入方程 $(m-3)x^2 + x - m^2 + 5m - 6 = 0$ 得 $-m^2 + 5m - 6 = 0$ ，然后解关于 m 的一元二次方程即可．

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m-3)x^2 + x - m^2 + 5m - 6 = 0$ 有一个根为 0,

$$\therefore m-3 \neq 0,$$

即 $m \neq 3$,

把 $x=0$ 代入方程得 $-m^2 + 5m - 6 = 0$,

解得 $m=2$ 或 $m=3$ (舍去).

$$\therefore m=2$$

故答案为： 2.

9. 如果正比例函数 $y = mx^{m^2-3}$ 的图象在二、四象限, 那么 m 的值是 _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题主要考查了正比例函数的定义和性质, 首先根据正比例函数的定义可得 $m^2 - 3 = 1$, 且 $m \neq 0$, 解出 m 的值, 再根据图象经过第二、四象限, 可得 $m < 0$, 进而确定 m .

【详解】 解：由题意得： $m^2 - 3 = 1$, 且 $m \neq 0$, $m < 0$.

解得： $m = \pm 2$.

$\because$ 图象经过第二、四象限,

$$\therefore m < 0,$$

$$\therefore m = -2,$$

故答案为： -2.

10. 在实数范围内分解因式： $2x^2 - 3x - 1 =$ _____.

【答案】 $2 \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$.

【解析】

【分析】求出方程 $2x^2-3x-1=0$ 中的判别式的值，求出方程的两个解，代入 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 即可.

【详解】设 $2x^2-3x-1=0$,

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17,$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2 \times 2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4},$$

$$\therefore 2x^2 - 3x - 1 = 2 \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right).$$

$$\text{故答案为 } 2 \left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}\right).$$

【点睛】本题考查了在实数范围内分解因式和解一元二次方程，注意：若 x_1 和 x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，则 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

11. 将命题“等腰三角形中两腰上的中线相等”的逆命题改写成“如果…，那么…”的形式 _____.

【答案】如果一个三角形两边上的中线相等，那么这个三角形是等腰三角形

【解析】

【分析】本题主要考查了将命题写成条件与结论的形式，“如果”后面是命题的条件，“那么”后面是命题的结论，命题的逆命题是如果一个三角形两边上的中线相等，那么这个三角形是等腰三角形.

【详解】解：题设为：一个三角形是等腰三角形，结论为：它的两腰上的中线相等，

故逆命题写成“如果…那么…”的形式是：如果一个三角形两边上的中线相等，那么这个三角形是等腰三角形，

故答案为：如果一个三角形两边上的中线相等，那么这个三角形是等腰三角形.

12. 2023 年工厂的生产总值为 1000 万元，估计 2025 年三年的生产总值之和为 3333 万，设这两年的平均增长率为 x ，请列出方程：_____.

$$\text{【答案】 } 1000 + 1000(1+x) + 1000(1+x)^2 = 3333$$

【解析】

【分析】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，设这两年的平均增长率为 x ，根据该厂 2023 年的生产总值及三年的生产总值之和，可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解.

$$\text{【详解】解：根据题意可得： } 1000 + 1000(1+x) + 1000(1+x)^2 = 3333,$$

故答案为: $1000+1000(1+x)+1000(1+x)^2=3333$.

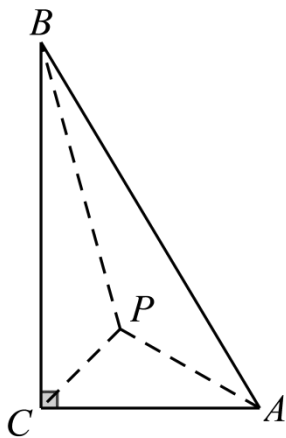
13. 直角 ABC 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=5$, $BC=12$, $AB=13$, 在三角形内有一点到三边的距离相等, 这个相等的距离=_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查的是角平分线的性质, 连接 PA 、 PB 、 PC , 设点到各边的距离为 x , 根据三角形的面积公式计算即可.

【详解】 解: 如图, 连接 PA 、 PB 、 PC ,



设点到各边的距离为 x ,

$\because \angle C=90^\circ$, 两直角边 $AC=5$, $BC=12$,

由题意得, $\frac{1}{2}AC \cdot x + \frac{1}{2}BC \cdot x + \frac{1}{2}AB \cdot x = \frac{1}{2}AC \cdot BC$,

解得 $x=2$,

故答案为: 2.

14. 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(-5, 1)$ 在 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上, 且 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, 比较 y_1 , y_2 , y_3 的大小 _____ (从小到大排列).

【答案】 $y_2 < y_3 < y_1$

【解析】

【分析】 本题主要考查反比例函数的图象与性质, 根据反比例函数的增减性解答即可.

【详解】 解: $\because D(-5, 1)$ 在 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上,

$\therefore k = -5 < 0$, 反比例函数图象分布在第二、四象限, 在每个象限内, y 随 x 的增大而增大,

$$\because x_1 < 0 < x_2 < x_3,$$

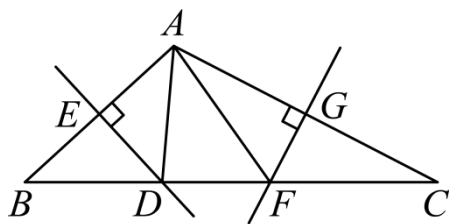
$$\therefore y_1 > 0,$$

$$\because 0 < x_2 < x_3,$$

$$\therefore y_2 < y_3 < 0 < y_1,$$

故答案为: $y_2 < y_3 < y_1$.

