

2023 学年第一学期上海区杨浦双语学校

数学试卷 初二年级期中考试

一. 选择题(每题 4 分, 共 24 分)

1. $\sqrt{a-4b}$ 的一个有理化因式是 ().

- A. $\sqrt{a-4b}$ B. $\sqrt{a+4b}$ C. $\sqrt{a}+2\sqrt{b}$ D. $\sqrt{a}-2\sqrt{b}$.

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据有理化因式的定义即可解答; 掌握两个根式相乘的积为有理数成为解题的关键.

【详解】 解: $\because \sqrt{a-4b} \times \sqrt{a-4b} = a-4b$,

$\therefore \sqrt{a-4b}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{a-4b}$.

故选 A.

2. 下列方程中, 为一元二次方程的是 ()

- A. $x(x+1)=x^2-1$ B. $x+\frac{1}{n}=0$
C. $\sqrt{x^2+x}=1$ D. $\sqrt{5}x^2-x=5x^2-\sqrt{5}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 此题考查了一元二次方程的定义, 判断一个方程是否是一元二次方程, 首先要看是否是整式方程, 然后看化简后是否是只含有一个未知数且未知数的最高次数是 2. 根据一元二次方程的定义逐项判断即可.

【详解】 解: A、化简后 $x+1=0$, 是一元一次方程, 故本选项不符合题意;

B、该方程是一元一次方程, 故本选项不符合题意;

C、该方程不是整式方程, 故本选项不符合题意;

D、由原方程整理得 $(\sqrt{5}-5)x^2-x+\sqrt{5}=0$, 属于一元二次方程, 故本选项符合题意.

故选: D.

3. 若最简二次根式 $\sqrt{5x^2+1}$ 与 $3\sqrt{5+x}$ 是同类二次根式, 则 x 的值为 ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. 1 C. 1 或 $-\frac{4}{5}$ D. 都不是

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查二次根式与最简二次根式，熟练掌握其定义是解题的关键，由于给出的两个二次根式既是最简二次根式又是同类二次根式，那么被开方数就应该相等，由此可得出关于 x 的方程 $5x^2 + 1 = 5 + x$ ，解方程即可得到 x 的值，舍去不合题意的解即可得到答案.

【详解】 解： $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{5x^2 + 1}$ 与 $3\sqrt{5 + x}$ 是同类二次根式，

$$\therefore 5x^2 + 1 = 5 + x,$$

移项得： $5x^2 - x - 4 = 0$,

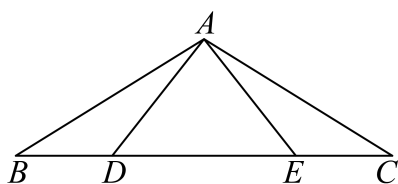
解之得： $x_1 = -\frac{4}{5}$, $x_2 = 1$,

当 $x = -\frac{4}{5}$ 时， $\sqrt{5x^2 + 1}$ 与 $3\sqrt{5 + x}$ 都不是最简二次根式，

$\therefore x = -\frac{4}{5}$ 不合题意，舍去，

故选： B.

4. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，从以下条件① $\angle B = \angle C$ ；② $BD = CE$ ；③ $BE = CD$ ；④ $\angle BAE = \angle CAD$ 中，选出一个条件证明 $AD = AE$ ，那么符合要求条件的个数有 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据全等三角形的判定与性质逐一判断即可.

【详解】 解： 由 $AB = AC$ ， $\angle B = \angle C$ ，无法证明 $AD = AE$ ，故①不符合题意；

由 $AB = AC$ ， $BD = CE$ ， $\angle B = \angle C$ ，利用 SAS 即可证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，则 $AD = AE$ ，故②符合题意；

由 $AB = AC$ ， $\angle B = \angle C$ ， $BE = CD$ ，利用 SAS 即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，则 $AD = AE$ ，故③符合题意；

由 $AB = AC$ ， $\angle B = \angle C$ ， $\angle BAE = \angle CAD$ ，利用 ASA 即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，则 $AD = AE$ ，故④符合题意，

综上所述可知，符合条件的个数为 3 个，故 C 正确.

故选：C.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，熟练掌握全等三角形的判定与性质是解题的关键.

5. 下列命题中，假命题的个数是（ ）

- (1) 垂直于同一条直线的两条直线平行；
- (2) 面积相等的两个三角形全等；
- (3) 等腰三角形的顶角平分线垂直平分底边；
- (4) 三角形的一个外角大于任何一个内角；
- (5) 有两角和一边对应相等的两个三角形全等；
- (6) 有两边和其中一边上的高对应相等的两个三角形全等.

