

2023 学年度第一学期第一次学生学习状态调研

八年级数学试卷

(满分 100 分, 时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每小题 2 分, 满分 12 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 请选择正确项的代号并填在答题纸的相应位置上】

1. 式子 $\sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}}$ 成立的条件是 ()

- A. $x \geq 3$ B. $x \leq 1$ C. $1 \leq x \leq 3$ D. $1 < x \leq 3$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式的意义和分母不为零的条件, 列不等式组求解.

【详解】解: 由二次根式的意义可知 $x-1 > 0$, 且 $3-x \geq 0$,

解得 $1 < x \leq 3$.

故选: D.

【点睛】注意: 根号里的数必须为非负数且分母不能为 0.

2. 下列各式中与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{8}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据同类二次根式的定义“化简后被开方数相同的二次根式是同类二次根式”逐项判断即可求解.

【详解】解: A. $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 故本选项不符合题意;

B. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 故本选项符合题意;

C. $\sqrt{10}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 故本选项不符合题意;

D. $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 故本选项不符合题意.

故选: B.

【点睛】本题考查了同类二次根式的定义以及二次根式的化简, 熟知同类二次根式的定义是解题关键.

3. 若 $\sqrt{m^2} = -m$, 则实数 m 在数轴上的对应点一定在 ()

- A. 原点左侧 B. 原点右侧 C. 原点或原点左侧 D. 原点或原点右侧

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据二次根式、算术平方根和绝对值的意义可知 $m \leq 0$ ，从而可判断出实数 a 在数轴上的对应点位置.

【详解】 $\because \sqrt{m^2} = -m$

$\therefore m \leq 0$,

$\therefore m$ 在原点或原点左侧.

故选: C.

【点睛】 本题考查了二次根式、算术平方根的意义和绝对值的意义及实数与数轴的关系, 根据绝对值的意义求出 $a \leq 0$ 是解答本题的关键.

4. 若 $a - b + c = 0$, 则关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有一根是 ()

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 无法判断

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解, 根据 $ax^2 + bx + c = 0$, 若 $a - b + c = 0$, 可判断当 $x = -1$ 时满足条件, 于是判断出方程的根. 解题的关键是掌握一元二次方程的解的概念.

【详解】 解: $\because ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若 $a - b + c = 0$,

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $a - b + c = 0$,

$\therefore$ 此方程必有一个根为 -1.

故选: B.

5. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + x + k^2 + 2k - 3 = 0$ 有一个根为 0, 那么 k 的值只能是 ()

- A. 1 B. 1, -3 C. -3 D. 以上都不对

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的定义, 一元二次方程的解, 把 $x = 0$ 代入原方程, 求出 k 的值, 再根据一元二次方程的定义得出 $k - 1 \neq 0$, 即可解答.

【详解】 解: 把 $x = 0$ 代入得: $k^2 + 2k - 3 = 0$,

解得: $k_1=1, k_2=-3$,

$\therefore (k-1)x^2+x+k^2+2k-3=0$ 是一元二次方程,

$\therefore k-1 \neq 0$,

解得: $k \neq 1$,

$\therefore k=-3$,

故选: C.

6. 把 $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 根号外的因式移入根号内的结果是 ()

A. $\sqrt{-a}$

B. $-\sqrt{-a}$

C. $\sqrt{a}$

D. $-\sqrt{a}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据被开方数不为负数可得出 $a < 0$, 首先将 a 的负号移出, 再将 a 移入根号内进行计算即可.

【详解】 解: $\because -\frac{1}{a} \geq 0, a \neq 0$,

$\therefore a < 0$,

$$\therefore a\sqrt{-\frac{1}{a}} = -\sqrt{a^2 \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} = -\sqrt{-a},$$

故选: B.

【点睛】 本题主要考查了二次根式有意义的条件, 二次根式的乘法, 熟练掌握二次根式的有意义的条件: 被开方数不为负数, 是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每小题 3 分, 满分 36 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 在 $\sqrt{a^2-b^2}$ 、 $\frac{x}{\sqrt{3}}$ 、 $\sqrt{\frac{y}{5}}$ 、 $\sqrt{8}$ 中最简二次根式是_____.

【答案】 $\sqrt{a^2-b^2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了最简二次根式, 最简二次根式的特征: (1) 被开方数不含分母; (2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式. 我们把满足上述两个条件的二次根式, 叫做最简二次根式. 据此即可解答.

