

初二数学期中（上）复习四

一、选择题（本大题共 5 题，每题 2 分，共 10 分）

1. 方程 $(m+2)x^{|m|} + 3mx + 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，则（ ）

- A. $m = \pm 2$ B. $m = 2$ C. $m = -2$ D. m 的值无法确定.

【答案】B

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义，绝对值的性质即可求解.

【详解】解：方程 $(m+2)x^{|m|} + 3mx + 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程，

$$\therefore \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ |m| = 2 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} m \neq -2 \\ m = \pm 2 \end{cases},$$

$$\therefore m = 2,$$

故选：B.

【点睛】本题主要考查一元二次方程的定义，理解并掌握一元二次方程的定义，绝对值的性质是解题的关键.

2. ①到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上；

②有两条边和第三条边上的中线对应相等的两个三角形全等；

③有两条边和第三条边上的高对应相等的两个三角形全等；

④线段的垂直平分线上的点到这条线段的两端点的距离相等. 其中正确的个数是（ ）

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据角平分线的判定定理，垂直平分线的性质定理，全等三角形的判定定理逐项判断即可.

【详解】解：①角的内部到角的两边距离相等的点在这个角的平分线上，故该项错误；

②有两条边和第三条边上的中线对应相等的两个三角形全等，故该说法正确；

③有两条边和第三条边上的高对应相等的两个三角形不一定全等，故该项错误；

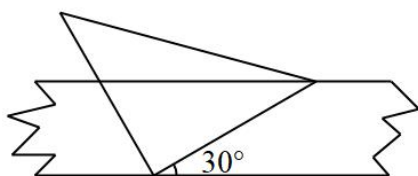
④线段的垂直平分线上的点到这条线段的两端点的距离相等，故该项正确.

故选：B.

【点睛】此题主要考查角平分线的判定定理，垂直平分线的性质定理，全等三角形的判定定理，正确理解判定定理是解题关键.

3. 将一个有 45° 角的三角板的直角顶点放在一张宽为 3Cm 的纸带边沿上，另一个顶

点在纸带的另一边沿上，测得三角板的一边与纸带的一边所在的直线成 30° 角，如图 (3)，
则三角板的最大边的长为 ()



图(3)

- A. 3cm B. 6cm C. $3\sqrt{2}$ cm D. $6\sqrt{2}$ cm

【答案】 D

【解析】

【分析】过另一个顶点 C 作垂线 CD 如图，可得直角三角形，根据直角三角形中 30° 角所对的边等于斜边的一半，可求出有 45° 角的三角板的直角边，再由等腰直角三角形求出最大边.

【详解】解：过点 C 作 $CD \perp AD$ ， $\therefore CD=3$ ，

在直角三角形 ADC 中， $\because \angle CAD=30^\circ$ ，

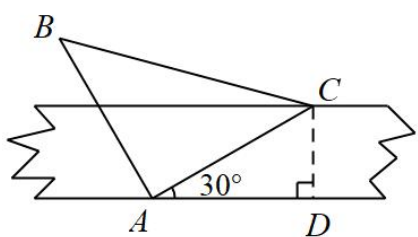
$$\therefore AC=2CD=2 \times 3=6,$$

又三角板是有 45° 角的三角板， $\therefore AB=AC=6$ ，

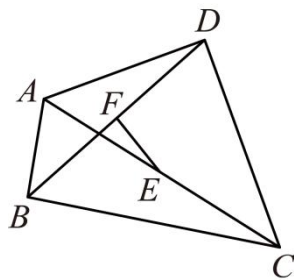
$$\therefore BC^2=AB^2+AC^2=6^2+6^2=72,$$

$$\therefore BC=6\sqrt{2},$$

故选：D.



4. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，点 E 、 F 分别是对角线 AC 、 BD 的中点，则 ()



A. $EF \perp BD$

B. $\angle AEF = \angle ABD$

C. $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$

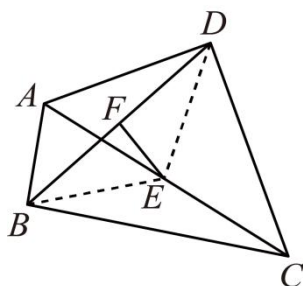
D. $EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$

【答案】A

【解析】

【分析】如图所示，连接 BE ， DE ，根据中点的性质，直角三角形斜边中线等于斜边的一半，可得 $BF = DF$ ， $BE = DE$ ，根据“边边边”可证 $\triangle BEF \cong \triangle DEF$ (SSS)，由此即可求解。

【详解】解：如图所示，连接 BE ， DE ，



$\because \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，点 E 分别是对角线 AC 的中点，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， BE 是斜边 AC 的中线，则 $BE = \frac{1}{2}AC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， DE 是斜边 AC 的中线，则 $DE = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore BE = DE$ ，

$\because$ 点 F 是对角线 BD 的中点，

$\therefore BF = DF$ ，

在 $\triangle BEF$ ， $\triangle DEF$ 中，

$$\begin{cases} BE = DE \\ BF = DF, \\ EF = EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle DEF$ (SSS)，

$\therefore \angle BFE = \angle DFE$ ，且 $\angle BFE + \angle DFE = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BFE = \angle DFE = 90^\circ$ ，

$\therefore EF \perp BD$ ，故 A 选项正确，

故选：A。

【点睛】本题主要考查直角三角形斜边上中线等于斜边的一半，全等三角形的判定和性质，掌握以上知识

是解题的关键.