A. 3个

B. 4个

C. 5

D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了命题的真假，分别利用平行线的判定、三角形全等的判定方法、等腰三角形的性质以及三角形外角的性质逐一判断即可，熟练掌握已经学过的概念、性质、定理是解题的关键.

【详解】解：(1) 在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行，故(1)为假命题；

(2) 面积相等的两个三角形不一定全等，故(2)为假命题；

(3) 等腰三角形的顶角平分线垂直平分底边，故(3)为真命题；

(4) 三角形的一个外角大于任何一个与它不相邻的内角，故(4)为假命题；

(5) 有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等，故(5)为假命题；

(6) 有两边和其中一边上的高对应相等的两个三角形不一定全等，故(6)为假命题；

其中，假命题有5个，

故选：C.

6. 定义：若两个一元二次方程有且只有一个相同的实数根，我们就称这两个方程为“同伴方程”. 例如 $x^2 = 4$ 和 $(x-2)(x+3) = 0$ 有且仅有一个相同的实数根 $x = 2$. 所以这两个方程为“同伴方程”，若关于 x

的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的参数同时满足 $a + b + c = 0$ 和 $a - b + c = 0$. 且该方程与

$(x+2)(x-n) = 0$ 互为“同伴方程”，则 n 的值为（ ）

A. 1 或 -1

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】由 $a+b+c=0$ 和 $a-b+c=0$ 可得关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 两个实数根为 $x_1=1, x_2=-1$ ，由 $(x+2)(x-n)=0$ ，可得 $(x+2)(x-n)=0$ 的根为 $x=-2$ 或 $x=n$ ，根据 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 与 $(x+2)(x-n)=0$ 互为“同伴方程”，即得 $n=1$ 或 $n=-1$ 。掌握“同伴方程”的定义是解题的关键。

【详解】解：∵同时满足 $a+b+c=0$ 和 $a-b+c=0$ ，

∴关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 两个实数根为 $x_1=1, x_2=-1$

∴ $(x+2)(x-n)=0$ ，

∴ $x+2=0$ 或 $x-n=0$ ，

∴ $(x+2)(x-n)=0$ 的根为 $x=-2$ 或 $x=n$ ，

∴ $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 与 $(x+2)(x-n)=0$ 互为“同伴方程”，

∴ $n=1$ 或 $n=-1$ 。

故答案为：1 或 -1。

二、填空题(每题 4 分，共 48 分)

7. 若 $\frac{1}{2}(m^2-3m)\sqrt{2m}$ 是二次根式，则 m 的值为_____

【答案】4

【解析】

【分析】根据二次根式的定义以及二次根式的被开方数大于零是解答本题的关键。

【详解】解：∵ $\frac{1}{2}(m^2-3m)\sqrt{2m}$ 是二次根式，

∴ $\frac{1}{2}(m^2-3m)=2, 2m \geq 0$ ，解得： $m=4$ 或 $m=-1$ (舍去)。

故答案为 4。

8. 方程 $x(x+2)=2+x$ 的解为_____。

【答案】 $x_1=-2, x_2=1$

【解析】

【分析】先将方程右边的项移到左边，再用因式分解法解方程即可。

【详解】解： $x(x+2)=2+x$

移项得： $x(x+2)-(x+2)=0$ ，

提取公因式得: $(x+2)(x-1)=0$,

$x+2=0$ 或 $x-1=0$,

解得: $x_1=-2, x_2=1$,

故答案为: $x_1=-2, x_2=1$.

【点睛】 本题考查用因式分解法解一元二次方程, 解题关键是熟练掌握因式分解法解一元二次方程的方法. 在用因式分解法解一元二次方程时, 如果方程左边的代数式能够分解为两个一次因式的乘积, 而右边为零时, 则可令每一个一次因式为零, 得到两个一元一次方程, 解出这两个一元一次方程的解就是原方程的两个解了.

9. 方程 $(m-1)x^2+2x+1=0$ 有两个不相等的实数根, 则 m 的取值范围_____.

【答案】 $m < 2$ 且 $m \neq 1$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义和根的判别式列不等式求解即可; 掌握当 $\Delta > 0$ 方程有两个不同的实数根是解题的关键.

