

2024 学年第一学期八年级数学学科

阶段诊断测评

(考试时间 60 分钟, 满分 100 分)

一、选择题: (每题 3 分, 共 12 分)

1. 下列各组数据是线段长, 其中不能作为直角三角形的三边长的是 ()

- A. $1, 1, \sqrt{2}$ B. $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ C. $1, \sqrt{3}, 2$ D. $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$

【答案】D

【解析】

【分析】比较较小的两边的平方和是否等于较长边的平方来判定即可.

【详解】A. $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$, 此三角形是直角三角形, 故不符合题意;

B. $1^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2$, 此三角形是直角三角形, 故不符合题意;

C. $1^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2$, 此三角形是直角三角形, 故不符合题意;

D. $(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{4})^2 \neq (\sqrt{5})^2$, 此三角形不是直角三角形, 故符合题意;

故选: D.

【点睛】此题考查勾股定理的逆定理, 三角形的两边的平方和等于第三边的平方, 则此三角形为直角三角形.

2. 下列方程中是一元二次方程的是 ()

- A. $\sqrt{x^2} = 2$ B. $x^2 - x - 2$ C. $\frac{1}{x^2} - 2 = 0$ D. $x^2 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义, 熟练掌握一元二次方程的定义是解题的关键. 根据一元二次方程的定义逐项分析即可得出答案.

【详解】解: A、 $\sqrt{x^2} = 2$, 不是整式方程, 故此选项不是一元二次方程, 不符合题意;

B、 $x^2 - x - 2$, 不是方程, 故此选项不是一元二次方程, 不符合题意;

C、 $\frac{1}{x^2} - 2 = 0$, 不是整式方程, 故此选项不是一元二次方程, 不符合题意;

D、 $x^2 = 0$, 是一元二次方程, 符合题意;

故选：D.

3. 到三角形各边的距离相等的点是三角形 ()

A. 三边中垂线的交点

B. 三条中线的交点

C. 三条高的中点

D. 三条角平分线的交点

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查的是角平分线的性质，掌握角的平分线上的点到角的两边的距离相等是解题的关键.
根据角的平分线上的点到角的两边的距离相等解答即可.

【详解】解：∵角的平分线上的点到角的两边的距离相等，
∴到三角形三条边的距离相等的点是三角形三条角平分线的交点，

故选：D.

4. 下列命题的逆命题是假命题的是 ()

A. 全等三角形的面积相等；

B. 等腰三角形两个底角相等；

C. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；

D. 在角的平分线上任意一点到这个角的两边的距离相等.

【答案】A

【解析】

【分析】 先确定每个命题的逆命题，再对每个选项依次判定即可解答.

【详解】A.逆命题为：面积相等的三角形是全等三角形，是假命题，符合题意；
B.逆命题为：两个角相等的三角形是等腰三角形，是真命题，不符合题意；
C.逆命题为：一条边上的中线等于这条边的一半的三角形是直角三角形，是真命题，不符合题意；
D.在角的内部到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上，是真命题，不符合题意.

故选：A.

【点睛】 此题考查命题，正确的命题是真命题，错误的命题是假命题，正确确定每个命题的逆命题是解此题的关键.

二、填空题：(每空 3 分，共 42 分)

5. $\sqrt{x}-y$ 的有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{x}+y$

【解析】

【分析】根据有理化因式的定义：两个根式相乘的积不含根号，即可得答案.

【详解】 $\because (\sqrt{x}-y)(\sqrt{x}+y)=x-y^2$ ，结果不含根式，

$\therefore \sqrt{x}-y$ 的有理化因式是 $\sqrt{x}+y$ ，

故答案为 $\sqrt{x}+y$

【点睛】本题考查了分母有理化，两个含有根式的代数式相乘，如果它们的积不含有根式，那么这两个代数式相互叫做有理化因式；正确选择二次根式，使它们的积符合平方差公式是解题的关键.

6. 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，关于 x 的方程 $x^2 - 4x + 2m = 0$ 有两个相等的实数根.

【答案】2

【解析】

【分析】本题考查了根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系，当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根. 根据根的判别式的意义得到 $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2m = 0$ ，然后解一次方程即可.

【详解】解：根据题意得

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2m = 0$$

解得 $m = 2$

即当 $m = 2$ 时，关于 x 的方程 $x^2 - 4x + 2m = 0$ 有两个相等的实数根.