5. 下列命题错误的是 ()

- A. 若一个三角形的两边垂直平分线的交点在第三边上, 则该三角形一定是直角三角形.
- B. 三角形三边中线的交点到三角形三个顶点距离相等.
- C. 三角形三个内角平分线的交点到三边距离相等.
- D. 等腰直角三角形斜边上的高等于斜边的一半.

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形角平分线, 中线, 三条边垂直平分线的性质, 等腰直角三角形的性质依次分析各项即可.

【详解】A. 若一个三角形的两边垂直平分线的交点在第三边上, 则该三角形一定是直角三角形, 本选项正确;

B. 三角形三边垂直平分线的交点到三角形三个顶点距离相等, 故本选项错误;

C. 三角形三个内角平分线的交点到三边距离相等, 本选项正确;

D. 等腰直角三角形斜边上的高等于斜边的一半, 本选项正确.

故选: B.

【点睛】此题考查了三角形角平分线, 中线, 三条边垂直平分线的性质, 等腰直角三角形的性质, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

二、填空题 (本大题共 15 题, 每题 2 分, 共 30 分)

6. 把根号外的因式移到根号内: $(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\sqrt{1-a}$

【解析】

【分析】根据被开方数是非负数, 可得 a 与 1 的关系, 根据 a 与 1 的关系, 可得答案.

【详解】原式 $= -\sqrt{\frac{(a-1)^2}{1-a}} = -\sqrt{1-a}$

故答案为 $-\sqrt{1-a}$

【点睛】本题考查了二次根式的性质与化简, 被开方数是非负数得出 $a < 1$ 是解题关键.

7. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 6x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $k < 9$, 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】根据关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 6x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，得到 $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4k > 0$ 且 $k \neq 0$ ，解不等式即可求解

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 6x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4k > 0, \quad k \neq 0,$$

$$\therefore k < 9 \text{ 且 } k \neq 0.$$

故答案为： $k < 9$ ，且 $k \neq 0$

【点睛】本题考查了一元二次方程的定义和根的判别式，当一元二次方程有两个不相等的实数根时， $\Delta > 0$ ；当一元二次方程有两个相等的实数根时， $\Delta = 0$ ；当一元二次方程无实数根时， $\Delta < 0$ ，注意本题为一元二次方程，故要注意 $k \neq 0$ 这一隐含条件，这是易错点.

8. 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 + x + |a| - 1 = 0$ 的一个根是 0，则实数 a 的值是__.

【答案】 -1

【解析】

【分析】把 $x=0$ 代入已知方程，得到关于 a 的方程，通过解新方程求得 a 的值. 注意二次项系数不等于零.

【详解】解：依题意得， $|a| - 1 = 0$ 且 $a - 1 \neq 0$,

解得 $a = -1$.

故答案是： -1.

【点睛】本题主要考查一元二次方程的解，掌握能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解是解题的关键.

9. 已知 m 、 n 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根， $(7m^2 - 14m + a)(3n^2 - 6n - 7) = 8$ ，则 $a =$ __.

【答案】 -9

【解析】

【分析】根据 m, n 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个数根，可得 $m^2 - 2m - 1 = 0$ ， $n^2 - 2n - 1 = 0$ ，则有 $m^2 - 2m = 1$ ， $n^2 - 2n = 1$ ，然后代入 $(7m^2 - 14m + a)(3n^2 - 6n - 7) = 8$ 求解即可.

【详解】解： $\because m$ 、 n 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两个根，

$$\therefore m^2 - 2m - 1 = 0, \quad n^2 - 2n - 1 = 0,$$

$$\therefore m^2 - 2m = 1, \quad n^2 - 2n = 1,$$

$$\therefore 7m^2 - 14m = 7(m^2 - 2m) = 7 \times 1 = 7, \quad 3n^2 - 6n = 3(n^2 - 2n) = 3 \times 1 = 3,$$

$$\therefore (7m^2 - 14m + a)(3n^2 - 6n - 7) = 8$$

$$\therefore (7 + a) \times (3 - 7) = 8$$

解得 $a = -9$.

故答案为: -9 .

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解, 解一元二次方程, 掌握一元二次方程的解是解题的关键.

10. 点 P 到 x 轴和点 $Q(5, -2)$ 的距离都为 10, 则点 P 的坐标是_____;

【答案】 $(-1, -10)$ 或 $(11, -10)$

【解析】

【分析】 设点 P 的坐标为 (m, n) , 根据题意可得 $|n| = 10, (m-5)^2 + (n+2)^2 = 10^2$, 再讨论 n 的值求出对应的 m 的值即可.

【详解】 解: 设点 P 的坐标为 (m, n) ,

$\therefore$ 点 P 到 x 轴和点 $Q(5, -2)$ 的距离都为 10,

$$\therefore |n| = 10, (m-5)^2 + (n+2)^2 = 10^2,$$

$$\therefore n = \pm 10, (m-5)^2 + (n+2)^2 = 100,$$

$$\therefore \text{当 } n = 10 \text{ 时, } (m-5)^2 + (10+2)^2 = 10^2, \text{ 即 } (m-5)^2 = -44, \text{ 此时不成立;}$$

$$\text{当 } n = -10 \text{ 时, } (m-5)^2 + (-10+2)^2 = 10^2, \text{ 即 } (m-5)^2 = 36,$$

解得 $m = -1$ 或 $m = 11$,

综上所述, 点 P 的坐标为 $(-1, -10)$ 或 $(11, -10)$,

故答案为: $(-1, -10)$ 或 $(11, -10)$.