15. 如图, DE 垂直平分 AB , FG 垂直平分 AC , 若 $\angle BAC = 110^\circ$, 则 $\angle DAF =$ _____ 度.



【答案】 40

【解析】

【分析】 本题考查线段垂直平分线的性质, 三角形内角和定理, 等边对等角等知识点, 根据三角形内角和定理得到 $\angle B + \angle C = 70^\circ$, 根据线段垂直平分线的性质得到 $DA = DB$, $EA = EC$, 根据等边对等角得到 $\angle DAB = \angle B$, $\angle PAC = \angle C$, 进而得到 $\angle DAB + \angle PAC = \angle B + \angle C = 70^\circ$, 则 $\angle DAF = \angle BAC - \angle BAD - \angle CAF = 40^\circ$.

【详解】 解: $\because \angle BAC = 110^\circ$,

$$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ,$$

$\because DE$ 垂直平分 AB ,

$$\therefore DA = DB,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle B,$$

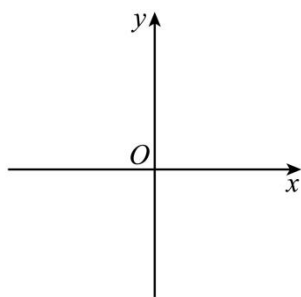
同理可得: $\angle PAC = \angle C$,

$$\therefore \angle DAB + \angle PAC = \angle B + \angle C = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle BAC - \angle BAD - \angle CAF = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ,$$

故答案为: 40.

16. 如图, 函数 $y_1 = x$, $y_2 = \frac{4}{x}$, 若 $y_1 > y_2$, 则 x 的取值范围是 _____.



【答案】 $x > 2$ 或 $-2 < x < 0$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数与反比例函数交点问题，先联立 $\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = \frac{4}{x} \end{cases}$ ，求出一一次函数与反比例函数的交点，

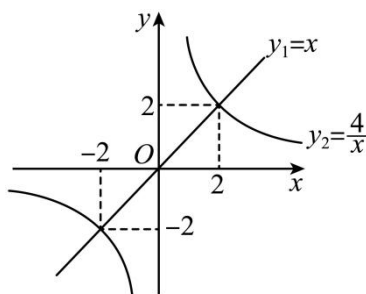
画出示意图，再根据函数图象结合 $y_1 > y_2$ 解答即可.

【详解】 解： 联立 $\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = \frac{4}{x} \end{cases}$ ， 则 $x = \frac{4}{x}$ ， 即 $x^2 = 4$ ，

解得： $x = \pm 2$ ，

则函数 $y_1 = x, y_2 = \frac{4}{x}$ 的交点为 $(-2, -2), (2, 2)$ ，

如图，



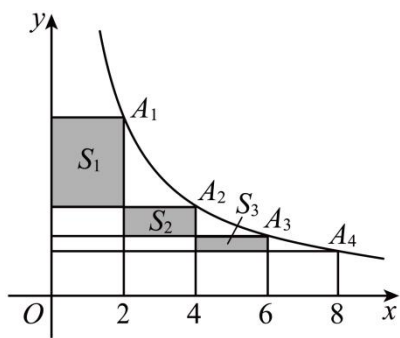
当 $y_1 > y_2$ 时， x 的取值范围是 $x > 2$ 或 $-2 < x < 0$.

故答案为： $x > 2$ 或 $-2 < x < 0$.

17. 在反比例函数 $y = \frac{10}{x} (x > 0)$ 的图象上，有一系列点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ ，若 A_1 的横坐标为 2，

且以后每个点的横坐标与它前一个点的横坐标的差都为 2，现分别过点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, A_{n+1}$ 作 x 轴与 y 轴的垂线段，构成若干个矩形，如图所示，将图中阴影部分的面积从左到右依次记为 $S_1, S_2, S_3, \dots$ ，

S_n ， 则 $S_1 =$ _____， $S_1 + S_2 + S_3 =$ _____.



【答案】 ①. 5 ②. $\frac{15}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数的性质，坐标规律探索，由已知条件横坐标成等差数列，再根据点 A_1 、 A_2 、 A_3 、 $\dots$ 、 A_n 、 A_{n+1} 在反比例函数上，求出各点坐标，即可求出 S_1 ， S_2 ， S_3 ，进而求出 $S_1 + S_2 + S_3$ 。

【详解】 解： $\because$ 点 A_1 、 A_2 、 A_3 、 $\dots$ 、 A_n 、 A_{n+1} 在反比例函数图象上，且 A_1 的横坐标为 2，

$$\therefore A_1\left(2, \frac{10}{2}\right),$$

$\because$ 以后每点的横坐标与它前一个点的横坐标的差都为 2，

$$\therefore A_2\left(4, \frac{10}{4}\right), A_3\left(6, \frac{10}{6}\right),$$

$$\therefore S_1 = 2 \times \left(\frac{10}{2} - \frac{10}{4}\right) = 5,$$

$$S_2 = 2 \times \left(\frac{10}{4} - \frac{10}{6}\right) = \frac{5}{3},$$

$$S_3 = 2 \times \left(\frac{10}{6} - \frac{10}{8}\right) = \frac{5}{6},$$

$$\therefore S_1 + S_2 + S_3$$

$$= 5 + \frac{5}{3} + \frac{5}{6}$$

$$= \frac{15}{2}.$$

故答案为：5； $\frac{15}{2}$ 。

18. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + x - 3 = 0$ ，设方程两个实数根分别为 x_1 ， x_2 ，且满足