故答案为：2.

7. 某型号的手机经过连续两次降价，每部售价由原来的 1152 元降到了 800 元. 设平均每次降价的百分率为 x ，列出关于 x 的方程 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $1152(1-x)^2 = 800$

【解析】

【分析】本题主要考查了从实际问题中抽象出一元二次方程，设平均每次降价的百分率为 x ，则第一次降价后的售价为 $1152(1-x)$ 元，则第二次降价后的售价为 $1152(1-x)^2$ 元，据此列出方程即可.

【详解】解：设平均每次降价的百分率为 x ，

由题意得， $1152(1-x)^2 = 800$ ，

故答案为： $1152(1-x)^2 = 800$.

8. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A - \angle B = 30^\circ$, $\angle A =$ _____.

【答案】 60°

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形内角和定理, 先求出 $\angle B = \angle A - 30^\circ$, 再根据三角形内角和为 180 度列式求解即可.

【详解】 解: $\because \angle A - \angle B = 30^\circ$,

$$\therefore \angle B = \angle A - 30^\circ,$$

$$\because \angle C = 90^\circ, \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A - 30^\circ + \angle A + 90^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

故答案为: 60° .

9. 命题“线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等”的逆命题是_____.

【答案】 到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上

【解析】

【分析】 本题考查了命题与逆命题, 掌握命题的题设和结论是解题的关键. 交换命题的题设和结论的位置, 即可得出命题的逆命题.

【详解】 解: 命题“线段垂直平分线上的任意一点到这条线段两个端点的距离相等”的逆命题是“到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上”.

故答案为: 到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上.

10. 已知直角坐标平面内两点 $A(3,1)$ 和 $B(1,-2)$, 那么 A 、 B 两点间的距离等于_____.

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理, 两点间的距离, 解题的关键是掌握两点间的距离公式.

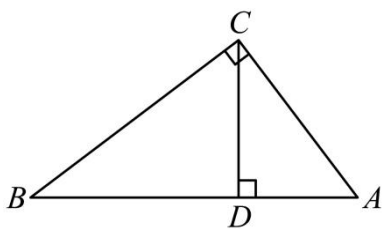
根据两点间的距离公式 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 解答即可.

【详解】 $\because$ 直角坐标平面内两点 $A(3,1)$ 和 $B(1,-2)$,

$$\therefore A、B \text{ 两点间的距离等于 } \sqrt{(3-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}.$$

故答案为: $\sqrt{13}$.

11. 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 若 $\angle ACD = 26^\circ$, 则 $\angle B =$ _____.



【答案】 26° ##26 度

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形的性质，熟练掌握直角三角形的性质是解题的关键．根据直角三角形的性质即可求解．

【详解】 解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ACD = 26^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD = \angle ACB - \angle ACD = 64^\circ$ ，

$\because CD \perp AB$ ，

$\therefore \angle CDB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$ ．

故答案为： 26° ．

12. 经过定点 A 且半径为 5cm 的圆的圆心的轨迹是_____．

【答案】 以点 A 为圆心， 5cm 为半径的圆．

【解析】

【分析】 要求作经过定点 A， 且半径为 5 厘米的圆的圆心， 则圆心应满足到点 A 的距离恒等于 5cm， 根据点和圆的位置关系与数量之间的联系进行分析．

【详解】 解： 所求圆心的轨迹， 就是到 A 点的距离等于 5 厘米的点的集合， 因此应该是一个以点 A 为圆心， 5cm 为半径的圆．

故答案为以点 A 为圆心， 5cm 为半径的圆．

【点睛】 此题考查了轨迹， 就是到定点的距离等于定长的点的集合， 因此应该是一个圆．

13. 若直角三角形斜边上的高是 3， 斜边上的中线是 6， 则这个直角三角形的面积是 _____．

【答案】 18

【解析】

【分析】 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半求得斜边长为 12， 再利用三角形的面积公式求解即可．

【详解】 解： $\because$ 直角三角形斜边上的中线是 6，

$\therefore$ 斜边长为 12，

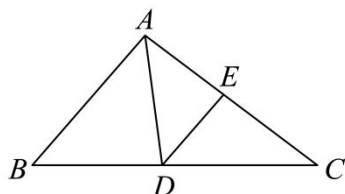
$\therefore$ 斜边上的高是 3,

$\therefore$ 这个直角三角形的面积是 $\frac{1}{2} \times 12 \times 3 = 18$,

故答案为: 18.