【点睛】 本题主要考查了点到坐标轴的距离, 坐标系中两点距离公式, 熟知两点距离公式和点到 x 轴的距离是纵坐标的绝对值是解题的关键.

11. 已知 x 为实数, 且 $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x - 1) = 12$ 则 $x^2 - 3x$ 的值为_____.

【答案】 4

【解析】

【分析】设 $x^2 - 3x = y$ ，然后将原方程变形，利用因式分解法解方程求出 y 的值，即可得到 $x^2 - 3x$ 的可能取值，再分情况利用根的判别式判断是否符合题意即可.

【详解】解：设 $x^2 - 3x = y$,

$$\therefore (x^2 - 3x)(x^2 - 3x - 1) = 12$$

$$\therefore y(y - 1) = 12$$

$$\therefore y^2 - y = 12,$$

$$\text{整理得: } y^2 - y - 12 = 0,$$

$$\text{因式分解得 } (y - 4)(y + 3) = 0,$$

$$\therefore y - 4 = 0 \text{ 或 } y + 3 = 0,$$

$$\therefore y = 4 \text{ 或 } y = -3,$$

$$\text{当 } y = 4 \text{ 时, 即 } x^2 - 3x = 4,$$

$$\text{整理得 } x^2 - 3x - 4 = 0,$$

$$\therefore \Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 > 0,$$

$\therefore$ 方程有实数根, 符合题意,

$$\text{当 } y = -3 \text{ 时, 即 } x^2 - 3x = -3,$$

$$\text{整理得 } x^2 - 3x + 3 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 9 - 12 = -3 < 0,$$

$\therefore$ 方程没有实数根, 不符合题意,

$$\therefore x^2 - 3x \text{ 的值为 } 4,$$

故答案为: 4.

【点睛】本题考查了换元法解一元二次方程, 根的判别式的意义, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

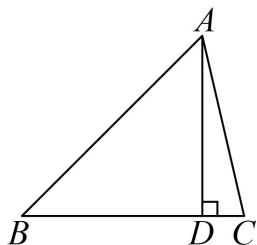
12. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 15$, $AC = 13$, 边 BC 上的高 $AD = 12$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

【答案】84 或 24

【解析】

【分析】根据题意，分类讨论，第一种情况，锐角三角形，则边 BC 上的高 AD 在三角形内部；第二种情况，钝角三角形，则边 BC 上的高 AD 在三角形外部；图形结合分析，即可求解.

【详解】解：①如图所示， $AB=15$ ， $AC=13$ ， $AD \perp BC$ ， $AD=12$ ，



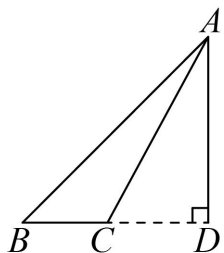
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$\therefore BC = BD + CD = 9 + 5 = 14,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84;$$

②如图所示,



$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$\therefore BC = BD - CD = 9 - 5 = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24;$$

综上所述， $\triangle ABC$ 的面积为 84 或 24，

故答案为：84 或 24.

【点睛】本题主要考查勾股定理的运用，掌握锐角三角形，钝角三角形高的计算方法是解题的关键.

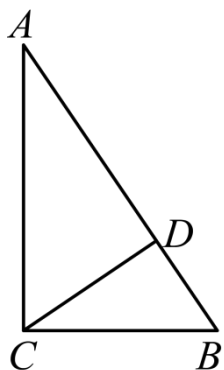
13. CD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，若 $AB=1$ ， $AC:BC=4:1$ ，则 CD 的长为_____.

【答案】 $\frac{4}{17}$

【解析】

【分析】根据 $AC:BC=4:1$ ，设 $BC=x(x>0)$ ，则 $AC=4x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中根据勾股定理可求出 AC, BC 的值，根据等面积法即可求解.

【详解】解：如图所示，



已知 $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ， $AB=1$ ， $\frac{AC}{BC}=4$ ，

设 $BC=x(x>0)$ ，则 $AC=4x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB^2=BC^2+AC^2$ ，即 $x^2+(4x)^2=1$ ，解得， $x=\frac{\sqrt{17}}{17}$ ，

$$\therefore BC=\frac{\sqrt{17}}{17}, AC=4x=\frac{4\sqrt{17}}{17},$$

$$\because CD \perp AB, \text{ 且 } S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC \cdot BC=\frac{1}{2}AB \cdot CD,$$

$$\therefore CD=\frac{AC \cdot BC}{AB}=\frac{4\sqrt{17}}{17} \times \frac{\sqrt{17}}{17}=\frac{4}{17},$$

故答案为： $\frac{4}{17}$.

【点睛】本题主要考查勾股定理的运用，运用等面积法求高，掌握以上知识的运用是解题的关键.