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 = 4, \quad k = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{1}{4}$ 或 1

【解析】

【详解】解：因为 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + x - 3 = 0$ 的两个实数根，

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{1}{k}, \quad x_1 x_2 = -\frac{3}{k}.$$

$$\text{又因为 } (x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 = 4,$$

$$\text{所以 } \left(-\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{3}{k} = 4,$$

$$\text{解得 } k_1 = \frac{1}{4}, \quad k_2 = -1,$$

经检验，两根都是原方程的解，且满足 $k \neq 0$ ，

所以 k 的值为 $\frac{1}{4}$ 或 -1 。

故答案为： $\frac{1}{4}$ 或 1。

三. 解答题 (本大题共 7 题, 满分 66 分)

19 计算:

$$(1) \sqrt{10} \times \sqrt{8} - \frac{1}{2 - \sqrt{5}} + 10\sqrt{\frac{1}{5}};$$

$$(2) (\text{用配方法解方程}) \quad 2x^2 - 3x - 3 = 0.$$

【答案】 (1) $7\sqrt{5} + 2$;

$$(2) \quad x_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}.$$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程 - 配方法，分母有理化，二次根式的混合运算，准确熟练地进行计算是解题的关键。

(1) 先计算二次根式的乘除法，再算加减，即可解答；

(2) 利用解一元二次方程 - 配方法进行计算，即可解答。

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \sqrt{10} \times \sqrt{8} - \frac{1}{2 - \sqrt{5}} + 10\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$= \sqrt{80} - \frac{2+\sqrt{5}}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} + 10 \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$= 4\sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$$

$$= 7\sqrt{5} + 2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } 2x^2 - 3x - 3 = 0,$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0,$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{3}{2},$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{33}{16},$$

$$x - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{33}}{4},$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{4}, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{4}.$$

20. 已知 $y = y_1 + y_2$, y_1 与 $\sqrt{x-1}$ 成正比例, y_2 与 $x+2$ 成反比例, 当 $x=1$ 、 $x=5$ 时, y 的值都为 1, 求 y 和 x 之间的函数解析式以及当 $x=2$ 时 y 的值.

【答案】 $y = \frac{2}{7}\sqrt{x-1} + \frac{3}{x+2}, \quad \frac{29}{28}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了待定系数法求函数解析式, 设出函数表达式是解题的关键. 根据题意设 $y_1 = k_1\sqrt{x-1}$, $y_2 = \frac{k_2}{x+2}$, 然后把 $x=1$ 、 $x=5$ 时, y 的值都为 1, 分别代入得到关于 k_1 、 k_2 的方程组, 解方程组求出 k_1 、 k_2 的值, 然后代入即可得解.

【详解】 解: 设 $y_1 = k_1\sqrt{x-1}$, $y_2 = \frac{k_2}{x+2}$,

$$\therefore y = k_1\sqrt{x-1} + \frac{k_2}{x+2},$$

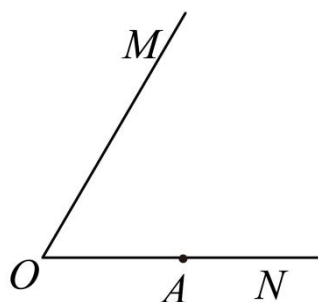
把 $x=1, y=1; x=5, y=1$, 别代入上式得:
$$\begin{cases} 1 = \frac{k_2}{3} \\ 1 = 2k_1 + \frac{k_2}{7} \end{cases},$$

解之得 $k_1 = \frac{2}{7}, k_2 = 3$,

$$\therefore y = \frac{2}{7}\sqrt{x-1} + \frac{3}{x+2}.$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时, } y = \frac{2}{7}\sqrt{2-1} + \frac{3}{2+2} = \frac{2}{7} + \frac{3}{4} = \frac{29}{28}.$$

21. 已知: 如图, $\angle MON = 60^\circ$, 点 A 在 ON 上.



(1) 在射线 OM 上找一点 B , 使 $OB = OA$;

(2) 在 $\angle MON$ 的内部找一点 P , 使 P 到 $\angle MON$ 的两边距离相等, 且 $AP = \frac{1}{2}OB$ (保留作图痕迹, 不需要写出作图步骤)

【答案】(1) 见解析;

(2) 见解析

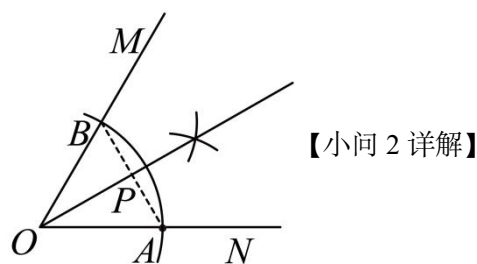
【解析】

【分析】(1) 以 O 为圆心, OA 为半径作弧交 OM 于点 B , 点 B 即为所求;

(2) 连接 AB , 由题意可知 AOB 是等边三角形, 作 OP 平分 MON 交 AB 于 P , 点 P 即为所求.

【小问 1 详解】

解: 如图, 点 B 即为所求;

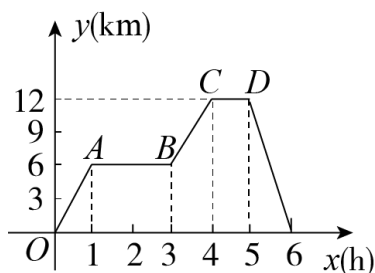


解: 如图, 点 P 即为所求.

