

2023 学年第一学期八年级数学学期中考试

(考试时间 90 分钟 满分 120 分)

注意:

1. 本试卷共 30 题.
2. 请将所有答案做在答卷的指定位置上, 做在试卷上一律不计分.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列关于 x 的方程中, 无实数根的是 ()

- A. $x^2 - x - 1 = 0$
- B. $2x^2 - 4x + 1 = 0$
- C. $ax^2 + b = 0$ ($a \neq 0$ 、 $b \neq 0$, 且 a 、 b 同号)
- D. $x^2 - (a+2)x + a = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】先求出 Δ 的值, 再比较出其与 0 的大小即可求解.

【详解】解: A. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$, 该方程有两个不相等的实数根, 故此选项不符合题意;

B. $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 8 > 0$, 该方程有两个不相等的实数根, 故此选项不符合题意;

C. $\Delta = 0^2 - 4ab = -4ab < 0$, 该方程没有实数根, 故此选项符合题意;

D. $\Delta = [-(a+2)]^2 - 4 \times 1 \times a = a^2 + 4 > 0$, 该方程有两个不相等的实数根, 故此选项不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题考查根的判别式. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根. 上面的结论反过来也成立. 理解和掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

2. 下列代数式中, 二次根式 $\sqrt{m+n}$ 的有理化因式可以是 ()

- A. $\sqrt{m} + \sqrt{n}$; B. $\sqrt{m} - \sqrt{n}$; C. $\sqrt{m+n}$; D. $\sqrt{m-n}$.

【答案】C

【解析】

【分析】利用二次根式的乘法，用 $\sqrt{m+n}$ 分别乘以四个选项，结果是一个有理（数）式即为正确结果.

【详解】A 选项， $(\sqrt{m} + \sqrt{n})\sqrt{m+n} = \sqrt{m^2+mn} + \sqrt{mn+n^2}$ 不是有理式，故 A 选项错误；

B 选项， $(\sqrt{m} - \sqrt{n})\sqrt{m+n} = \sqrt{m^2+mn} - \sqrt{mn+n^2}$ 不是有理式，故 B 选项错误；

C 选项， $(\sqrt{m+n})^2 = m+n$ 是有理式，故 C 选项正确；

D 选项， $\sqrt{m+n} \cdot \sqrt{m-n} = \sqrt{m^2-n^2}$ 不是有理式，故 D 选项错误.

故选 C.

【点睛】本题考查的是二次根式的乘积有理化，解决本题的关键是充分理解二次根式的乘法公式，并灵活运用 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ，当 $a=b$ 时，结果即为有理化，充分理解了这一点是解决此类题型的核心关键.

3. 为防止疫情扩散，佩戴口罩成为疫情期间有效防范措施之一，某工厂为了能给市场提供充足的口罩，第一个月至第三个月生产口罩由 67500 袋增加到 90000 袋，设该工厂第一个月至第三个月生产口罩平均每月增长率为 x ，则可列方程为（ ）

A. $67500(1+2x) = 90000$

B. $67500(1+x)^2 = 90000$

C. $67500 + 67500(1+x) + 67500(1+x)^2 = 90000$

D. $67500 \times 2(1+x) = 90000$

【答案】B

【解析】

【分析】根据该工厂第一个月及第三个月生产口罩的数量，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解.

【详解】解：依题意得 $67500(1+x)^2 = 90000$,

故选：B.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

4. 下列根式中是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{\frac{5}{x}}$

B. $\sqrt{12x}$

C. $\sqrt{x^2+4}$

D. $\sqrt{x^2+6xy+9y^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】A：被开方数含分母；

B：被开方数中含能开得尽方的因数或因式；

C：符合最简二次根式的两个条件；

D：被开方数中含能开得尽方的因式.

【详解】解：A：原式 = $\frac{\sqrt{5x}}{x}$ ，不符合题意；

B：原式 = $2\sqrt{3x}$ ，不符合题意；

C：原式 = $\sqrt{x^2 + 4}$ ，符合题意；

D：原式 = $\sqrt{(x+3y)^2} = |x+3y|$ ，不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题主要考查了最简二次根式，解题的关键是熟练掌握最简二次根式的条件：(1) 被开方数的因数是整数或字母，因式是整式；(2) 被开方数中不含有可化为平方数或平方式的因数或因式.

5. 三角形内到三条边的距离相等的点是 ()

A. 三角形三条边的垂直平分线的交点

B. 三角形三条中线的交点

C. 三角形三条高所在直线的交点

D. 三角形三条角平分线的交点

【答案】D

【解析】

【分析】根据角平分线的性质即得答案.

【详解】解：三角形内到三条边的距离相等的点是三角形三条角平分线的交点；

故选：D.

【点睛】本题主要考查了角平分线的性质，熟知角平分线上的点到角的两边的距离相等是解题的关键.

6. 下列命题中，是假命题的是 ()

A. 斜边和一直角边对应相等的两个直角三角形全等；

B. 在一个角的内部（包括顶点）且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上.

C. 每个命题都有逆命题；

D. 每个定理都有逆定理.

【答案】D

【解析】

【分析】根据全等三角形的判定、角平分线的判定、命题和定理的定义判断即可.