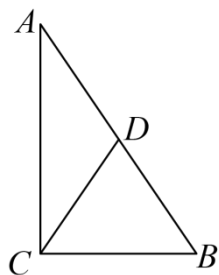
14. 若线段 $AB=3\text{cm}$ ，以线段 AB 为斜边的直角三角形的顶点 C 的轨迹是_____.

【答案】以 AB 中点为圆心，以 $\frac{3}{2}\text{cm}$ 为半径的圆

【解析】

【分析】根据直角三角形的性质求解即可.

【详解】如图所示，直角三角形 ABC 中，点 D 是斜边 AB 的中点，



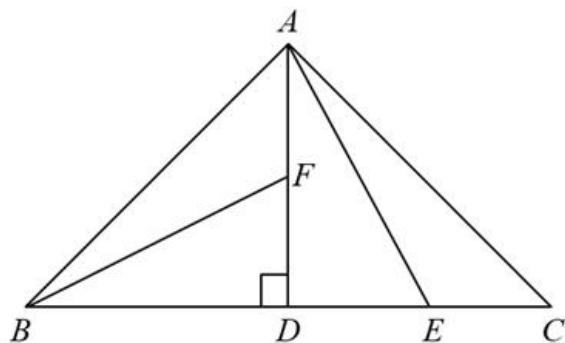
$$\therefore CD = AD = BD = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}\text{cm},$$

$\therefore$ 点 C 的轨迹是以 AB 中点为圆心，以 $\frac{3}{2}\text{cm}$ 为半径的圆.

故答案为：以 AB 中点为圆心，以 $\frac{3}{2}\text{cm}$ 为半径的圆.

【点睛】 本题考查了直角三角形的性质，解题的关键是熟练掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

15. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $AD \perp BC$ ，垂足为 D . E 、 F 分别是 CD 、 AD 上的点，且 $CE=AF$. 如果 $\angle AED = 62^\circ$ ，那么 $\angle DBF = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 28°

【解析】

【分析】 证明 $\triangle BDF \cong \triangle ADE$ ，得到 $\angle DBF = \angle DAE$ 即可.

【详解】 解： $\because AB=AC$ ， $AD \perp BC$ ，

$$\therefore BD=CD.$$

$$\text{又} \because \angle BAC=90^\circ,$$

$$\therefore BD=AD=CD.$$

$$\text{又} \because CE=AF,$$

$$\therefore DF=DE.$$

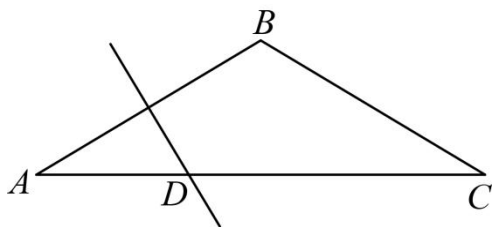
$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle ADE.$$

$$\therefore \angle DBF = \angle DAE = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ.$$

故答案为： 28° .

【点睛】此题考查等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定与性质，直角三角形两锐角互余，熟练运用等腰直角三角形三线合一性质及全等三角形的判定定理是解题的关键.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， $\angle B = 120^\circ$ ， AB 的垂直平分线交 AC 于点 D ．若 $AC = 6\text{cm}$ ，则 $AD =$ _____ cm ．

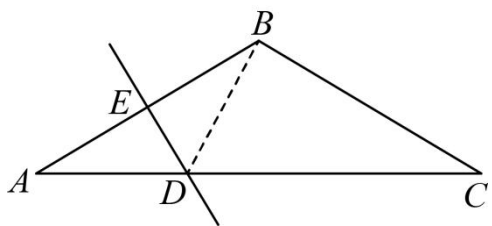


【答案】2

【解析】

【分析】连接 BD ，根据三角形的内角和定理和等腰三角形性质求出 $DC = 2BD$ ，根据线段垂直平分线的性质求出 $AD = BD$ ，即可求出答案.

【详解】解：如图，连接 BD ．



$$\because AB = BC, \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 30^\circ,$$

$\because AB$ 的垂直平分线是 DE ,

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = 90^\circ,$$

$$\therefore DC = 2BD,$$

$$\because AD = BD,$$

$$\therefore DC = 2AD,$$

$$\because AC = 6,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{3} \times 6 = 2,$$

故答案为：2.

【点睛】本题主要考查对等腰三角形的性质，含 30° 度角的直角三角形，线段的垂直平分线，三角形的内角

和定理等知识点的理解和掌握，能求出 $AD = BD$ 和 $DC = 2BD$ 是解此题的关键.

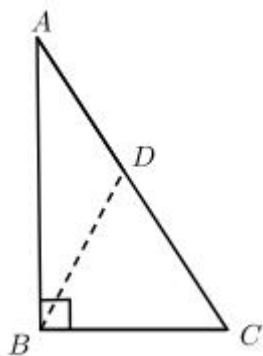
17. 已知直角三角形的周长为 $2 + \sqrt{6}$ ，斜边上的中线为 1，则这个三角形的面积为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可求得斜边为 2，从而求得两直角边 $a + c = \sqrt{6}$ ，再根据勾股定理可得 $a^2 + c^2 = 4$ ，然后利用完全平方公式即可求得 $ac = 1$ ，进而求出三角形面积.