【点睛】本题考查作图 - 复杂作图, 角平分线的性质, 线段垂直平分线的性质, 等腰三角形的判定等知识,

解题的关键是理解题意，正确作出图形.

22. 小明同学骑自行车从家里出发依次去甲、乙两个景点游玩，他离家的距离 $y(\text{km})$ 与所用的时间 $x(\text{h})$ 之间的函数图像如图所示：



- (1) 甲景点与乙景点相距_____千米，乙景点与小明家距离是_____千米；
(2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时， y 与 x 的函数关系式是_____；
(3) 小明在游玩途中，停留所用时间为_____小时，在 6 小时内共骑行_____千米.

【答案】 (1) 6, 12; (2) $y=6x$; (3) 3, 24

【解析】

【分析】 (1) 根据函数图像，直接得到答案即可；

(2) 根据待定系数法，即可求解；

(3) 根据函数图像，直接得到答案即可.

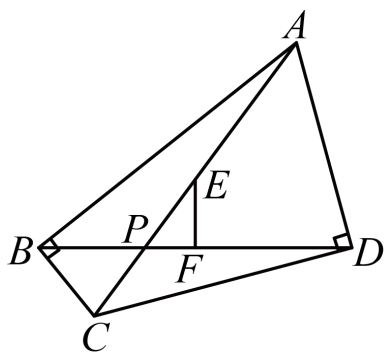
【详解】 (1) 由图像可知：当 $3 \leq x \leq 4$ 时，小明从甲景点到乙景点，所以甲景点与乙景点相距 6 千米，当 $5 \leq x \leq 6$ 时，小明从乙景点到家，所以乙景点与小明家距离是 12 千米，
故答案是：6, 12;

(2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时， y 是 x 的正比例函数，设 $y=kx$ ，
把 A (1, 6) 代入 $y=kx$ ，得 $6=k$ ，所以 y 与 x 的函数关系式是 $y=6x$ ，
故答案是： $y=6x$;

(3) 由图像得，当 $1 \leq x \leq 3$ 时，小明在甲景点玩，当 $4 \leq x \leq 5$ 时，小明在乙景点玩，所以小明在游玩途中，停留所用时间为 3 小时；小明从家到甲景点 6 千米，小明从甲景点到乙景点 6 千米，乙景点与小明家距离是 12 千米，所以在 6 小时内共骑行 24 千米，
故答案是：3, 24

【点睛】 本题主要考查函数图像，理解函数图象上点得坐标的实际意义，是解题的关键.

23. 已知：四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， E 、 F 分别是对角线 AC 、 BD 的中点， AC 、 BD 交于 P ，当 $\angle BAC = 15^\circ$ ， $AC = 12\text{cm}$ ， $PB = PE$ 时，求 EF 的长.

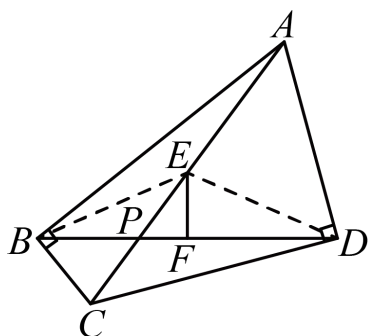


【答案】 3cm

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的判定和性质，直角三角形斜边中线的性质，含 30° 度角的直角三角形，解题的关键是掌握相关知识解决问题. 如图，连接 EB, ED . 证明 $EB = ED, \angle EBF = 30^\circ$ ，求出 BE ，可得结论.

【详解】 解：如图，连接 EB, ED .



$$\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ, AE = EC, AC = 12\text{cm},$$

$$\therefore EB = EA = EC = ED = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 12 = 6\text{cm},$$

$$\because BF = FD,$$

$$\therefore EF \perp BD,$$

$$\because EA = EB,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EBA = 15^\circ,$$

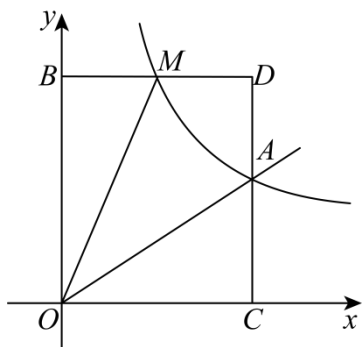
$$\therefore \angle BEC = \angle EAB + \angle EBA = 30^\circ,$$

$$\because PB = PE,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle BEC = 30^\circ,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2} \times 6 = 3\text{cm}.$$

24. 正比例函数 $y = ax$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于点 $A(4, 3)$, $M(m, n)$ 是反比例函数图象上的一动点,



- (1) 求正比例函数和反比例函数的解析式;
- (2) 如图, 当 $0 < m < 4$, 过点 M 作直线 $MB \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 B , 过点 A 作直线 $AC \parallel y$ 轴交 x 轴于点 C 、交直线 MB 于点 D . 用只含 m 的代数式表示四边形 $OADM$ 的面积;
- (3) 当四边形 $OADM$ 的面积为 8 时, 求 m 的值.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{4}x$, $y = \frac{12}{x}$

(2) $\frac{48}{m} - 12$

(3) $\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 将点 A 的坐标分别代入两个函数解析式, 即可求解;