【详解】A、斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等，是真命题；

B、根据角平分线的判定：在一个角的内部（包括顶点）且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上，是真命题；

C、每个命题都有逆命题，是真命题；

D、每个定理不一定都有逆定理，每个定理都有逆命题，而命题有真有假，故每个定理都有逆定理是假命题；

故选：D.

【点睛】本题考查了命题与定理：判断一件事情的语句，叫做命题．许多命题都是由题设和结论两部分组成，题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项，一个命题可以写成“如果…那么…”形式．有些命题的正确性是用推理证实的，这样的真命题叫做定理．

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 若二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 2$

【解析】

【详解】解：根据题意，使二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义，即 $x-2 \geq 0$,

解得： $x \geq 2$.

故答案为： $x \geq 2$.

【点睛】本题主要考查使二次根式有意义的条件，理解二次根式有意义的条件是解题关键.

8. “同位角相等”的逆命题是_____.

【答案】 相等的两个角是同位角.

【解析】

【详解】因为“同位角相等”的题设是“两个角是同位角”，结论是“这两个角相等”，所以命题“同位角相等”的逆命题是“相等的两个角是同位角”.

故答案为：相等的两个角是同位角

9. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x - k = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围_____.

【答案】 $k > -\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】利用一元二次方程根的判别式，即可求解.

【详解】解： $\because$ 一元二次方程 $x^2 + 3x - k = 0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta > 0$ ，即 $3^2 - 4 \times (-k) > 0$ ，

解得： $k > -\frac{9}{4}$.

故答案为： $k > -\frac{9}{4}$

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，熟练掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，当

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程没有实数根是解题的关键.

10. 若 $(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - 1) = 12$, 则 $a^2 + b^2$ 的值为_____.

【答案】4

【解析】

【分析】考虑运用“换元法”将原式变形, 通过解一元二次方程可求得.

【详解】设 $a^2 + b^2 = A \geq 0$

$$\therefore \text{原式} = A(A-1) = 12,$$

$$A^2 - A - 12 = 0$$

$$(A-4)(A+3) = 0, \quad A_1 = 4 > 0, \quad A_2 = -3 < 0 \quad (\text{舍去}),$$

$$\therefore A = a^2 + b^2 \geq 0$$

$$\text{所以, } a^2 + b^2 = 4$$

【点睛】本题旨在考查利用“换元法”的方程的求解, 熟练掌握换元法及一元二次方程的解法是关键.

11. 若一元二次方程 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$ 有一个根为 $x = 0$, 则 $k =$ _____.

【答案】-1

【解析】

【分析】把 $x=0$ 代入方程 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$, 解得 k 的值.

【详解】解: 把 $x=0$ 代入一元二次方程 $(k-1)x^2 + 3x + k^2 - 1 = 0$,

$$\text{得 } k^2 - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } k = -1 \text{ 或 } 1;$$

$$\text{又 } k-1 \neq 0,$$

$$\text{即 } k \neq 1;$$

$$\text{所以 } k = -1.$$

故答案为: -1.

【点睛】本题考查了一元二次方程的解的定义: 就是能够使方程左右两边相等的未知数的值, 此题应特别注意一元二次方程的二次项系数不得为零.

12. $2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ 的有理化因式是_____.

【答案】 $2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$ 或 $-3\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了有理数因式的定义，根据“如果两个含有二次根式的非零代数式相乘，它们的积不含有二次根式，就说这两个非零代数式互为有理化因式”，即可解答.

【详解】 解： $\because (2\sqrt{6}+3\sqrt{2})(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})$
 $= (2\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2$
 $= 24 - 18$
 $= 6,$

$\therefore 2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ 的有理化因式是 $2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$,

故答案为： $2\sqrt{6}-3\sqrt{2}$.

13. 在实数范围内因式分解： $x^2-4x+1=$ _____

【答案】 $(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$

【解析】

【分析】 根据公式法可进行因式分解.

【详解】 解： x^2-4x+1
 $= x^2-4x+4-3$
 $= (x-2)^2-3$
 $= (x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3});$

故答案为 $(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$.

【点睛】 本题主要考查实数及因式分解，熟练掌握因式分解是解题的关键.

14. 满足底边为已知线段 BC 的等腰三角形 ABC 的顶点 A 在_____上.

【答案】 线段 BC 的垂直平分线

【解析】

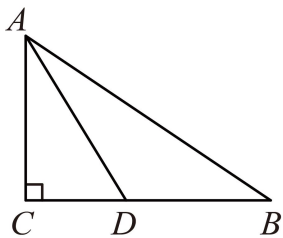
【分析】 根据等腰三角形的定义，知点 A 到 B 、 C 的距离相等，再结合到一条线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线，即可解答.

【详解】解：因为线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等，

∴满足底边为已知线段 BC 的等腰三角形 ABC 的顶点 A 在是线段 BC 的垂直平分线上.

【点睛】本题考查了等腰三角形的定义和线段垂直平分线的判定；理解 BC 是底边是正确解答本题的关键.