【详解】 解: 根据题意得 $\begin{cases} \Delta = 2^2 - 4(m-1) > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$, 解得: $m < 2$ 且 $m \neq 1$.

故答案为: $m < 2$ 且 $m \neq 1$.

10. 若代数式 $\frac{2x+1}{2-\sqrt{x+1}}$ 有意义, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -1$ 且 $x \neq 3$

【解析】

【分析】 根据二次根式的意义、分式有意义的条件列不等式组求解即可; 掌握二次根式的被开方数大于等于零, 分式的分母不等于零是解题的关键.

【详解】 解: 由题意可得: $\begin{cases} 2-\sqrt{x+1} \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$, 解得: $x \geq -1$ 且 $x \neq 3$.

故答案为: $x \geq -1$ 且 $x \neq 3$.

11. 化简: $x\sqrt{-\frac{1}{12x^3}} = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $\frac{\sqrt{-3x}}{6x}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简，利用二次根式的运算公式直接化简即可得出答案，掌握二次根式的运算性质是解题的关键.

【详解】 解：原式 $= x\sqrt{-\frac{3x}{36x^4}} = x\frac{\sqrt{-3x}}{\sqrt{36x^4}} = x\cdot\frac{\sqrt{-3x}}{6x^2} = \frac{\sqrt{-3x}}{6x}$ ，

故答案为： $\frac{\sqrt{-3x}}{6x}$.

12. 二次三项式 $(2m+1)x^2 - (4m+1)x + 2m-1$ 可在实数范围内因式分解，则 m 的取值范围_____

【答案】 $m \geq -\frac{5}{8}$ 且 $m \neq -\frac{1}{2}$ 且 $m \neq -\frac{1}{4}$ 且 $m \neq \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式的应用，根据二次三项式的定义给出各系数不为 0，再根据“可在实数范围内因式分解”得出 $\Delta \geq 0$ ，从而得解，掌握“可在实数范围内因式分解”即是 $\Delta \geq 0$ 是解题的关键，注意系数不为 0.

【详解】 解： $\because (2m+1)x^2 - (4m+1)x + 2m-1$ 是二次三项式，

$$\therefore 2m+1 \neq 0, 4m+1 \neq 0 \text{ 且 } 2m-1 \neq 0$$

$$\therefore m \neq -\frac{1}{2} \text{ 且 } m \neq -\frac{1}{4} \text{ 且 } m \neq \frac{1}{2}$$

$\because$ 二次三项式 $(2m+1)x^2 - (4m+1)x + 2m-1$ 可在实数范围内因式分解，

$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= (4m+1)^2 - 4(2m+1)(2m-1) = 16m^2 + 8m + 1 - 4(4m^2 - 1) = 16m^2 + 8m + 1 - 16m^2 + 4 \\ &= 8m + 5 \geq 0 \end{aligned}$$

解得： $m \geq -\frac{5}{8}$ ，

$$\therefore m \geq -\frac{5}{8} \text{ 且 } m \neq -\frac{1}{2} \text{ 且 } m \neq -\frac{1}{4} \text{ 且 } m \neq \frac{1}{2}.$$

13. 在实数范围内因式分解： $3x^2 - 6x - 3 =$ _____

【答案】 $3(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 本题主要考查了因式分解，先提取公因数 3，再利用完全平方公式进行配方得到 $3[(x-1)^2 - 2]$ ，进一步利用平方差公式分解因式即可得到答案.

【详解】解： $3x^2 - 6x - 3$

$$= 3(x^2 - 2x - 1)$$

$$= 3(x^2 - 2x + 1 - 2)$$

$$= 3[(x-1)^2 - 2]$$

$$= 3(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}),$$

故答案为： $3(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$.

14. 某工厂自 1 月至 3 月的生产收入以相同的百分率逐月增长、经预算，1 月份生产收入为 25 万元，一季度的生产收入可达 91 万元，设 2 月和 3 月工厂每月生产收入增长的百分率都为 x ，可列方程_____

【答案】 $25 + 25(1+x) + 25(1+x)^2 = 91$

【解析】

【分析】设每月生产收入的增长率为 x ，根据“季度的生产收入可达 91 万元”列一元二次方程即可；掌握一元二次方程的增长率问题是解题的关键.

【详解】解：设每月生产收入的增长率为 x ，则 2 月份生产收入 $25(1+x)$ ，3 月份生产收入 $25(1+x)^2$ ，根据题意可得： $25 + 25(1+x) + 25(1+x)^2 = 91$.