(2) 由四边形 $OADM$ 的面积 $= S_{\text{矩形}OCDB} - S_{\triangle CAO} - S_{\triangle OBM}$, 即可求解;

(3) 四边形 $OADM$ 的面积 $= \frac{48}{m} - 12 = 8$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 将点 A 的坐标分别代入两个函数解析式得: $3 = 4a$, $3 = \frac{k}{4}$,

解得: $a = \frac{3}{4}$, $k = 12$,

则正比例和反比例函数的解析式分别为: $y = \frac{3}{4}x$, $y = \frac{12}{x}$;

【小问 2 详解】

解: 根据题意得, 点 $D(4, n)$,

$\because$ 点 $M(m, n)$ 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上;

$$\therefore n = \frac{12}{m}$$

$$\therefore D\left(4, \frac{12}{m}\right),$$

$\because$ 点 A, M 在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上,

$$\therefore S_{\triangle CAO} = \frac{1}{2} \times 12 = 6, S_{\triangle OBM} = \frac{1}{2} \times 12 = 6,$$

$$\therefore \text{四边形 } OADM \text{ 的面积} = S_{\text{矩形 } OCDB} - S_{\triangle CAO} - S_{\triangle OBM} = 4 \times \frac{12}{m} - 6 - 6 = \frac{48}{m} - 12;$$

【小问 3 详解】

解: 当四边形 $OADM$ 的面积为 8 时,

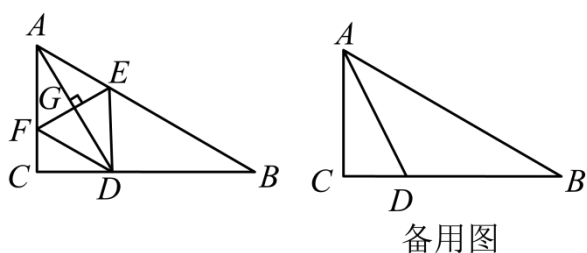
$$\frac{48}{m} - 12 = 8,$$

$$\text{解得: } m = \frac{12}{5},$$

经检验, $m = \frac{12}{5}$ 是该方程的解.

【点睛】此题属于反比例函数的综合题, 涉及的知识有: 反比例函数与一次函数的交点, 坐标与图形, 利用待定系数法求一次函数解析式, 以及点与坐标的关系, 利用了数形结合及方程的思想, 是中考中常考的题型.

25. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 6$, AD 平分 $\angle BAC$, 交 BC 边于点 D . 点 E 是边 AB 上一动点 (与点 A, B 不重合). 过点 E 作 $EF \perp AD$, 垂足为点 G , 与射线 AC 交于点 F . (注: 在直角三角形中, 30° 所对的直角边的长与 60° 所对的直角边的长的比是 $1:\sqrt{3}$)



(1) 当点 F 在边 AC 上时,

①求证: $DE = DF$;

②设 $BE = x$, $S_{\triangle CFE} = y$, 求 y 与 x 之间的函数解析式并写出 x 的取值范围.

(2) 当 $\triangle ADF$ 是等腰三角形时, 求 BE 的长.

【答案】(1) ①见解析; ② $y = \sqrt{3}x - 6\sqrt{3}$ ($6 \leq x < 12$)

(2) BE 的长为 8 或 $12 - 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) ①先证 $\triangle AGF \cong \triangle AGE$ (ASA), 得 $GF = GE$, 再由线段垂直平分线的性质即可得出结论;

②先求出 $AB = 2AC = 12$, 则 $AE = AB - BE = 12 - x$, 再由全等三角形的性质得 $AF = AE = 12 - x$, 则 $AC - AF = 6 - (12 - x) = x - 6$, 再由 $y = \frac{1}{2} AC \times CD$, 即可求解;

(2) 分三种情况: ①当 $FA = FD$ 时, 则 $\angle FDG = \angle CAD = 30^\circ$, 求出 $\angle CDF = 30^\circ$, 再由含 30° 角的直角三角形的性质得 $DF = 2CF$, 则 $6 - CF = 2CF$, 解得: $CF = 2$, 进而得 $BE = 8$; ②当 $DF = DA$ 时, 则 $CF = CA = 6$, 求出 $AF = CF + CA = 12$, 得 $AE = AF = 12$, 点 E 与点 B 重合, 舍去; ③当 $AF = AD$

时, 先由含 30° 角的直角三角形的性质得 $CD = \frac{\sqrt{3}}{3} AC = 2\sqrt{3}$, $AF = AD = 2CD = 4$, 再证 $\triangle AEF$ 是

等边三角形, 则 $AE = AF$, 得 $BE = AB - AE = 12 - 4\sqrt{3}$ 即可.

【小问1详解】

①证明: $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle CAD = \angle BAD,$$

$$\because EF \perp AD,$$

$$\therefore \angle AGF = \angle AGE = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because AG = AG,$$

$$\therefore \triangle AGF \cong \triangle AGE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore GF = GE,$$

$$\text{又} \because EF \perp AD,$$

$$\therefore DE = DF;$$

②解: $\because \angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 6$,

$$\therefore AB = 2AC = 12,$$

$$\because BE = x,$$

$$\therefore AE = AB - BE = 12 - x,$$

由①得: $\triangle AGF \cong \triangle AGE$,

$$\therefore AF = AE = 12 - x,$$

$$\therefore CF = AC - AF = 6 - (12 - x) = x - 6,$$

$$\because 0 < AF \leq 6,$$

$$\therefore 0 < 12 - x \leq 6,$$

$$\therefore 6 \leq x < 12,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$\therefore AC = 6$ ，在直角三角形中， 30° 所对的直角边的长与 60° 所对的直角边的长的比是 $1:\sqrt{3}$ ，