15. 如图， $\angle C=90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ，若 $BC=5$ ， $BD=3$ ，则 D 到 AB 的距离为_____.

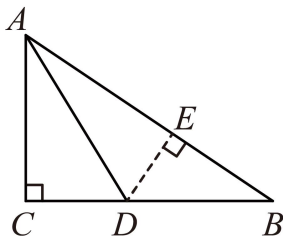


【答案】2

【解析】

【分析】过 D 点作 $DE \perp AB$ 于 E ，根据角平分线的性质定理即可求解.

【详解】解：如图，过 D 点作 $DE \perp AB$ 于 E ，



∵ AD 平分 $\angle BAC$ ， $\angle C=90^\circ$ ， $DE \perp AB$ ，

∴ $DE = DC$ ，

∵ $BC = 5$ ， $BD = 3$ ，

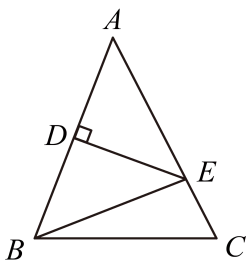
∴ $DC = 5 - 3 = 2$ ，

∴ $DE = 2$ ．

故答案为：2．

【点睛】本题主要考查了角平分线的性质：角平分线上的点到角两边的距离相等．熟练掌握角平分线的性质是解题的关键．

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AB 的垂直平分线 DE 与边 AB ， AC 交于点 D ， E ，已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCE$ 的周长分别是 26cm 和 14cm，则 BD 的长为_____cm．



【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了垂直平分线的性质和定义，根据垂直平分线上的点到两端距离相等，得出 $AE = BE$ ，推出 $AB = \triangle ABC$ 的周长 $- \triangle BCE$ 的周长 $= 12\text{cm}$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because DE$ 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore \triangle BCE \text{ 的周长} = BC + BE + CE = BC + AE + CE = BC + AC = 14\text{cm},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长} = AB + BC + AC = 26\text{cm},$$

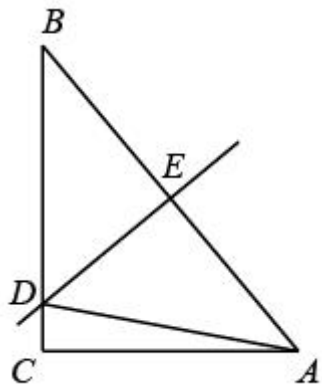
$$\therefore AB = \triangle ABC \text{ 的周长} - \triangle BCE \text{ 的周长} = 26 - 14 = 12\text{cm},$$

$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore BD = \frac{1}{2} AB = 6\text{cm},$$

故答案为： 6.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ， AB 的垂直平分线交 BC ， AB 于点 D ， E ， $\angle CAB = 50^\circ$ ，那么 $\angle CAD =$ _____.



【答案】 10° 度

【解析】

【分析】 先求出 $\angle B$ ，再根据垂直平分线的性质，求出 $\angle DAB$ ，进而即可求解.

【详解】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 50^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ,$$

$\because AB$ 的垂直平分线交 BC ， AB 于点 D ， E ，

$$\therefore DA = DB,$$

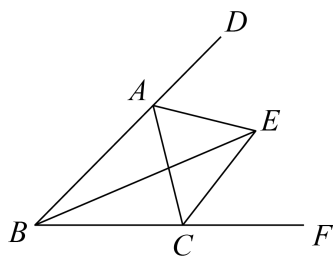
$$\therefore \angle DAB = \angle B = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CAB - \angle DAB = 10^\circ,$$

故答案是： 10° .

【点睛】本题主要考查直角三角形的性质，中垂线的性质以及等腰三角形的性质，熟练掌握中垂线的性质和等腰三角形的性质，是解题的关键.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 52^\circ$ ，三角形的两个外角 $\angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E . 则 $\angle ABE = \underline{\hspace{2cm}}$.

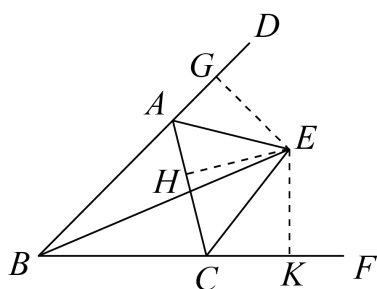


【答案】 26° ##26 度

【解析】

【分析】根据题意过点 E 作 $\triangle ABC$ 三边的垂线段 EG, EH, EK ，根据角平分线的性质可得， $EG = EK$ ，进而判定 BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线，根据角平分线的定义即可求得 $\angle ABE$

【详解】解：如图，过点 E 作 $\triangle ABC$ 三边的垂线段 EG, EH, EK ，



$\because$ 三角形的两个外角 $\angle DAC$ 和 $\angle ACF$ 的平分线交于点 E

$$\therefore EG = EH, EH = EK$$

$$\therefore EG = EK$$

$\therefore E$ 在 $\angle ABC$ 的角平分线上，即 BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线

$$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC = 26^\circ$$

故答案为： 26°

【点睛】本题考查了角平分线的性质与判定，证明 BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线是解题的关键.