故答案为： $25 + 25(1+x) + 25(1+x)^2 = 91$.

15. 等腰 $\triangle ABC$ 的一边长为 5，另外两边的长是关于 x 的方程 $x^2 - 16x + m = 0$ 的两个实数根，则 m 的值是_____

【答案】 64

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解，根的判别式，等腰三角形的性质等知识点，结合一元二次方程的解和根的判别式，分已知边长 5 是底边和腰两种情况讨论即可. 掌握分类讨论思想是解此题的关键.

【详解】解：关于 x 的方程 $x^2 - 16x + m = 0$ 有两个实数根，

则 $\Delta = 16^2 - 4m \geq 0$ ，得 $m \leq 64$ ，

当底边长为 5 时，则另两边相等，

$$\therefore \Delta = 16^2 - 4m = 0,$$

$$\therefore m = 64;$$

当腰长为 5 时, 另两边中至少有一个是 5,

则 $x = 5$ 一定是方程 $x^2 - 16x + m = 0$ 的一个根, 代入得: $25 - 80 + m = 0$,

解得 $m = 55$.

$$\therefore x^2 - 16x + 55 = 0,$$

解得: $x_1 = 5, x_2 = 11$,

此时三角形的三边为: 5, 5, 11;

$$\because 5 + 5 < 11,$$

$\therefore$ 此种情况不存在,

$\therefore m$ 的值为 64.

故答案为: 64.

16. 命题“等腰三角形两底角的平分线相等”的逆命题是_____.

【答案】 有两条角平分线相等的三角形是等腰三角形

【解析】

【分析】 根据逆命题的定义写出即可.

【详解】 解: 命题“等腰三角形两底角的平分线相等”的逆命题是“有两条角平分线相等的三角形是等腰三角形”.

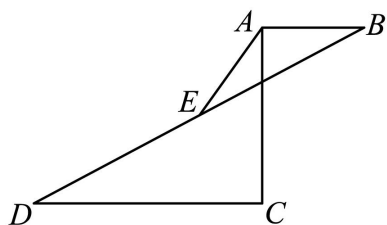
故答案是: 有两条角平分线相等的三角形是等腰三角形.

【点睛】 本题考查了互逆命题的知识, 掌握逆命题的定义是解题的关键. 两个命题中, 如果第一个命题的条件是第二个命题的结论, 而第一个命题的结论又是第二个命题的条件, 那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题.

17. 阅读材料: 在直角三角形中, 斜边和两条直角边满足定理: 两条直角边的平方和, 等于斜边的平方, 因此如果已知两条边的长, 根据定理就能求出第三边的长, 例如: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, 由定理得 $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 代入数据计算求得 $AB = 5$.

请结合上述材料和已学几何知识解答以下问题:

已知: 如图, $\angle C = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, $AB = 5$, $CD = 11$, $AC = 8$, 点 E 是 BD 的中点, 那么 AE 的长为_____.

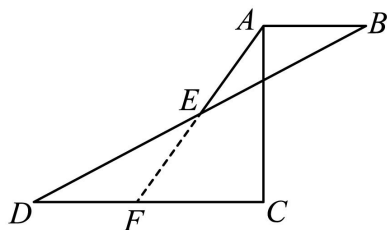


【答案】 5

【解析】

【分析】 延长 AE 交 CD 于点 F ，如图所示，只要证得 $\triangle ABE \cong \triangle FDE$ (ASA)，根据全等三角形的性质可得 $AE = EF$ ， $AB = DF = 5$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中，利用勾股定理求得 $AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ ，最后可得 $AE = EF = \frac{1}{2} AF = 5$ 。

【详解】 解： 延长 AE 交 CD 于点 F ，如图所示，



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle B = \angle D$,

$\because$ 点 E 是 BD 的中点,

$\therefore BE = DE$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FDE$ 中

$$\begin{cases} \angle B = \angle D \\ BE = DE \\ \angle AEB = \angle DEF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FDE$ (ASA),

$\therefore AE = EF$, $AB = DF = 5$,

$\because CD = 11$,

$\therefore CF = DC - DF = 11 - 5 = 6$,

又 $\because \angle C = 90^\circ$, $AC = 8$,

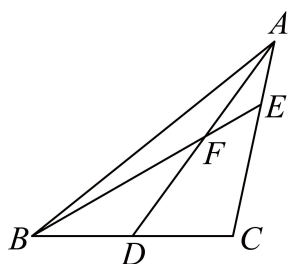
$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中, $AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$,

$$\therefore AE = EF = \frac{1}{2} AF = 5,$$

故答案为：5

【点睛】本题考查了全等三角形的判定和性质，勾股定理的应用，根据题意作出适当的辅助线是解题的关键.