【点睛】 本题考查直角三角形斜边中线性质的, 熟知直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解答的关键.

14. 如图, AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \parallel AB$ 交 AC 于 E , 若 $AE = 5\text{cm}$, 则 $DE =$ _____ cm .



【答案】 5

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的性质, 角平分线的定义, 等角对等边, 由角平分线的定义和平行线的性质可证明 $\angle ADE = \angle EAD$, 则 $DE = AE = 5\text{cm}$.

【详解】 解: $\because AD$ 为 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle BAD = \angle EAD,$$

$$\because DE \parallel AB,$$

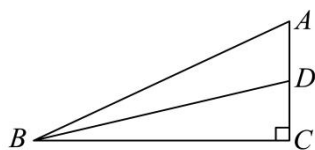
$$\therefore \angle BAD = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle EAD,$$

$$\therefore DE = AE = 5\text{cm},$$

故答案为: 5.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, 如果 $CD = 2$, 点 D 到 AB 的距离是_____.

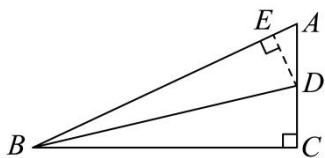


【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的性质, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 由角平分线的性质得到 $DE = CD = 2$, 据此可得答案.

【详解】 解: 如图所示, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ,



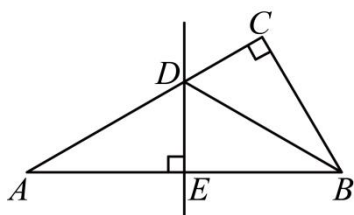
$\because BD$ 平分 $\angle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $DE \perp AB$,

$\therefore DE = CD = 2$,

$\therefore$ 点 D 到 AB 的距离是 2,

故答案为: 2.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 边 AB 的垂直平分线 DE 交 AC 于 D , $CD = 10\text{cm}$, $AD = 20\text{cm}$, 则 $\angle A =$ _____.



【答案】 30° ## 30° 度

【解析】

【分析】 如图所示, 连接 CE , 由线段垂直平分线的性质可得 $AD = BD = 20\text{cm}$, $AE = BE$, 利用勾股定理求出 $BC = 10\sqrt{3}\text{cm}$, 进而求出 $AB = 20\sqrt{3}\text{cm}$, 由直角三角形的性质得到 $CE = BE = \frac{1}{2}AB = 10\sqrt{3}\text{cm}$, 据此可证明 $\triangle BCE$ 是等边三角形, 得到 $\angle ABC = 60^\circ$, 则 $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

【详解】 解: 如图所示, 连接 CE ,

$\because DE$ 垂直平分 AB ,

$\therefore AD = BD = 20\text{cm}$, $AE = BE$,

在 $\text{Rt}\triangle DBC$ 中, 由勾股定理得 $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = 10\sqrt{3}\text{cm}$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 20\sqrt{3}\text{cm}$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $AE = BE$,

$\therefore CE = BE = \frac{1}{2}AB = 10\sqrt{3}\text{cm}$,

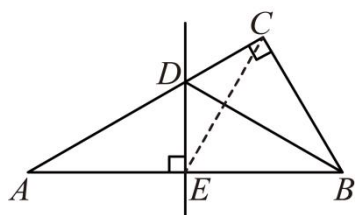
$\therefore CE = BE = BC$,

$\therefore \triangle BCE$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$,

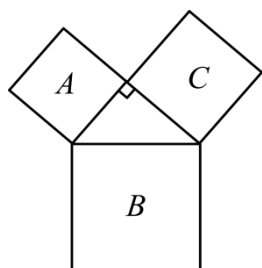
$\therefore \angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

故答案为： 30° .



【点睛】 本题主要考查了线段垂直平分线的性质，勾股定理，三角形内角和定理，等边三角形的性质与判定，直角三角形的性质等等，证明 $\triangle BCE$ 是等边三角形是解题的关键.

17. 如图, 三角形为直角三角形, 字母 A 、 B 、 C 表示正方形的面积, B 的值为 289, C 的值为 64, 那么 $A =$ _____.



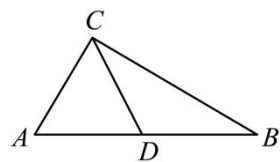
【答案】 225

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理，由勾股定理和正方形的面积计算公式可得 A 的面积加 C 的面积等于 B 的面积，据此求解即可.