三、简答题（本大题共 4 题，每小题 6 分，满分 24 分）

19. $(\sqrt{6} + 2 + \sqrt{2})(\sqrt{6} + 2 - \sqrt{2})$.

【答案】 $8+4\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 利用平方差公式 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 和完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 计算即可.

【详解】 原式 $= (\sqrt{6} + 2)^2 - (\sqrt{2})^2$

$$= (\sqrt{6})^2 + 4\sqrt{6} + 2^2 - 2$$

$$= 6 + 4\sqrt{6} + 4 - 2$$

$$= 8 + 4\sqrt{6}.$$

【点睛】 本题考查了平方差公式和完全平方公式，熟记公式是解题关键.

20. 解方程: $9(2x+1)^2 - 16(x-2)^2 = 0$.

【答案】 $x_1 = -\frac{11}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了根据平方根解方程，先将方程整理为 $9(2x+1)^2 = 16(x-2)^2$ ，再根据平方根的定义将两边开方，即可解答.

【详解】 解: $9(2x+1)^2 - 16(x-2)^2 = 0$,

$$9(2x+1)^2 = 16(x-2)^2$$

$$3(2x+1) = 4(x-2) \text{ 或 } 3(2x+1) = -4(x-2),$$

$$\text{解得: } x_1 = -\frac{11}{2}, x_2 = \frac{1}{2}.$$

21. 解方程: $12x = -x^2 - 36$.

【答案】 $x = -6$

【解析】

【分析】 本题考查了根据平方根解方程，先将方程整理为 $x^2 + 12x + 36 = 0$ ，根据完全平方公式得出 $(x+6)^2 = 0$ ，再根据平方根的定义即可解答.

【详解】 解: $12x = -x^2 - 36$,

$$x^2 + 12x + 36 = 0,$$

$$(x+6)^2 = 0,$$

$$x+6=0,$$

$$x=-6.$$

22. 用配方法解方程: $2x^2+5x-4=0$

【答案】 $x_1=\frac{\sqrt{57}-5}{4}$, $x_2=\frac{-\sqrt{57}-5}{4}$.

【解析】

【分析】 首先把二次项系数化为 1, 再把一元二次方程配成 $(x+m)^2=n$ 的形式, 再利用直接开平方法求解.

【详解】 解: $2x^2+5x-4=0$

二次项系数化为 1 得, $x^2+\frac{5}{2}x-2=0$,

移项, 得 $x^2+\frac{5}{2}x=2$,

配方, 得 $x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=2+\left(\frac{5}{4}\right)^2$,

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{57}{16},$$

$$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{57}}{4}$$

$$x_1=\frac{\sqrt{57}-5}{4}, \quad x_2=\frac{-\sqrt{57}-5}{4}.$$

【点睛】 本题考查一元二次方程的解法-配方法, 关键是熟练掌握配方法解一元二次方程的步骤.

四、解答题 (本大题共 4 题, 第 23, 24 题每题 7 分, 第 25, 26 题每题 8 分, 满分 30 分)

23. 已知: 关于 x 的方程 $2x^2+3x-m=0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 $m=0$ 时, 将 m 的值代入方程, 并用配方法求出此方程的两个实数根.

【答案】 (1) $m>-\frac{9}{8}$; (2) $x_1=0; x_2=-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据方程解的个数结合根的判别式即可得出关于 m 的一元一次不等式, 解不等式即可得出结论;

(2) 取 $m=0$, 由此得出关于 x 的一元二次方程, 利用配方法解一元二次方程即可得出结论.

【详解】解：(1) $\because$ 关于 x 的方程 $2x^2 + 3x - m = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-m) = 8m + 9 > 0,$$

$$\text{解得： } m > -\frac{9}{8}.$$

(2) 当 $m=0$ 时，原方程为 $2x^2 + 3x = 0$

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

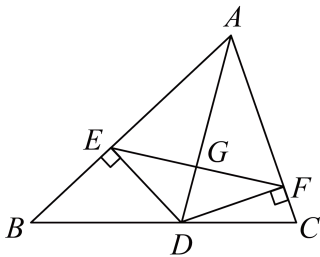
$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{3}{4}$$

$$\therefore x_1 = 0; x_2 = -\frac{3}{2}$$

【点睛】本题考查了根的判别式以及利用配方法解一元二次方程，牢记“当方程有两个不相等的实数根时，根的判别式 $\Delta > 0$ ”是解题的关键。

24. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F , 联结 EF . 求证: $AD \perp EF$



【答案】见解析

【解析】

【分析】由角平分线的性质可知 $ED = FD$ ，再利用三角形全等证明 $AE = AF$ ，根据线段垂直平分线的判定定理可得结论。

【详解】解： $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD, \quad ED = FD$$

$$\because \angle AED = \angle AFD = 90^\circ, \quad AD = AD, \quad ED = FD$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD$$

$$\therefore AE = AF$$

$\therefore$ 点 A 、 D 都在 EF 的垂直平分线上

$$\therefore AD \perp EF$$

【点睛】本题综合考查了角平分线及线段的垂直平分线，熟练掌握角平分线的性质定理及线段垂直平分线的判定定理是解题的关键.