18. 如图，已知 AD 是 $\triangle ACB$ 的中线，点 E 是 AC 上的一点， BE 交 AD 于 F ， $AC = BF$ ， $\angle DAC = 24^\circ$ ， $\angle EBC = 30^\circ$ ，则 $\angle ACB =$ _____

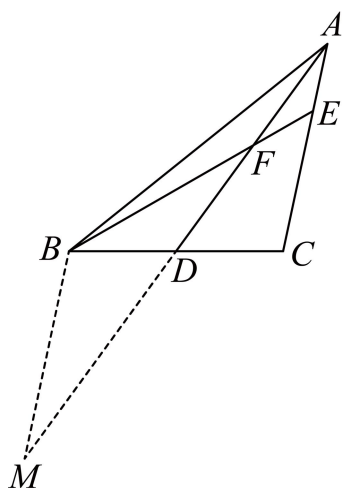


【答案】 102° ## 102 度

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质、等腰三角形的判定和性质等知识，延长 AD 到 M ，使得 $DM = AD$ ，连接 BM ，证 $\triangle BDM \cong \triangle CDA$ (SAS)，得 $BM = AC = BF$ ， $\angle M = \angle DAC = 24^\circ$ ， $\angle C = \angle DBM$ ，再证 $\triangle BFM$ 是等腰三角形，求出 $\angle MBF$ 的度数，即可解决问题，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题.

【详解】如图，延长 AD 到 M ，使得 $DM = AD$ ，连接 BM ，



在 $\triangle BDM$ 和 $\triangle CDA$ 中，

$$\begin{cases} DM = DA \\ \angle BDM = \angle CDA, \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDM \cong \triangle CDA (\text{SAS}),$$

$$\therefore BM = AC,$$

$$\therefore \angle M = \angle DAC = 24^\circ, \quad \angle C = \angle DBM,$$

$$\because BF = AC,$$

$$\therefore BF = BM,$$

$$\therefore \angle M = \angle BFM = 24^\circ,$$

$$\therefore \angle MBF = 180^\circ - \angle M - \angle BFM = 132^\circ,$$

$$\because \angle EBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DBM = \angle MBF - \angle EBC = 102^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DBM = 102^\circ.$$

三、简答题(18、20、21、22 题 10 分; 23, 24 题 12 分; 25 题 14 分, 共 78)

$$19. \sqrt{12} + 3\sqrt{1\frac{1}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\sqrt{48}$$

【答案】 0

【解析】

【分析】 根据二次根式的运算法则即可求出答案;

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \sqrt{12} + 3\sqrt{1\frac{1}{3}} - \sqrt{5\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\sqrt{48} \\ &= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{8}{3}\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查二次根式, 解题的关键是熟练运用二次根式的运算法则, 本题属于基础题型.

$$20. \text{用配方法解方程: } 2x^2 - 5x - 4 = 0.$$

$$\text{【答案】 } x_1 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4}, \quad x_2 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4}.$$

【解析】

【分析】 本题考查了用配方法解方程. 首先移项, 把常数项移到等号的右边, 再将二次项系数化为 1, 然后在方程的左右两边同时加上一次项系数一半的平方, 即可使左边变形为完全平方式, 右边是常数, 直接开方即可求解.

【详解】解：移项得 $2x^2 - 5x = 4$,

一次项系数化为1得: $x^2 - \frac{5}{2}x = 2$,

配方得: $x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 2 + \frac{25}{16}$, 即 $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{57}{16}$,

开方得: $x - \frac{5}{4} = \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$,

解得: $x_1 = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{57}}{4}$, $x_2 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{57}}{4}$.

21. 已知: $a+b=2\sqrt{5}-\sqrt{6}$, $a-b=\sqrt{10}-2\sqrt{3}$, 求: $-\frac{\sqrt{ab}}{3}$ 的值

【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了完全平方公式, 二次根式的乘法, 算术平方根, 熟练掌握完全平方公式

“ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ” 是解题的关键.