【详解】 解：由勾股定理和正方形的性质可得正方形 A 的面积加上正方形 C 的面积等于正方形 B 的面积，
 $\therefore B$ 的值为 289, C 的值为 64,
 $\therefore A$ 的值为 $289 - 64 = 225$,
 故答案为： 225.

18. 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， $BC = 3$ ， D 是边 AB 上的一点，将 $\triangle BCD$ 沿直线 CD 翻折，使点 B 落在点 B_1 的位置，若 $B_1D \perp BC$ ，则 BD 的长度为 _____.



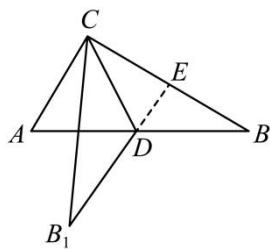
【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【详解】 延长 B_1D 交 BC 于 E , 由 $B_1D \perp BC$, 根据含 30° 角直角三角形和勾股定理的性质, 推导得 $DE = \frac{1}{2} BD$,

$BE = \frac{\sqrt{3}}{2}BD$, 设 $BD = x$, 在 $\text{Rt}\triangle B_1CE$ 中根据轴对称、勾股定理的性质, 建立方程计算即可解得答案.

【解答】延长 B_1D 交 BC 于 E , 如图:



$$\because B_1D \perp BC,$$

$$\therefore \angle BED = \angle B_1EC = 90^\circ,$$

$$\because \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}BD,$$

$$\text{设 } BD = x,$$

$\therefore$ 将 $\triangle BCD$ 沿直线 CD 翻折, 使点 B 落在点 B_1 的位置,

$$\therefore B_1D = x,$$

$$\because BC = 3,$$

$$\therefore CE = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad B_1C = BC = 3,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle B_1CE \text{ 中, } B_1E^2 + CE^2 = B_1C^2,$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = 3^2$$

$$\therefore x(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ (舍去) 或 } x = \sqrt{3}$$

$$\therefore BD = \sqrt{3}$$

故答案为: $\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了勾股定理、一元二次方程、轴对称、含 30° 角直角三角形的知识; 解题的关键是熟练掌握勾股定理; 轴对称、含 30° 角直角三角形、一元二次方程的性质, 从而完成求解.

三、简答题：(19 题 6 分，20 题 6 分，21 题 8 分，共 20 分)

19. 计算： $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12}$

【答案】 $2\sqrt{3}+1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的混合运算是解题的关键．根据二次根式的运算法则计算即可．

【详解】 解： $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12}$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} + |1-\sqrt{3}| + 2\sqrt{3}$$
$$= 2-\sqrt{3} + \sqrt{3}-1 + 2\sqrt{3}$$
$$= 2\sqrt{3}+1.$$

20. 解方程： $x^2 + 2x - 5 = 0$.

【答案】 $x_1 = \sqrt{6}-1, x_2 = -\sqrt{6}-1$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，熟练掌握配方法解一元二次方程是解题的关键．利用配方法解方程即可求解．

【详解】 解： $x^2 + 2x - 5 = 0$,

$$x^2 + 2x = 5,$$

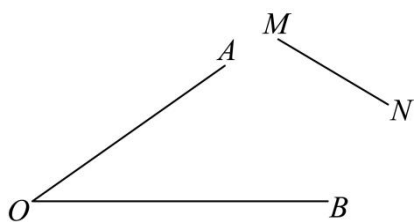
$$x^2 + 2x + 1 = 5 + 1,$$

$$(x+1)^2 = 6,$$

$$x+1 = \pm\sqrt{6},$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{6}-1, x_2 = -\sqrt{6}-1.$$

21. 已知 $\angle AOB$ 及线段 MN ，求一点 P 使点 P 到 OA 、 OB 的距离相等，且 $PM = PN$ ．(不写画法，要有结论)