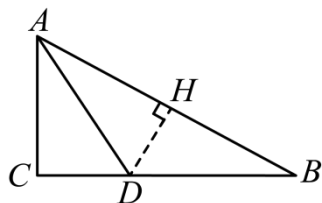
$$\therefore BC = 6\sqrt{3},$$

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC = 30^\circ = \angle B,$$

$$\therefore BD = AD,$$

在等腰三角形 ADB 中，作 $DH \perp AB$ 于点 H ，则 $AH = BH = \frac{1}{2}AB = 6$ ，



设 $DH = a$ ，则 $BD = 2a$ ，

$$\text{则 } (2a)^2 - a^2 = 6^2,$$

$$\text{解得: } a = 2\sqrt{3},$$

$$\text{则 } BD = 2a = 4\sqrt{3},$$

$$\text{则 } CD = BC - BD = 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}FC \times CD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times (x - 6) = \sqrt{3}x - 6\sqrt{3} \quad (6 \leq x < 12);$$

【小问2详解】

解: $\because \angle C = 90^\circ, \angle B = 30^\circ,$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

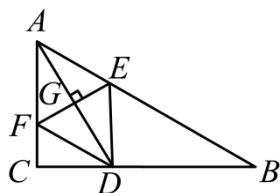
$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore \angle CAD = \angle BAD = 30^\circ,$$

设 $CF = m$ ，

分三种情况:

①当 $FA = FD$ 时，如图所示:



则 $\angle FDG = \angle CAD = 30^\circ$,

$\because \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \angle CDF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$,

$\therefore DF = 2CF$,

$\therefore 6 - m = 2m$,

解得: $m = 2$,

$\therefore AF = 6 - 2 = 4$,

$\therefore AE = AF = 4$,

$\therefore BE = 12 - 4 = 8$;

②当 $DF = DA$ 时, 如图 2 所示:

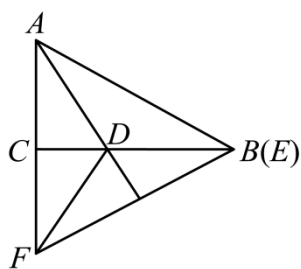


图2

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore DC \perp AC$,

$\therefore CF = CA = 6$,

$\therefore AF = CF + CA = 12$,

$\therefore AE = AF = 12$,

$\because$ 点 E 是边 AB 上一动点 (与点 A 、 B 不重合), $AB = 12$,

$\therefore$ 点 E 与点 B 重合, 舍去;

③当 $AF = AD$ 时, 如图 3 所示:

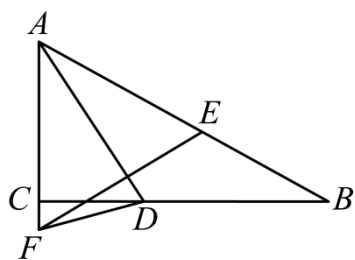


图3

$$\because \angle ACD = 90^\circ, \angle CAD = 30^\circ, AC = 6,$$

$$\therefore CD = \frac{\sqrt{3}}{3} AC = 2\sqrt{3}, AF = AD = 2CD = 4\sqrt{3},$$

$$\because EF \perp AD,$$

$$\therefore \angle AEF = 90^\circ - \angle BAD = 60^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形,

$$\therefore AE = AF = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore BE = AB - AE = 12 - 4\sqrt{3};$$

综上所述, 当 $\triangle ADF$ 是等腰三角形时, BE 的长为 8 或 $12 - 4\sqrt{3}$.

【点睛】 本题是三角形综合题目, 考查了全等三角形的判定与性质、含 30° 角的直角三角形的性质、等腰三角形的性质、线段垂直平分线的性质、直角三角形的性质等知识; 本题综合性强, 熟练掌握等腰三角形的性质和含 30° 角的直角三角形的性质, 证明三角形全等是解题的关键, 属于中考常考题型.

一、填空题 (每题 4 分, 共 16 分)

26. 到三角形三边所在直线距离相等的点有_____个.

【答案】 4

【解析】

【详解】 分析: 在三角形内部到三边距离相等的点是三条内角平分线的交点, 只有一个; 在三角形的外部到三条边所在直线距离相等的点是外角平分线的交点, 有三个.

解答: 解: $\because$ 在三角形内部到三边距离相等的点是三条内角平分线的交点, 交点重合, 只有一点;

在三角形的外部到三条边所在直线距离相等的点是外角平分线的交点, 交点不重合, 有三个.

$\therefore$ 到三角形三边所在直线距离相等的点有 4 个.

故答案为 4.

点睛: 此题是考查角平分线的性质的灵活应用. 注意三角形的外角平分线不要漏掉, 有 3 个交点.

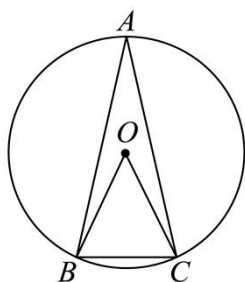
27. 已知在 $\triangle ABC$ 中, O 是的外心 (三条中垂线的交点), $\angle BOC = 50^\circ$, 则 $\angle A =$ _____.