【详解】解: $\because a+b=2\sqrt{5}-\sqrt{6}$, $a-b=\sqrt{10}-2\sqrt{3}$

$$\therefore (a+b)^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$= (2\sqrt{5}-\sqrt{6})^2$$

$$= 20 - 4\sqrt{30} + 6$$

$$= 26 - 4\sqrt{30} \text{ ①};$$

$$(a-b)^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$= (\sqrt{10}-2\sqrt{3})^2$$

$$= 10 - 4\sqrt{30} + 12$$

$$= 22 - 4\sqrt{30} \text{ ②};$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ 得 } 4ab = 4,$$

$$\therefore ab = 1$$

$$\therefore \sqrt{ab} = 1$$

$$-\frac{\sqrt{ab}}{3} = -\frac{1}{3}.$$

22. 第二十二届中国上海国际艺术节首次移师上海市黄浦区南京东路第一百货商业中心, 主办方工作人员准备利用一边靠墙(墙长 30 米)的空旷场地为提前到场的观众设立面积为 320 平方米的封闭型长方形等候区. 如图, 为了方便观众进出, 在两边空出两个宽各为 1 米的出入口, 共用 去围栏绳 50 米. 请问:



(1) 工作人员围成的这个长方形的相邻两边长分别是多少米?

(2) 长方形场地的最大面积是多少平方米?

【答案】 (1) 这个长方形的宽为 16 米, 长为 20 米;

(2) 338 平方米.

【解析】

【分析】 (1) 设这个长方形的宽为 x 米, 根据题意可得长为 $(50 + 1 + 1 - 2x)$ 米, 最后列出一元二次方程进行求解即可;

(2) 设长方形场地为 S , 得出 S 关于 x 的二次函数解析式, 然后求二次函数的最大值即可求解;
此题考查了一元二次方程与二次函数的应用, 正确理解题意、准确列出一元二次方程与二次函数关系式是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 设这个长方形的宽为 x 米, 则长为 $(50 + 1 + 1 - 2x)$ 米,

$$\text{根据题意得: } x(50 + 1 + 1 - 2x) = 320,$$

$$\text{整理得: } x^2 - 26x + 160 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 10, x_2 = 16,$$

当 $x = 10$ 时, $50 + 1 + 1 - 2x = 50 + 1 + 1 - 2 \times 10 = 32 > 30$, 不符合题意, 舍去,

当 $x = 16$ 时, $50 + 1 + 1 - 2x = 50 + 1 + 1 - 2 \times 16 = 20 < 30$, 符合题意,

答：这个长方形的宽为16米，长为20米；

【小问2详解】

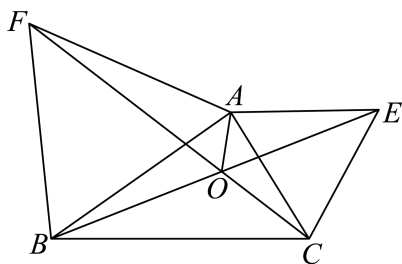
设长方形场地面积为 S ，则：

$$\begin{aligned} S &= x(50+1+1-2x), \\ &= -2x^2 + 52x, \\ &= -2(x^2 - 26x), \\ &= -2(x^2 - 26x + 13^2) + 2 \times 13^2, \\ &= -2(x-13)^2 + 338, \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $x=13$ 时，面积最大为 338m^2 ，

答：长方形场地的最大面积是 338m^2 。

23. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 外侧作等边三角形 ABF 、 ACE ，连接 BE 、 CF ，交于点 O



(1) 求证： $\triangle ABE \cong \triangle AFC$

(2) AO 为 $\angle EOF$ 的角平分线

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了三角形全等的判定定理与性质、等边三角形的性质、角平分线的判定定理等知识点，熟练掌握三角形全等的判定定理与性质是解题的关键。

(1) 先根据等边三角形的性质可得 $AB = AF$ ， $AC = AE$ ， $\angle FAB = \angle EAC = 60^\circ$ ，

再根据角的和差可得 $\angle FAC = \angle BAE$ ，然后根据三角形全等的判定定理即可得证；

(2) 过点 A 分别作 $AP \perp CF$ 于点 P ， $AQ \perp BE$ 于点 Q ，先根据三角形全等的性质可得 $CF = BE$ ，

$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AFC}$ ，再根据三角形的面积公式可得 $AP = AQ$ ，由此即可得证。