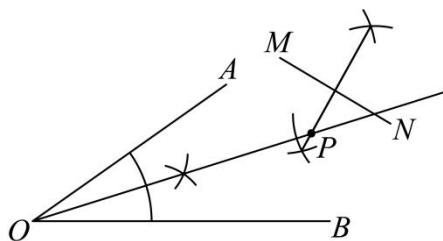


【答案】见解析

【解析】

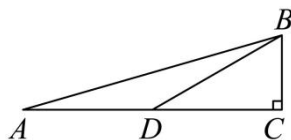
【分析】本题主要考查了角平分线的性质和尺规作图，线段垂直平分线的性质和尺规作图，点 P 到 OA 、 OB 的距离相等，则点 P 在 $\angle AOB$ 的角平分线上， $PM = PN$ ，则点 P 在线段 MN 的垂直平分线上，据此作出 $\angle AOB$ 的角平分线和线段 MN 的垂直平分线，二者的交点即为点 P 。

【详解】解：如图所示，点 P 即为所求。



四、解答题：(22 题 8 分，23 题 8 分，24 题 10 分，共 26 分)

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 15^\circ$ ， $\angle DBC = 60^\circ$ ， $BC = 1$ 。



(1) 求 $\angle ABD$ 的度数；

(2) 求 AD 的长。

【答案】(1) $\angle ABD = 15^\circ$

(2) 2

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形内角和定理，三角形外角的性质，等角对等边，含 30° 度角的直角三角形的性质，熟知相关知识是解题的关键。

(1) 由三角形内角和定理可得 $\angle BDC = 30^\circ$ ，再由三角形外角的性质可得答案；

(2) 由含 30° 度角的直角三角形的性质可得 $BD = 2BC = 2$ ，再证明 $\angle ABD = 15^\circ = \angle A$ ，则 $AD = BD = 2$ 。

【小问 1 详解】

解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\angle DBC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle C - \angle DBC = 30^\circ$ ，

$$\because \angle A = 15^\circ, \angle A + \angle ABD = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle ABD = 15^\circ;$$

【小问2详解】

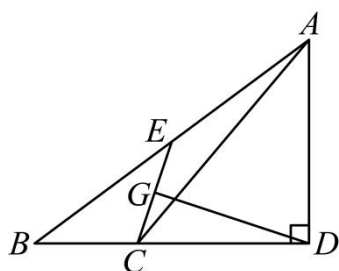
解：在 $\triangle BDC$ 中， $\angle BDC = 30^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore BD = 2BC = 2,$$

$$\because \angle ABD = 15^\circ = \angle A,$$

$$\therefore AD = BD = 2.$$

23. 已知：如图，在 $\triangle ABD$ 中， $\angle D = 90^\circ$ ，点 C 在 BD 上，点 E 在 AB 上， $AE = BE$ ， $DC = BE$ ，点 G 是 CE 的中点.



(1) 求证： $DG \perp EC$ ；

(2) 求证： $\angle B = 2\angle GDC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查直角三角形斜边上的中线，等腰三角形的判定和性质.

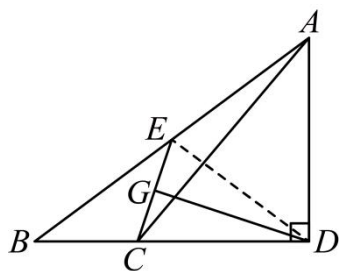
(1) 连接 DE ，得到 $DE = \frac{1}{2}AB = BE = CD$ ，根据三线合一，即可得证；

(2) 三线合一，得到 $\angle CDE = 2\angle CDG$ ，根据 $DE = BE$ ，得到 $\angle B = \angle CDE$ ，即可得证；

掌握斜边上的中线等于斜边的一半，是解题的关键.

【小问1详解】

解：连接 DE ，



$$\because AE = BE, \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AB = BE,$$

$$\therefore DC = BE,$$

$$\therefore DE = DC,$$

$\therefore$ 点 G 是 CE 的中点,

$$\therefore DG \perp EC;$$

【小问 2 详解】

由 (1) 知: $DE = DC = BE$,

$$\therefore \angle B = \angle CDE,$$

$\therefore$ 点 G 是 CE 的中点,

$$\therefore \angle B = \angle CDE = 2\angle CDG.$$

24. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$, 点 D 、 E 在线段 AB 上.