25. “南国梨”素有“梨中之王”美称，主产于中国辽宁省的鞍山，某南国梨种植基地 2020 年种植 64 亩，到 2022 年的种植面积达到 100 亩.

(1) 求该基地这两年“南国梨”种植面积的平均增长率.

(2) 某超市调查发现，当“南国梨”的售价为 8 元/千克时，每周能售出 400 千克，售价每千克上涨 0.5 元，每周销售量减少 10 千克，已知该超市“南国梨”的进价为 6 元/千克，为了维护消费者利益，物价部门规定，该水果售价不能超过 17 元/千克. 若使销售“南国梨”每周获利 2400 元，则售价应多少元/千克？

【答案】(1) 25% (2) 16 元/千克

【解析】

【分析】(1) 设该基地这两年“南国梨”种植面积的平均增长率为 x ，利用该南国梨种植基地 2022 年种植面积=该南国梨种植面积基地 2020 年种植面积 $\times (1+\text{该基地这两年“南国梨”种植面积的平均增长率})^2$ ，即可得出关于 x 的一元二次方程，解之取其正值即可得出结论；

(2) 设售价为 y 元/千克，则每千克的销售利润为 $(y-6)$ 元，每周能售出 $(560-20y)$ 千克，利用总利润=每千克的销售利润 $\times$ 每周的销售量，即可得出关于 y 的一元二次方程，解之取其符合题意的值即可得出结论.

【小问 1 详解】

设该基地这两年“南国梨”种植面积的平均增长率为 x ,

依题意得: $64(1+x)^2 = 100$,

解得: $x_1 = 0.25 = 25\%$,

$x_2 = -2.25$ (不符合题意, 舍去).

故该基地这两年“南国梨”种植面积的平均增长率为 25%

【小问 2 详解】

设售价为 y 元/千克，则每千克的销售利润为 $(y-6)$ 元，每周能售出 $400-10 \times \frac{y-8}{0.5} = (560-20y)$ 千克，

依题意得: $(y-6)(560-20y)=2400$ 千克，

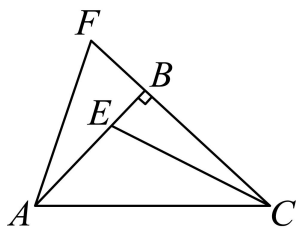
整理得: $y^2 - 34y + 288 = 0$,

解得: $y_1 = 16$, $y_2 = 18$ (不符合题意, 舍去).

故售价应为 16 元/千克

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

26. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $BA = BC$, 点 F 为 CB 延长线上一点, 点 E 在 AB 上, 且 $AF = CE$.



(1) 求证: $\triangle ABF \cong \triangle CBE$;

(2) 若 $\angle ACE = 25^\circ$, 求 $\angle CAF$ 的度数.

【答案】 (1) 见解析 (2) 65°

【解析】

【分析】 (1) 根据 HL 直接证明 $\triangle ABF \cong \triangle CBE$ 即可;

(2) 根据角度的计算得到 $\angle BCE = 20^\circ$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle BCE = \angle BAF = 20^\circ$, 由 $\angle CAF = \angle CAB + \angle BAF$, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABF = \angle CBE = 90^\circ$,

在 $Rt\triangle ABF$ 和 $Rt\triangle CBE$ 中,

$$\begin{cases} AF=CE \\ BA=BC \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle ABF \cong Rt\triangle CBE (HL)$;

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBE$;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle ABC = 90^\circ, BA = BC$,

$\therefore \angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$,

$\because \angle ACE = 25^\circ$,

$\therefore \angle BCE = \angle ACB - \angle ACE = 45^\circ - 25^\circ = 20^\circ$,

$\because \triangle ABF \cong \triangle CBE$,

$\therefore \angle BCE = \angle BAF = 20^\circ$,

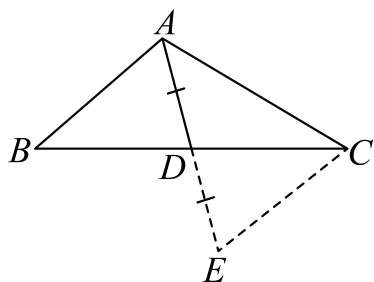
$\therefore \angle CAF = \angle CAB + \angle BAF = 45^\circ + 20^\circ = 65^\circ$.

【点睛】 本题考查了全等三角形的性质与判定, 掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键.

五、综合题 (本大题共 1 题, 满分 10 分)

27. 当已知三角形一边中点时，我们常通过“倍长中线”来构造全等的两个三角形，从而解决问题.

如图，已知 $\triangle ABC$ ，点 D 是 BC 的中点，延长 AD 至点 E ，使 $DE = AD$ ，连接 CE ，易得到 $\triangle ECD \cong \triangle ABD$ ，从而得到 $CE = AB$ ， $\angle CED = \angle BAD$ 。



已知 $\triangle ABC$ ，点 D 是 BC 的中点.