【答案】 25° 或 155°

【解析】

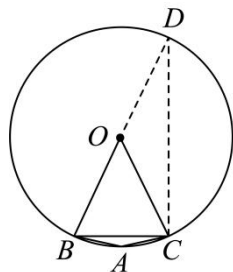
【分析】 本题主要考查了三角形的外接圆与外心, 圆内接四边形的性质, 分圆心 O 与点 A 在 BC 的同侧和圆心 O 与点 A 在 BC 的两侧两种情况解答, 利用一条弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半即可求得结论; 延长 BO 交 $\odot O$ 于点 D , 连接 CD , 利用一条弧所对的圆周角等于它所对圆心角的一半即可求得 $\angle D$, 再利用圆内接四边形的性质即可求得结论.

【详解】 解: 如图, 当圆心 O 与点 A 在 BC 的同侧时,



$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 25^\circ;$$

如图, 当圆心 O 与点 A 在 BC 的两侧时,



延长 BO 交 $\odot O$ 于点 D , 连接 CD ,

$$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle BOC = 25^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ACDB$ 为圆的内接四边形,

$$\therefore \angle BAC + \angle D = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle D = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ.$$

综上, $\angle BAC = 25^\circ$ 或 155° .

故答案为: 25° 或 155° .

28. 定义 $a \otimes b = \begin{cases} a(a-b \leq 1) \\ b(a-b > 1) \end{cases}$, 比如, $4 \otimes 2 = 2$, $1 \otimes 5 = 1$. 若实数 k 满足 $k[x^2 \otimes (x+1)] - 1 = 0$, 并且

这个关于 x 的方程有两个不相等的实数解, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq 1$ 或 $\frac{1}{4} \leq k < \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 先根据定义对方程分 $x^2 - (x+1) \leq 1$ 和 $x^2 - (x+1) > 1$ 两种情况讨论，画出函数图象，再根据图象即可得出答案.

【详解】 解：当 $x^2 - (x+1) \leq 1$ 时，即 $-1 \leq x \leq 2$ 时，方程 $k[x^2 \otimes (x+1)] - 1 = 0$ 为 $kx^2 - 1 = 0$.

$$\therefore x^2 = \frac{1}{k},$$

当 $x^2 - (x+1) > 1$ 时，即 $x < -1$ 或 $x > 2$ 时，方程变为 $k(x+1) - 1 = 0$,

$$\therefore x+1 = \frac{1}{k},$$

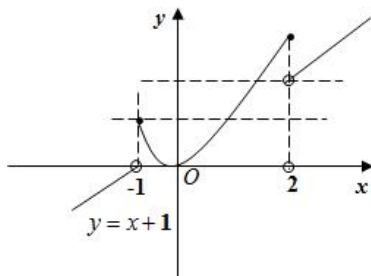
当 $x=2$ 时由 $x^2 = \frac{1}{k}$ 得出 $k = \frac{1}{4}$,

当 $x=2$ 时由 $x+1 = \frac{1}{k}$ 得出 $k = \frac{1}{3}$,

当 $x=-1$ 时 $x^2 = \frac{1}{k}$ 得出 $k=1$,

$\therefore$ 关于 x 的方程 $k[x^2 \otimes (x+1)] - 1 = 0$ 有两个不相等的实数解，

$\therefore$ 函数图象有两个不同的交点，如图所示

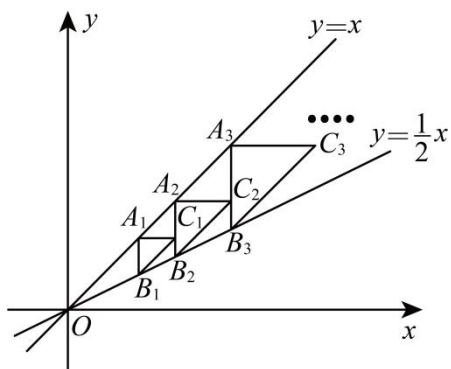


$$\therefore k \geq 1 \text{ 或 } \frac{1}{4} \leq k < \frac{1}{3}$$

故答案为： $k \geq 1$ 或 $\frac{1}{4} \leq k < \frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查了新定义问题，函数与方程的关系，数形相结合的思想是解题的关键

29. 如图，点 $A_1(2, 2)$ 在直线 $y=x$ 上，过点 A_1 作 $A_1B_1 \parallel y$ 轴交直线 $y = \frac{1}{2}x$ 于点 B_1 ，以点 A_1 为直角顶点， A_1B_1 为直角边在 A_1B_1 的右侧作等腰直角 $\triangle A_1B_1C_1$ ，再过点 C_1 作 $A_2B_2 \parallel y$ 轴，分别交直线 $y=x$ 和 $y = \frac{1}{2}x$ 于 A_2 ， B_2 两点，以点 A_2 为直角顶点， A_2B_2 为直角边在 A_2B_2 的右侧作等腰直角 $\triangle A_2B_2C_2 \dots$ ，按此规律进行下去，则等腰直角 $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为_____。（用含正整数 n 的代数式表示）