【小问1详解】

证明: $\because \triangle ABF$ 和 $\triangle ACE$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = AF, AC = AE, \angle FAB = \angle EAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FAB + \angle BAC = \angle EAC + \angle BAC,$$

$$\text{即 } \angle FAC = \angle BAE,$$

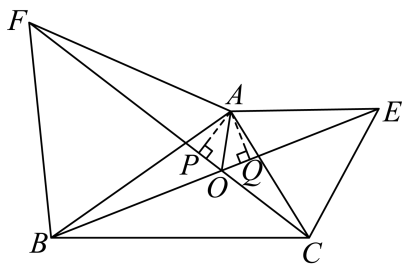
在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle AFC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AF \\ \angle BAE = \angle FAC, \\ AE = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFC (\text{SAS})$$

【小问2详解】

证明: 过点 A 分别作 $AP \perp CF$ 与点 P, $AQ \perp BE$ 于点 Q,



$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFC,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AFC},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AP \cdot CF = \frac{1}{2} AQ \cdot BE,$$

而 $CF = BE$,

$$\therefore AP = AQ,$$

$\therefore AO$ 为 $\angle EOF$ 的角平分线.

24. 材料阅读: 韦达定理: 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数解, 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$ 的两个实数根,

(1) 请用含 k 的代数式表示 $x_1 + x_2 =$ _____; $x_1^2 + x_2^2 =$ _____

(2) 是否存在实数 k , 使 $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$ 成立? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 请您说明理由

由;

(3) 直接写出使 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ 的值为整数的实数 k 的整数值.

【答案】 24. 3; 13

25. 不存在, 理由见解析

26. $k = -2$ 或 -3 或 -5 .

【解析】

【分析】(1) 根据根与系数的关系可得 $x_1 + x_2 = -\frac{-4k}{4k} = 1, x_1 \cdot x_2 = \frac{k+1}{4k}$, 再运用完全平方公式变形即可解答;

(2) 根据根与系数的关系可得 $\Delta = (-4k)^2 - 4 \cdot 4k(k+1) > 0$, 然后根据根与系数的关系、整式的混合运算即可解答;

(3) 结合 (1) 并结合分式的加减运算、完全平方公式可得 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{2(k-1)}{k+1} = \frac{2(k+1)-4}{k+1} = 2 - \frac{4}{k+1}$, 再根据 $\frac{2(k-1)}{k+1}$ 为整数, 可得 $k+1 = \pm 1$ 或 ± 2 或 ± 4 , 最后结合 $k < 0$ 即可解答.

【小问 1 详解】

解: $\because 4kx^2 - 4kx + k + 1 = 0$,

$\therefore \Delta = (-4k)^2 - 4 \cdot 4k(k+1) > 0$, 解得: $k < 0$,

$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{-4k}{4k} = 1, x_1 \cdot x_2 = \frac{k+1}{4k}$

$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1^2 - 2 \times \frac{k+1}{4k} = \frac{k-1}{2k}$.

故答案为: $1, \frac{k-1}{2k}$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 方程有两个实数根,

$\therefore \Delta = (-4k)^2 - 4 \cdot 4k(k+1) > 0$

$\therefore k < 0, x_1 + x_2 = 1, x_1 \cdot x_2 = \frac{k+1}{4k}$

$\therefore (2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 2x_2^2 = 2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 9x_1x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 9x_1x_2$

$\therefore 2 - 9 \cdot \frac{k+1}{4k} = -\frac{3}{2}$,

解得: $k = \frac{9}{5}$ 与 $k < 0$ 矛盾

$\therefore$ 不存在 k 的值, 使 $(2x_1 - x_2)(x_1 - 2x_2) = -\frac{3}{2}$ 成立.

【小问3详解】

解: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

$$= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{k-1}{\frac{2k}{k+1}}$$

$$= \frac{2(k-1)}{k+1}$$

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{2(k-1)}{k+1} = \frac{2(k+1)-4}{k+1} = 2 - \frac{4}{k+1} \text{ 的值为整数}$$

$$\therefore k+1 = \pm 1 \text{ 或 } \pm 2 \text{ 或 } \pm 4,$$

$$\text{又} \because k < 0,$$

$$\therefore k = -2 \text{ 或 } -3 \text{ 或 } -5.$$

【点睛】 本题主要考查了根与系数的关系、完全平方公式、根的判别式、分式的混合运算等知识点, 灵活运用相关知识成为解答本题的关键.

25. 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 120^\circ$, $\angle C = 20^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D .