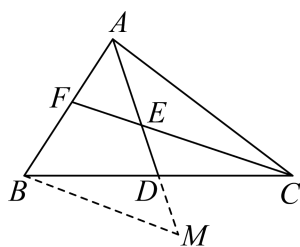


图1

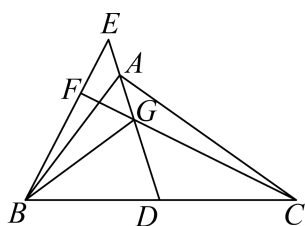


图2

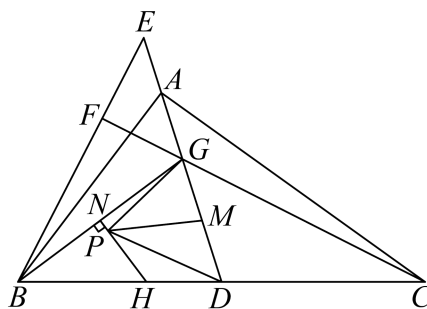


图3

(1) 如图1，点 E 在 AD 上，延长 CE 交 AB 于点 F ，且 $FA = FE$ ，求证： $CE = AB$ ；小明同学应用倍长中线的方法，延长 ED 至点 M ，使 $ED = DM$ ，连接 BM ，请你帮助他写出证明过程.

(2) 如图2，点 E, G 在射线 DA 上，连接 BE, CG, BG ，延长 CG 交 BE 于点 F ，若 $FE = FG$ ， G 为 ED 的中点，求证： $BG = BD$ ；

(3) 在 (2) 的条件下，若点 M 是线段 DG 的中点， $\angle DBG = 40^\circ$ ， NH 垂直平分线段 BG ，在 NH 上有一动点 P ，连接 GP, DP, PM ，当 $\triangle GPM$ 的周长最小时，求 $\angle DPH$ 的度数.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

(3) 30°

【解析】

【分析】 (1) 如图所示，延长 ED 至点 M ，使 $ED = DM$ ，连接 BM ，证明 $\triangle DEC \cong \triangle DMB$ 得到 $CE = BM$ ， $\angle M = \angle DEC$ ，再根据等边对等角和对顶角相等证明 $\angle BAE = \angle M$ ，得到 $BA = BM$ ，从而可证明 $AB = CE$ ；

(2) 延长 GD 至点 H ，使 $DH = GD$ ，连接 BH ，证明 $\triangle GDC \cong \triangle HDB$ ，得到 $\angle DGC = \angle H$ ，再证明 $GD = EG = DH$ ，进而证明 $\triangle EBG \cong \triangle HBD$ ，即可证明 $BG = BD$ ；

(3) 如图所示，连接 BM 交 NH 于 P' ，连接 GP', DP', MP' ，由线段垂直平分线的性质得到 $BP' = GP'$ ，

由三线合一定理得到 BM 垂直平分 DG , $\angle MBG = \angle MBD = \frac{1}{2} \angle DBG = 20^\circ$, 则 $DP' = GP'$, 故当 P 点运动到点 P' 时, $BP + PM$ 最小, 即 $\triangle GPM$ 的周长最小, 最小为 $BM + GM$, 此时 $DP = BP = GP$, 则 $\angle PDB = \angle PBD = 20^\circ$, 求出 $\angle NHB = 50^\circ$, 则 $\angle DPH = \angle NHB - PDH = 30^\circ$.

【小问 1 详解】

证明: 如图所示, 延长 ED 至点 M , 使 $ED = DM$, 连接 BM ,

$\because D$ 是 BC 的中点,

$\therefore BD = CD$,

$\because$ 在 $\triangle DEC$ 和 $\triangle DMB$ 中,

$$\begin{cases} DE = DM \\ \angle EDC = \angle MDB, \\ CD = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle DEC \cong \triangle DMB$ (SAS),

$\therefore CE = BM$, $\angle M = \angle DEC$,

$\because FA = FE$,

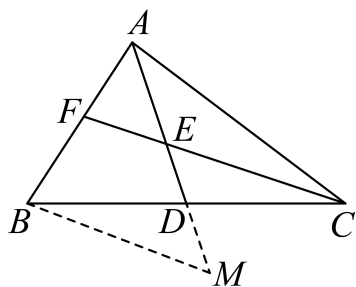
$\therefore \angle FEA = \angle FAE$,

$\because \angle FEA = \angle DEC$,

$\therefore \angle BAE = \angle M$,

$\therefore BA = BM$,

$\therefore AB = CE$;



【小问 2 详解】

证明: 延长 GD 至点 H , 使 $DH = GD$, 连接 BH ,

$\because$ 点 D 是 BC 的中点,

$\therefore CD = BD$,

在 $\triangle GDC$ 和 $\triangle HDB$ 中,

$$\begin{cases} DG = DH \\ \angle GDC = \angle HDB, \\ CD = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle GDC \cong \triangle HDB$ (SAS) ,