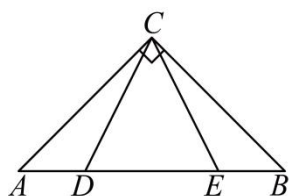


图1

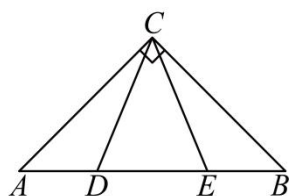


图2

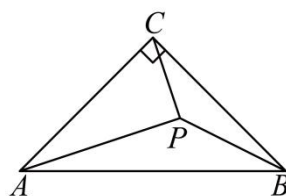


图3

(1) 如图 1, 若 $CD = CE$, 求证: $AD = BE$;

(2) 如图 2, 若 $\angle DCE = 45^\circ$, 求证: $DE^2 = AD^2 + BE^2$;

(3) 如图 3, 若点 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, $\angle BPC = 135^\circ$, 请猜想线段 AP 、 BP 、 CP 之间的数量关系, 并证明.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析 (3) $AP^2 = BP^2 + 2CP^2$, 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 如图所示, 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于 F , 利用三线合一得到 $AF = BF$, $DF = EF$, 由此即可证明 $AD = BE$;

(2) 如图所示, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle BCF$, 连接 EF , 则 $BF = AD$, 证明 $\triangle FCE \cong \triangle DCE$, 得 $FE = DE$, 再证明 $\angle EBF = 90^\circ$, 则 $FE^2 = BF^2 + BE^2$, 即可证得 $DE^2 = AD^2 + BE^2$;

(3) 将 $\triangle CAP$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle CBG$, 连接 PG , 则 $BG = AP$, $GC = PC$, $\angle PCG = 90^\circ$, 所以 $PG^2 = PC^2 + GC^2 = 2PC^2$, 再证明 $\angle BPG = 90^\circ$, 则

$$BG^2 = BP^2 + PG^2, \text{ 可证得 } AP^2 = BP^2 + 2PC^2.$$

【小问 1 详解】

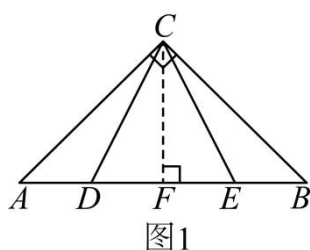
证明：如图所示，过点 C 作 $CF \perp AB$ 于 F ,

$$\because CA = CB, \quad CD = CE,$$

$$\therefore AF = BF, \quad DF = EF,$$

$$\therefore AF - DF = BF - EF,$$

$$\therefore AD = BE;$$



【小问 2 详解】

证明：如图所示，将 $\triangle ACD$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle BCF$ ，连接 EF ，

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad CA = CB,$$

$$\therefore \angle CBA = \angle A = 45^\circ,$$

由旋转得 $CF = CD$, $\angle CBF = \angle CAD = 45^\circ$, $\angle ACD = \angle BCF$,

$$\because \angle DCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle BCF + \angle BCE = \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle DCE,$$

$$\because CE = CE,$$

$$\therefore \triangle FCE \cong \triangle DCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore FE = DE,$$

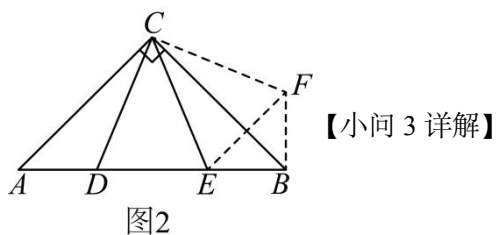
$$\because \angle CBF = \angle A = \angle CBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = 90^\circ,$$

$$\therefore FE^2 = BF^2 + BE^2,$$

$$\because BF = AD,$$

$$\therefore DE^2 = AD^2 + BE^2.$$



解: $AP^2 = BP^2 + 2CP^2$, 证明如下:

如图, 将 $\triangle CAP$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle CBG$, 连接 PG ,

由旋转得 $GC = PC$, $AP = BG$, $\angle PCG = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CPG = \angle CGP = 45^\circ, \quad PG^2 = PC^2 + GC^2 = 2PC^2,$$

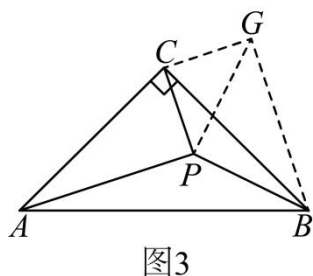
$$\therefore \angle BPC = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle BPG = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore BG^2 = BP^2 + PG^2,$$

$$\therefore BG = AP,$$

$$\therefore AP^2 = BP^2 + 2CP^2.$$



【点睛】 本题主要考查了全等三角形的性质与判定, 旋转的性质, 等腰直角三角形的性质与判定, 勾股定理等等, 正确利用旋转构造全等三角形是解题的关键.