【详解】解：如下图



$\because$ 斜边中线为 1,

$\therefore BD = 1, AC = 2,$

又 $\because \triangle ABC$ 周长为 $2 + \sqrt{6}$,

$\therefore AB + BC = \sqrt{6}.$

设 $AB = c, BC = a$, 则 $a + c = \sqrt{6}$,

$a^2 + c^2 = AC^2 = 4.$

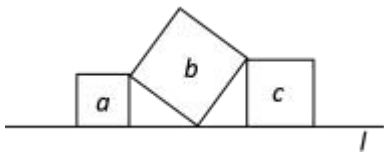
$$ac = \frac{(a+c)^2 - (a^2 + c^2)}{2} = \frac{(\sqrt{6})^2 - 4}{2} = 1,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点睛】此题主要是运用了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质、勾股定理以及完全平方公式. 能借助完全平方公式灵活变形是解题关键.

18. 如图，直线 l 上有三个正方形 a, b, c ，若 a, c 的面积分别为 5 和 11，则 b 的面积为_____.



【答案】 16

【解析】

【分析】运用正方形边长相等，再根据同角的余角相等可得 $\angle ABC = \angle DAE$ ，然后证明 $\triangle BCA \cong \triangle AED$ ，结合全等三角形的性质和勾股定理来求解即可.

【详解】解： $\because AB = AD, \angle BCA = \angle AED = 90^\circ$,

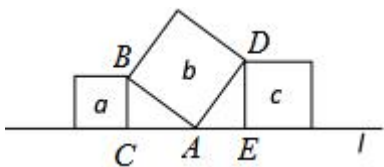
$$\therefore \angle ABC = \angle DAE,$$

$$\therefore \triangle BCA \cong \triangle AED (ASA),$$

$$\therefore BC = AE, AC = ED,$$

$$\text{故 } AB^2 = AC^2 + BC^2 = ED^2 + BC^2 = 11 + 5 = 16,$$

即正方形 b 的面积为 16.



点睛：此题主要考查对全等三角形和勾股定理的综合运用，解题的重点在于证明 $\triangle BCA \cong \triangle AED$ ，而利用全等三角形的性质和勾股定理得到 $b = a + c$ 则是解题的关键.

19. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AB 的垂直平分线与 AC 所在的直线相交所得锐角为 50° ，则 $\angle B$ 等于 _____.

【答案】 70° 或 20°

【解析】

【分析】首先根据题意作图，然后由 AB 的垂直平分线与 AC 所在的直线相交所得锐角为 50° ，即可得 $\angle ADE = 50^\circ$ ， $\angle AED = 90^\circ$ ，然后分两种情况讨论：①当三角形是锐角三角形时，即可求得 $\angle A$ 的度数，②当三角形是钝角三角形时，可得 $\angle A$ 的邻补角的度数；又由 $AB = AC$ ，根据等边对等角与三角形内角和的定理，即可求得 $\angle B$.

【详解】 $\because AB$ 的垂直平分线与 AC 所在直线相交所得的锐角为 50° ,

$$\therefore \angle ADE = 50^\circ, \angle AED = 90^\circ,$$

①如图 1，当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时， $\angle A = 90^\circ - \angle ADE = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ,$$

②如图 2，当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时， $\angle BAC = \angle ADE + \angle AED = 50^\circ + 90^\circ = 140^\circ$ 。

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ.$$

综上所述： $\angle B$ 的度数是 70° 或 20° 。

故答案为： 70° 或 20° 。

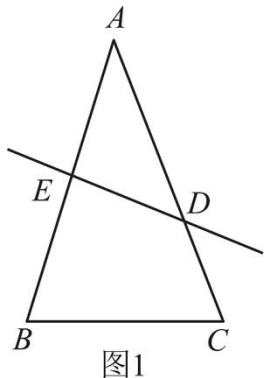


图1

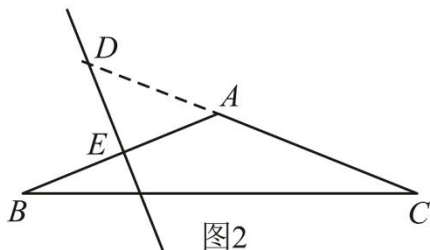
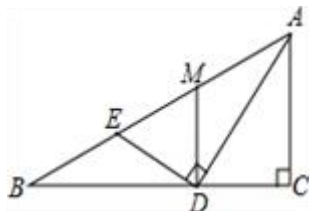


图2

【点睛】本题考查了等腰三角形与线段

垂直平分线的性质。此题难度不大，解题的关键是注意数形结合思想的应用，要注意分情况讨论。

20. 如图， $Rt\triangle ABC$ 中， $AC \perp BC$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ， $DE \perp AD$ 交 AB 于点 E ， M 为 AE 中点，连接 MD ，若 $BD = 2$ ， $CD = 1$ 。则 MD 的长为_____。



【答案】 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F 。根据角平分线 AD 的性质，以及已知条件“ $BD = 2$ ， $CD = 1$ ”可以推知 $\angle B = 30^\circ$ ；然后在含有 30° 角的直角 $\triangle AFD$ 和 $\triangle AED$ 中求 MD 的长度。

【详解】解：过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F 。

$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC \text{ 交 } BC \text{ 于点 } D, CD = 1,$$

$$\therefore FD = CD = 1;$$

在 $Rt\triangle BDF$ 中， $FD = 1$ ， $BD = 2$ ，

$$\therefore \angle B = 30^\circ$$

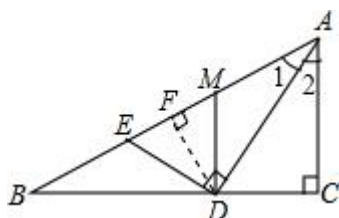
$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle AFD \text{ 中， } AD = 2FD = 2;$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle AED \text{ 中, } AE = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore MD = \frac{1}{2} AE = \frac{2}{3} \sqrt{3}.$$

故答案为: $\frac{2}{3} \sqrt{3}$.