$\therefore \angle DGC = \angle H$,

$\because FE = FG$,

$\therefore \angle E = \angle FGE = \angle DGC$,

$\therefore \angle E = \angle H$,

$\therefore BE = BH$,

$\because G$ 为 ED 的中点,

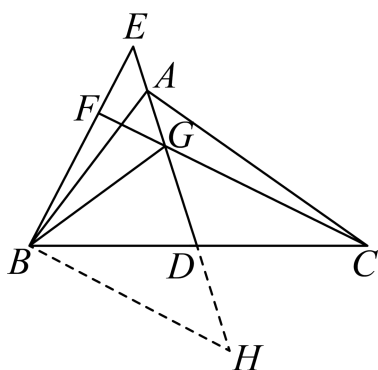
$\therefore GD = EG = DH$,

$\therefore$ 在 $\triangle EBG$ 和 $\triangle HBD$ 中

$$\begin{cases} EG = HD \\ \angle E = \angle H, \\ EB = HB \end{cases}$$

$\therefore \triangle EBG \cong \triangle HBD$ (SAS) ,

$\therefore BG = BD$;



【小问 3 详解】

解: 如图所示, 连接 BM 交 NH 与 P' , 连接 GP' , DP' , MP' ,

$\because NH$ 垂直平分线段 BG ,

$\therefore BP' = GP'$,

$\because BG = BD$ 且 M 为 GD 的中点,

$\therefore BM$ 垂直平分 DG , $\angle MBG = \angle MBD = \frac{1}{2} \angle DBG = 20^\circ$,

$\therefore DP' = GP'$,

$\therefore \triangle GPM$ 的周长 $= PG + PM + GM = BP + PM$,

∴当 P 点运动到点 P' 时, $BP + PM$ 最小, 即 $\triangle GPM$ 的周长最小, 最小为 $BM + GM$,

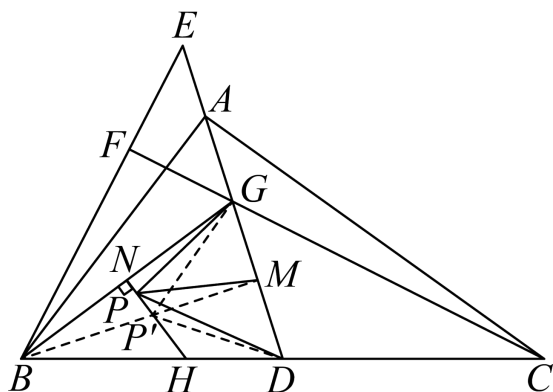
∴此时 $DP = BP = GP$,

∴ $\angle PDB = \angle PBD = 20^\circ$,

∴ $\angle HNB = 90^\circ$,

∴ $\angle NHB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$,

∴ $\angle DPH = \angle NHB - \angle PDH = 30^\circ$.

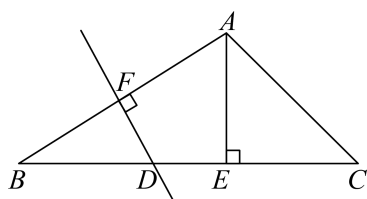


【点睛】本题主要考查了全等三角形的性质与判定, 等腰三

角形的性质与判定, 线段垂直平分线的性质, 三角形内角和定理, 三角形外角的性质等等, 正确作出辅助线构造全等三角形是解题的关键.

六、能力拓展题 (本大题共 3 题, 第 28, 29 题每题 5 分, 第 30 题 10 分, 满分 20 分)

28. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AE \perp BC$ 于点 E , AB 的垂直平分线交 BC 于点 D , 交 AB 于点 F , 若 $BD = 6\sqrt{2}$, 则 $\angle DAE =$ _____.



【答案】 30° ## 30 度

【解析】

【分析】本题考查了垂直平分线的性质, 直角三角形两锐角互余, 掌握垂直平分线上的点到两端距离相等是解题的关键. 连接 AD , 根据直角三角形两锐角互余得出 $\angle BAE = 60^\circ$, 根据垂直平分线的性质得出 $BD = AD$, 则 $\angle B = \angle DAB = 30^\circ$, 即可求解.

【详解】解: 连接 AD ,

∴ $\angle B = 30^\circ$, $AE \perp BC$,

∴ $\angle BAE = 90^\circ - \angle B = 60^\circ$,

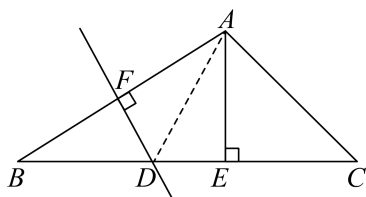
∴ DF 垂直平分 AB ,

$$\therefore BD = AD,$$

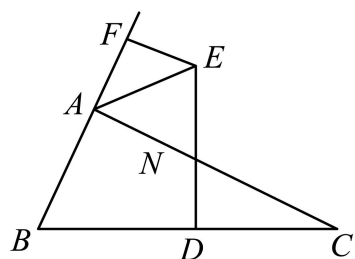
$$\therefore \angle B = \angle DAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE - \angle DAB = 30^\circ.$$

故答案为: 30° .



29. 已知: $\triangle ABC$, DE 垂直平分 BC 边, $\angle BAC$ 外角平分线与 DE 交于 E , 过 E 作 EF 垂直直线 AB 于 F . 若 $AF = 2$, $AB = 3$, 那么 AC 长是___.