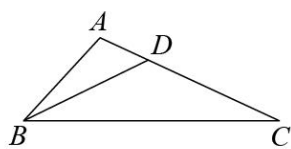


图1

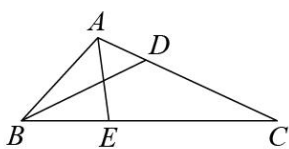


图2

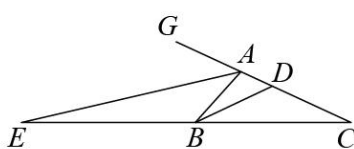


图3

(1) 求证: $BD = CD$.

(2) 如图2, 若 $\angle BAC$ 的角平分线 AE 交 BC 于点 E , 求证: $AB + BE = AC$.

(3) 如图3, 若 $\angle BAC$ 的外角平分线 AE 交 CB 的延长线于点 E , 则 (2) 中的结论是否成立? 若成立, 给出证明, 若不成立, 写出正确的结论.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

(3) 不成立, 正确的结论是 $BE - AB = AC$, 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据三角形内角和可得 $\angle ABC = 40^\circ$ ，利用角平分线得出 $\angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 20^\circ$ ，由等角对等边即可证明；

(2) 过点 E 作 $EF \parallel BD$ 交 AC 于点 F ，根据平行线的性质可得 $\angle FEC = \angle DBC = 20^\circ$ ，由等量代换、外角的性质及等角对等边可得 $\angle AFE = 40^\circ$ ， $FE = FC$ ，依据全等三角形的判定和性质可得 $\triangle ABE \cong \triangle AFE$ ， $BE = EF$ ， $AB = AF$ ，结合图形，由线段间的数量关系进行等量代换即可证明；

(3) (2) 中的结论不成立，正确的结论是 $BE - AB = AC$ ．过点 A 作 $AF \parallel BD$ 交 BE 于点 F ，由平行线的性质及等量代换可得 $\angle AFC = \angle C = 20^\circ$ ，根据等角对等边得出 $AF = AC$ ，由角平分线可得 $\angle EAB = 30^\circ$ ，结合图形根据各角之间的数量关系得出 $\angle E = \angle FAE = 10^\circ$ ，由等角对等边可得 $FE = AF$ ，结合图形进行线段间的等量代换即可得出结果．

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle A = 120^\circ$ ， $\angle C = 20^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ - 20^\circ = 40^\circ，$$

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

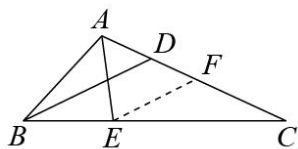
$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 20^\circ，$$

$$\therefore \angle DBC = \angle C = 20^\circ，$$

$$\therefore BD = CD；$$

【小问 2 详解】

证明：如图：过点 E 作 $EF \parallel BD$ 交 AC 于点 F ，



$$\therefore \angle FEC = \angle DBC = 20^\circ，$$

$$\therefore \angle FEC = \angle C = 20^\circ，$$

$$\therefore \angle AFE = 40^\circ，FE = FC，$$

$$\therefore \angle AFE = \angle ABC，$$

$\because AE$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$$\therefore \angle BAE = \angle FAE，$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AFE$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle FAE \\ \angle ABE = \angle AFE， \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFE,$$

$$\therefore BE = EF, \quad AB = AF,$$

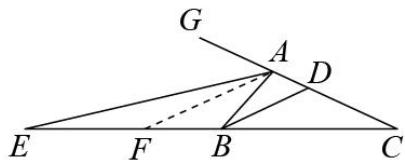
$$\therefore BE = EF = FC,$$

$$\therefore AB + BE = AF + FC = AC;$$

【小问3 详解】

解：(2) 中的结论不成立，正确的结论是 $BE - AB = AC$. 理由如下：

如图，过点 A 作 $AF \parallel BD$ 交 BE 于点 F ,



$$\therefore \angle AFC = \angle DBC = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle AFC = \angle C = 20^\circ,$$

$$\therefore AF = AC,$$

$\because AE$ 是 $\angle BAC$ 的外角平分线,

$$\therefore \angle EAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 30^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle ABC - \angle EAB = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle FAE = 10^\circ,$$

$$\therefore FE = AF,$$

$$\therefore FE = AF = AC,$$

$$\therefore BE - AB = BE - BF = EF = AC.$$

【点睛】题目主要考查等腰三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，利用角平分线进行角度的计算，平行线的性质，三角形内角和定理等，理解题意，作出相应辅助线，综合运用这些知识点是解题关键.