【点睛】本题考查知识点：角平分线，勾股定理，直角三角形性质．解题的关键：做出辅助线，通过特殊边的数量关系推出特殊角，再解直角三角形即可．此题比较综合．

三、简答题（本大题共 4 题，第 21、22 题每题 5 分，第 23、24 题每题 8 分，共 26 分）

21. 解方程

$$(1) \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3}{2} y \left(y - \frac{8}{3} \right) \right] = y + \frac{5}{6}$$

$$(2) x^2 + 2(\sqrt{2} - 1)x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

【答案】(1) $y_1 = y_2 = \frac{2}{3}$

(2) $x_1 = x_2 = 1 - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 方程整理后，利用直接开方法解一元二次方程即可；

(2) 利用直接开方法解一元二次方程即可．

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \frac{1}{2} \left[1 - \frac{3}{2} y \left(y - \frac{8}{3} \right) \right] = y + \frac{5}{6}$$

$$\text{整理得, } 9y^2 - 12y + 4 = 0$$

$$\therefore (3y - 2)^2 = 0$$

$$\therefore 3y - 2 = 0$$

$$\text{解得 } y_1 = y_2 = \frac{2}{3};$$

【小问 2 详解】

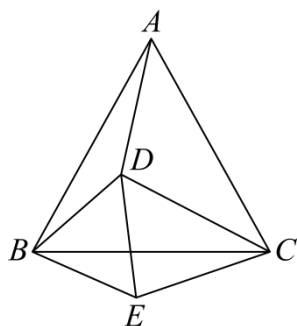
解: $x^2 + 2(\sqrt{2} - 1)x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$

$$(x + \sqrt{2} - 1)^2 = 0$$

解得 $x_1 = x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的解法. 解一元二次方程常用的方法有直接开平方法, 配方法, 公式法, 因式分解法, 要根据方程的特点灵活选用合适的方法.

22. 如图, 点 D 是 $\triangle ABC$ 内一点, 把 $\triangle ABD$ 绕点 B 顺时针方向旋转 60° 得到 $\triangle CBE$, 若 $AD = 4$, $BD = 3$, $CD = 5$.



(1) 判断 $\triangle DEC$ 的形状, 并说明理由;

(2) 求 $\angle ADB$ 的度数.

【答案】 (1) $\triangle DEC$ 为直角三角形

(2) 150°

【解析】

【分析】 (1) 根据旋转的性质得出 $\triangle ADB \cong \triangle CEB$, 再结合 $\triangle ABD$ 绕点 B 顺时针方向旋转 60° 得到 $\triangle BDE$ 为等边三角形, 得到 $DE = BD = 3$, $EC = AD = 4$, 再根据勾股定理逆定理, 判断出 $\triangle DEC$ 为直角三角形.

(2) 根据 $\triangle ADB \cong \triangle CEB$, 得到 $\angle BDA = \angle BEC$, 根据等边三角形和直角三角形的内角度数求出 $\angle BEC$ 的度数即可.

【小问 1 详解】

结论: $\triangle DEC$ 为直角三角形.

证明: 根据图形的旋转不变性, 可得 $\triangle ADB \cong \triangle CEB$,

$$\therefore BA = BC, \quad AD = EC, \quad BD = BE, \quad \angle BDA = \angle BEC,$$

$$\because \angle DBE = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 和 } \triangle DBE \text{ 均为等边三角形,}$$

$$\therefore DE = BD = 3, \quad EC = AD = 4,$$

$$\because CD = 5,$$

$$\therefore DE^2 + EC^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = CD^2;$$

$\therefore \triangle DEC$ 为直角三角形.

【小问 2 详解】

$$\because \triangle ADB \cong \triangle CEB,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle BEC,$$

$\because \triangle DEC$ 为直角三角形,

$$\therefore \angle DEC = 90^\circ,$$

$\because \triangle BDE$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle BED = 60^\circ,$$

$$\text{故 } \angle BEC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle BEC$$

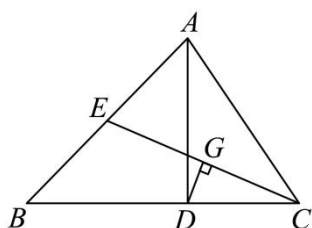
$$\therefore \angle ADB = 150^\circ.$$

【点睛】此题考查了图形的旋转不变性、全等三角形的性质、等边三角形的性质、勾股定理的逆定理等知识，综合性较强，是一道好题. 解答 (2) 时要注意运用 (1) 的结论.

23. 如图 $\triangle ABC$ 中， AD 是高， CE 为中线， $DC=BE$ ， $DG \perp CE$ 于 G 点，求证：

(1) G 为 CE 的中点.

(2) $\angle B = 2\angle BCE$.