【答案】 $\frac{3^{2n-2}}{2^{2n-1}}$

【解析】

【分析】

【详解】解：∵点 $A_1 (2, 2)$ ， $A_1B_1 \parallel y$ 轴交直线 $y=\frac{1}{2}x$ 于点 B_1 ，

$$\therefore B_1 (2, 1)$$

$$\therefore A_1B_1=2-1=1, \text{ 即 } \triangle A_1B_1C_1 \text{ 面积}=\frac{1}{2} \times 1^2=\frac{1}{2};$$

$$\therefore A_1C_1=A_1B_1=1,$$

$$\therefore A_2 (3, 3),$$

又∵ $A_2B_2 \parallel y$ 轴，交直线 $y=\frac{1}{2}x$ 于点 B_2 ，

$$\therefore B_2 (3, \frac{3}{2}),$$

$$\therefore A_2B_2=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}, \text{ 即 } \triangle A_2B_2C_2 \text{ 面积}=\frac{1}{2} \times (\frac{3}{2})^2=\frac{9}{8};$$

以此类推，

$$A_3B_3=\frac{9}{4}, \text{ 即 } \triangle A_3B_3C_3 \text{ 面积}=\frac{1}{2} \times (\frac{9}{4})^2=\frac{81}{32};$$

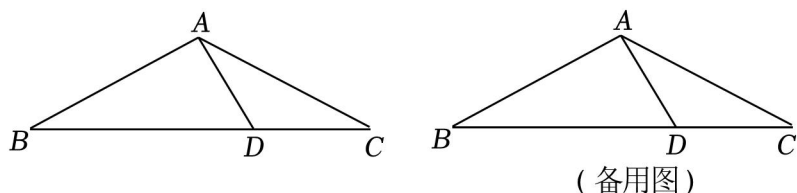
$$A_4B_4=\frac{27}{8}, \text{ 即 } \triangle A_4B_4C_4 \text{ 面积}=\frac{1}{2} \times (\frac{27}{8})^2=\frac{729}{128};$$

...

$$\therefore A_nB_n=(\frac{3}{2})^{n-1}, \text{ 即 } \triangle A_nB_nC_n \text{ 的面积}=\frac{1}{2} \times [(\frac{3}{2})^{n-1}]^2=\frac{3^{2n-2}}{2^{2n-1}}.$$

二、解答题

30. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 D 在 BC 边上， $\angle DAB=90^\circ$ 。



(1) 当 $\angle C = 30^\circ$ ，求证： $BD = 2CD$ ；

(2) 当 $BD = 2CD$ 时， $\angle C$ 是否一定为 30° ，如果一定，给出证明；如果不一定，请说明理由．

【答案】(1) 见解析；

(2) 一定，见解析

【解析】

【分析】本题考查了含 30° 角的直角三角形，等腰三角形的性质的应用，熟练掌握含 30° 角的直角三角形的性质是解题的关键．

(1) 由条件得到直角三角形中， 30° 角所对的直角边是斜边的一半，再利用等腰三角形的性质，等角对等边，从而证得结果；

(2) 通过作辅助线，得到 $\triangle ABM \cong \triangle ACD$ ，再利用 $AD = AM = MD$ ，得到 $\triangle ADM$ 为等边三角形，从而得到结果．

【小问 1 详解】

证明：当 $\angle C = 30^\circ$ 时，

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore BD = 2AD \text{ 且 } \angle ADB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ADB - \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ,$$

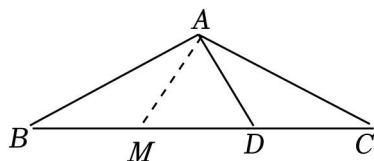
$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore BD = 2CD;$$

【小问 2 详解】

解：当 $BD = 2CD$ 时， $\angle C = 30^\circ$ ，理由如下：

取 BD 的中点 M ，连接 AM ，



$$\therefore \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore AM = BM = DM = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BD = 2CD,$$

$$\therefore AM = CD,$$

$$\therefore BM = CD,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

在 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle B = \angle C \\ BM = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ACD,$$

$$\therefore AD = AM,$$

$$\therefore AD = AM = MD,$$

$$\therefore \angle ADM = 60^\circ,$$

$$\text{又} \therefore \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ.$$

31. 一家公司, 处于发展期当中, 第一年年末增加员工 m 人, 第二年年末增加员工 n 人. 统计发现, 正好是第一年员工人数增长了 $\frac{n}{60}$, 第二年员工人数增长了 $\frac{m}{60}$, 已知每次增加的人数不超过公司原有的人数的两倍, 试求公司现在的人数.

【答案】 165 人

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 先根据“正好是第一年员工人数增长了 $\frac{n}{60}$, 第二年员工人数增长了 $\frac{m}{60}$ ”列方程求出公司原有人数, 再求解.

$$\text{【详解】解: 设公司原来有 } x \text{ 人, 根据题意得 } \frac{n}{60}x = m \text{ 即 } \frac{n}{m} = \frac{60}{x}, \frac{m}{60}(x+m) = n \text{ 即 } \frac{n}{m} = \frac{x+m}{60},$$

$$\therefore \frac{60}{x} = \frac{x+m}{60}$$

$$\therefore x^2 + xm = 3600,$$

解得: $x = \frac{\sqrt{m^2 + 14400} - m}{2}$ (负值舍去)

$\because m, n, x$ 都是正整数, 每次增加的人数不超过公司原有的人数的两倍,

$\therefore \sqrt{m^2 + 120^2}$ 是正整数,

$\because 50^2 + 120^2 = 130^2, 90^2 + 120^2 = 150^2, \dots$

当 $m = 50$ 时, $x = 40, n = 75$, 符合题意;

当 $m = 90$ 时, $x = 30, n = 240$ (增加的人数超过公司原有的人数的两倍, 舍去)

$\dots$ (舍去)

$\therefore$ 公司现在的人数为 $40 + 50 + 75 = 165$ (人)