【答案】 7

【解析】

【分析】 过 E 作 $EN \perp AC$ 于 N , 并连接 EB 、 EC , 先证明 $\triangle FAE \cong \triangle NAE$ 得到 $EF = EN$, $AF = AN$, 再证明 $Rt\triangle EFB \cong Rt\triangle ENC$, 得到 $FB = NC$, 即可求解.

【详解】 解: 过 E 作 $EN \perp AC$ 于 N , 并连接 EB 、 EC .

$$\because EA \text{ 平分 } \angle FAC,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle EAN,$$

$$\because EF \perp AB, EN \perp AC,$$

$$\therefore \angle EFA = \angle ENA = 90^\circ,$$

在 $\triangle FAE$ 和 $\triangle NAE$ 中,

$$\begin{cases} \angle EFA = \angle ENA \\ \angle EAF = \angle EAN, \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FAE \cong \triangle NAE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore EF = EN, AF = AN,$$

$$\because DE \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore EB = EC,$$

在 $Rt\triangle EFB$ 和 $Rt\triangle ENC$ 中,

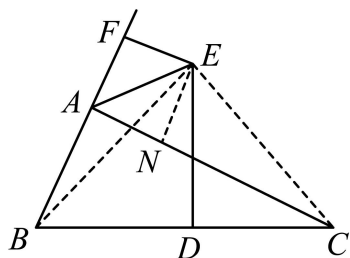
$$\begin{cases} EF = EN \\ EB = EC \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle EFB \cong Rt\triangle ENC$ (HL),

$\therefore FB = NC$,

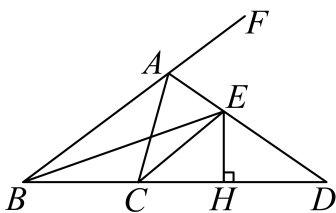
$\therefore AC = AN + NC = AF + BF = 2AF + AB = 4 + 3 = 7$,

故答案为: 7.



【点睛】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，线段垂直平分线的性质，角平分线的性质，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解.

30. 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 延长线上, $\angle ACB = 96^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 E , 过点 E 作 $EH \perp BD$, 垂足为 H , 且 $\angle CEH = 48^\circ$.



(1) 直接写出 $\angle ACE$ 的度数 = _____;

(2) 求证: AE 平分 $\angle CAF$;

(3) 若 $AC + CD = 14$, $AB = 8$, 且 $S_{\triangle ACD} = 21$, 求 $\triangle ABE$ 的面积.

【答案】(1) 42°

(2) 见解析 (3) 12

【解析】

【分析】(1) 根据邻补角的定义和垂直的定义可得 $\angle ACD = 84^\circ$ 、 $\angle CHE = 90^\circ$, 进而得到 $\angle ECH = 42^\circ$, 然后根据 $\angle ACE = \angle ACD - \angle ECH$ 即可解答;

(2) 如图: 过 E 点分别作 $EM \perp BF$ 于 M , $EN \perp AC$ 于 N , 根据角平分线的性质定理以及角平分线的定义可得 $EM = EH$ 、 CE 平分 $\angle ACD$ 、 $EN = EH$, 最后根据角平分线的判定定理即可解答;

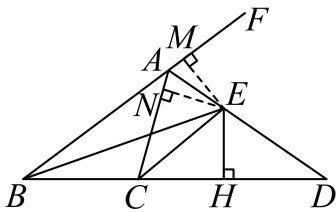
(3) 根据 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle CED}$ 结合已知条件可得 $EM = 3$, 最后运用三角形的面积公式即可解答.

【小问 1 详解】

解: $\because \angle ACB = 96^\circ$,
 $\therefore \angle ACD = 180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$,
 $\because EH \perp BD$,
 $\therefore \angle CHE = 90^\circ$,
 $\because \angle CEH = 48^\circ$,
 $\therefore \angle ECH = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$,
 $\therefore \angle ACE = \angle ACD - \angle ECH = 84^\circ - 42^\circ = 42^\circ$,
故答案为: 42° .

【小问 2 详解】

证明: 如图: 过 E 点分别作 $EM \perp BF$ 于 M , $EN \perp AC$ 于 N ,



$\because BE$ 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore EM = EH$,
 $\because \angle ACE = \angle ECH = 42^\circ$,
 $\therefore CE$ 平分 $\angle ACD$,
 $\therefore EN = EH$,
 $\therefore EM = EN$,
 $\therefore AE$ 平分 $\angle CAF$.

【小问 3 详解】

解: $\because AC + CD = 14$, $S_{\triangle ACD} = 21$, $EM = EN = EH$,

$$\therefore S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} AC \cdot EN + \frac{1}{2} CD \cdot EH = \frac{1}{2} (AC + CD) \cdot EM = 21,$$

即 $\frac{1}{2} \times 14 \cdot EM = 21$, 解得 $EM = 3$,

$$\therefore AB = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot EM = 12.$$

【点睛】 本题主要考查了邻补角的性质、角平分线的性质与判定定理、三角形的面积等知识点, 灵活运用

相关知识点成为解答本题的关键.