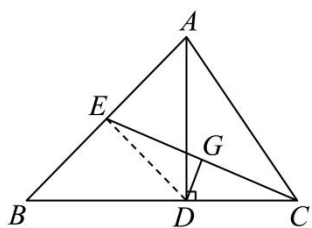
【答案】(1) 证明见解析；(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 证 G 是 CE 的中点，即 $GE = CG$ ，可证它们所在的三角形全等，即连接 DE ，证 $\triangle EDG \cong \triangle CDG$ ；

(2) 由 (1) 知： $\triangle CDE$ 是等腰三角形，则 $BE = DE = CD$ ，根据三角形外角的性质可得 $\angle B = \angle EDB = 2\angle BCE$ 。

【详解】证明：(1) 连接 DE ，



$\because AD \perp BC$ ， E 是 AB 的中点，

$\therefore DE$ 是 $\text{Rt}\triangle ABD$ 斜边上的中线，即 $DE = BE = \frac{1}{2}AB$ ；

$\therefore DC = DE = BE$ ；

又 $\because DG = DG$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle EDG \cong \text{Rt}\triangle CDG (HL)$ ，

$\therefore GE = CG$ ，

$\therefore G$ 是 CE 的中点.

(2) 由 (1) 知: $BE = DE = CD$ ；

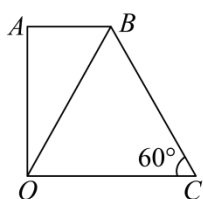
$\therefore \angle B = \angle BDE$ ， $\angle DEC = \angle DCE$ ；

$\therefore \angle B = \angle BDE = 2\angle BCE$.

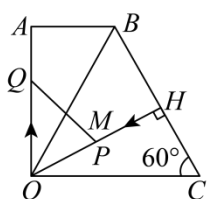
【点睛】 本题考查全等三角形的判定与性质、三角形外角的性质，作出辅助线是解题的关键.

四、解答题 (本大题共 4 题，第 25、26、27 题每题 8 分，第 28 题 10 分，共 34 分)

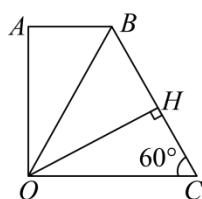
24. 如图 (1)，直角梯形 $OABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB \parallel CO$ ，且 $AB = 2$ ， $OA = 2\sqrt{3}$ ， $\angle BCO = 60^\circ$.



(图1)



(图2)



(备用图)

(1) 求证: $\triangle OBC$ 为等边三角形;

(2) 如图 (2)， $OH \perp BC$ 于点 H ，动点 P 从点 H 出发，沿线段 HO 向点 O 运动，动点 Q 从点 O 出发，沿线段 OA 向点 A 运动，两点同时出发，速度都为 1/秒. 设点 P 运动的时间为 t 秒， $\triangle OPQ$ 的面积为 S ，求 S 与 t 之间的函数关系式，并求出 t 的取值范围；

(3) 设 PQ 与 OB 交于点 M ，当 $OM = PM$ 时，求 t 的值.

【答案】 (1) 见解析 (2) $S = -\frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{3}{2}t (0 < t < 2\sqrt{3})$

(3) $t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 利用勾股定理求出 OB ，然后根据含 30° 度的直角三角形三边的关系得到 $\angle AOB = 30^\circ$ ， $\angle ABO = 60^\circ$ ，则 $\angle BOC = \angle ABO = 60^\circ$ ，在 $\triangle OBC$ 中有两 60° 的角，根据等边三角形的判定即可得到结论；

(2) 根据等边三角形的性质易得 $\angle COH = 30^\circ$, $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 2\sqrt{3}$, 则 $\angle QOP = 60^\circ$, $OP = 2\sqrt{3} - t$,

利用三角形的面积公式得到 $S = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot NP$, 代值即可得到 $S = -\frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{3}{2}t (0 < t < 2\sqrt{3})$;

(3) 由 $OM = PM$ 得到 $\angle MOP = \angle MPO = 30^\circ$, 则 $\angle PQO = 90^\circ$, 利用含 30° 度的直角三角形三边的关系得到 $OP = 2OQ$, 即 $2\sqrt{3} - t = 2t$, 解方程即可.

【小问 1 详解】

在 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中, $AB = 2$, $OA = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore OB = \sqrt{AO^2 + AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4,$$

$$\therefore \angle AOB = 30^\circ, \angle ABO = 60^\circ,$$

$$\because AB \parallel OC,$$

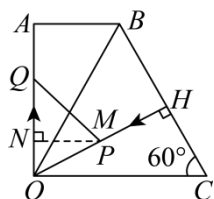
$$\therefore \angle BOC = \angle ABO = 60^\circ,$$

而 $\angle BCO = 60^\circ$,

$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形;

【小问 2 详解】

$\because OH \perp BC$, 过点 P 作 $PN \perp AO$,



(图2)

$$\therefore \angle COH = 30^\circ, OH = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle QOP = 60^\circ, OP = 2\sqrt{3} - t,$$

$$\therefore \angle OPN = 30^\circ,$$

$$\therefore ON = \frac{1}{2}OP = \sqrt{3} - \frac{1}{2}t,$$

$$\therefore NP = \sqrt{OP^2 - ON^2} = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

而 $OQ = t$,

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot NP = \frac{1}{2} t \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} t^2 + \frac{3}{2} t (0 < t < 2\sqrt{3});$$

【小问 3 详解】

$$\because OM = PM,$$

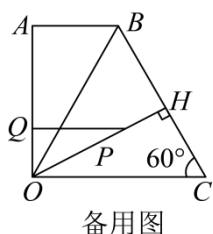
$$\therefore \angle MOP = \angle MPO = 30^\circ,$$

$$\text{而 } \angle QOP = 60^\circ$$

$$\therefore \angle PQO = 90^\circ,$$

$$\therefore OP = 2OQ, \text{ 即 } 2\sqrt{3} - t = 2t,$$

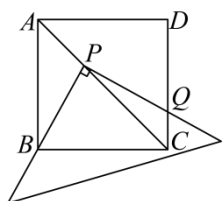
$$\therefore t = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



【点睛】本题考查了梯形的性质，等边三角形的判定与性质、勾股定理以及含 30 度的直

角三角形三边的关系，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

25. 如图，将一三角板放在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 上，并使它的直角顶点 P 在对角线 AC 上滑动，直角的一边始终经过点 B ，另一边与射线 DC 相交于 Q ，探究：设 A 、 P 两点间的距离为 x .



(1) 当点 Q 在边 CD 上时，线段 PQ 与 PB 之间有怎样的数量关系？试证明你的猜想；

(2) 当点 Q 在边 CD 上时，设四边形 $PBCQ$ 的面积为 y ，求 y 与 x 之间的函数关系，并写出函数自变量 x 的取值范围；

(3) 当点 P 在线段 AC 上滑动时， $\triangle PCQ$ 是否可能成为等腰三角形？如果可能，指出所有能使 $\triangle PCQ$ 成为等腰三角形的点 Q 的位置，并求出相应的 x 值，如果不可能.

【答案】(1) $PB = PQ$ ，证明见解析

$$(2) S_{\text{四边形}PBCQ} = \frac{1}{2} x^2 - \sqrt{2}x + 1 (0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2})$$

(3) $x = 0$ 或 1

【解析】

【分析】(1) $PQ = PB$ ，过 P 点作 $MN \parallel BC$ 分别交 AB 、 DC 于点 M 、 N ，可以证明

$$\text{Rt}\triangle MBP \cong \text{Rt}\triangle NPQ;$$

(2) $S_{\text{四边形}PBCQ} = S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCQ}$ 分别表示出 $\triangle PBC$ 与 $\triangle PCQ$ 的面积就可以.

(3) $\triangle PCQ$ 可能成为等腰三角形. ①当点 P 与点 A 重合时，点 Q 与点 D 重合， $PQ = QC$ ，
②当点 Q 在 DC 的延长线上，且 $CP = CQ$ 时，就可以用 x 表示出面积.

【小问 1 详解】

$$PQ = PB,$$

过 P 点作 $MN \parallel BC$ 分别交 AB 、 DC 于点 M 、 N ，

在正方形 $ABCD$ 中， AC 为对角线，

$$\therefore AM = PM,$$

$$\text{又} \because AB = MN,$$

$$\therefore MB = PN,$$

$$\because \angle BPQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPM + \angle NPQ = 90^\circ;$$

$$\text{又} \because \angle MBP + \angle BPM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MBP = \angle NPQ,$$

在 $\text{Rt}\triangle MBP$ 与 $\text{Rt}\triangle NPQ$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle PMB = \angle PNQ = 90^\circ \\ BM = PN \\ \angle MBP = \angle NPQ \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle MBP \cong \text{Rt}\triangle NPQ (\text{ASA}),$$

$$\therefore PB = PQ.$$

【小问 2 详解】

$$\because S_{\text{四边形}PBCQ} = S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCQ},$$

$$\because AP = x,$$

$$\therefore AM = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore CQ = CD - 2NQ = 1 - \sqrt{2}x,$$

$$\text{又} \because S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}BC \cdot BM = \frac{1}{2} \times 1 \times (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}x,$$

$$S_{\triangle PCQ} = \frac{1}{2}CQ \cdot PN = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2}x) \cdot (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x),$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}PBCQ} = \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 1 (0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2});$$

【小问 3 详解】

$\triangle PCQ$ 可能成为等腰三角形.

①当点 P 与点 A 重合时, 点 Q 与点 D 重合,

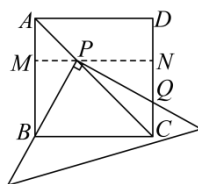
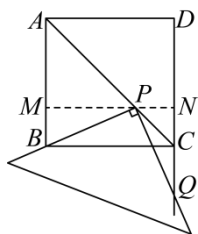
$PQ = QC$, 此时, $x = 0$.

②当点 Q 在 DC 的延长线上, 且 $CP = CQ$ 时,

$$QN = AM = PM = \frac{\sqrt{2}}{2}x, \quad CP = \sqrt{2} - x, \quad CN = \frac{\sqrt{2}}{2}CP = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$CQ = QN - CN = \frac{\sqrt{2}}{2}x - (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x) = \sqrt{2}x - 1,$$

$\therefore$ 当 $\sqrt{2} - x = \sqrt{2}x - 1$ 时, $x = 1$.



【点睛】此题主要考查正方形及直角三角形的性质及全等三角形的判定方法的综合运用

解题的关键是熟练掌握以上知识点.