【详解】 解: $\sqrt{a^2-b^2}$ 是最简二次根式, 符合题意;

$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}x}{3}$ ，不是最简二次根式，不符合题意；

$\sqrt{\frac{y}{5}} = \frac{\sqrt{5y}}{5}$ ，不是最简二次根式，不符合题意；

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，不是最简二次根式，不符合题意；

综上：最简二次根式有 $\sqrt{a^2 - b^2}$ ，

故答案为： $\sqrt{a^2 - b^2}$ 。

8. $\sqrt{x+y}$ 的有理化因式为_____。

【答案】 $\sqrt{x+y}$

【解析】

【详解】 $\sqrt{x+y}$ 的有理化因式是： $\sqrt{x+y}$ 。

故答案为 $\sqrt{x+y}$ 。

9. 计算： $\sqrt{2} \div \sqrt{12} =$ _____。

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】

【分析】 直接利用二次根式的除法运算即可。

【详解】 解： $\sqrt{2} \div \sqrt{12} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，

故答案为： $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 。

【点睛】 本题考查了二次根式的除法，解题的关键是掌握二次根式的除法运算法则。

10. 有理化分母： $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$ _____。

【答案】 $5 + 2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简，依题意，把 $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ 的分子、分母同时乘 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ 即可。关键在根式

分母的有理化.

【详解】由题知: $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$= \frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}$$
$$= 5+2\sqrt{6}.$$

故答案为: $5+2\sqrt{6}$.

11. 方程 $\sqrt{5}x^2 = x-2$ 的二次项系数是_____；一次项是_____.

【答案】 ①. $\sqrt{5}$ ②. $-x$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的相关定义，根据“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 中， a 是二次项系数， bx 是一次项系数， c 是常数项”即可解答.

【详解】解: $\sqrt{5}x^2 = x-2$ 整理为: $\sqrt{5}x^2 - x + 2 = 0$,

$\therefore$ 二次项系数为 $\sqrt{5}$, 一次项为 $-x$,

故答案为: $\sqrt{5}$, $-x$.

12. 方程 $3x=x^2$ 的根是_____.

【答案】 $x_1=0$, $x_2=3$

【解析】

【分析】先移项，再将左边利用提公因式法因式分解，继而可得两个关于 x 的一元一次方程，分别求解即可得出答案.

【详解】解: $\because 3x=x^2$,

$$\therefore x^2-3x=0,$$

$$\text{则 } x(x-3)=0,$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

解得 $x_1=0$, $x_2=3$.

【点睛】 本题主要考查解一元二次方程的能力，熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法：直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法，结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键.

13. 方程 $(x+1)(x-2)=3$ 化成一般式是_____.

【答案】 $x^2 - x - 5 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的一般形式，即 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 是常数且 $a \neq 0$). 将方程左边展开，通过移项、合并同类项化为 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 是常数且 $a \neq 0$) 的形式即可. 解题的关键是掌握一元二次方程的一般形式.

【详解】 $(x+1)(x-2)=3$

$$x^2 - 2x + x - 2 - 3 = 0$$

$$x^2 - x - 5 = 0.$$

故答案为: $x^2 - x - 5 = 0$.

14. 写出一个一元二次方程，使得它的两个根分别是 3 和 -4，_____

【答案】 $x^2 + x - 12 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查方程的根，因式分解法解一元二次方程等知识，根据题意得到 $(x-3)(x+4)=0$ ，解题的关键是掌握因式分解法解一元二次方程.

【详解】 $\because$ 一个一元二次方程的两个根分别是 3 和 -4，

$$\therefore (x-3)(x+4)=0$$

整理得， $x^2 + x - 12 = 0$.

故答案为: $x^2 + x - 12 = 0$.

15. 已知 $1 \leq a \leq 2$ ，化简 $\sqrt{a^2 - 2a + 1} + |a - 2| =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 由 $1 \leq a \leq 2$ 可得 $a-1 \geq 0, a-2 \leq 0$ ，再化简二次根式与绝对值，最后合并即可.

【详解】 解: $\because 1 \leq a \leq 2$,

$$\setminus a-1 \geq 0, a-2 \leq 0,$$

$$\therefore \sqrt{a^2-2a+1}+|a-2|$$

$$=|a-1|+|a-2|$$

$$=a-1-(a-2)=a-1-a+2=1$$

故答案为：1

【点睛】本题考查的是二次根式的化简，绝对值的化简，掌握“ $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ ”是解本题的关键.

16. 配上适当的数，使下列等式成立： $x^2-3x+\underline{\hspace{2cm}}=(x-\underline{\hspace{2cm}})^2$

【答案】 ①. $\frac{9}{4}$ ②. $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】此题考查了完全平方公式的形式，根据完全平方公式的形式求解即可．解题的关键是熟练掌握完全平方公式的形式．完全平方公式： $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ．

【详解】解： $\because x^2-3x+\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ ，

故答案为： $\frac{9}{4}$ ； $\frac{3}{2}$ ．

17. 若方程 $(m-2)x^{m^2-2}+(3-m)x-2=0$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m 的值是_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义：只含有一个未知数，并且未知数的最高指数是2的整式方程，且二次项系数不等于0，即可进行求解，

【详解】由题意得： $\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m^2-2=2 \end{cases}$

解得： $m=-2$ ．

故答案为：-2

【点睛】本题主要考查一元二次方程的定义，解决本题的关键是要熟练掌握一元二次方程的定义．

18. 若等腰三角形的两条边分别长 $3\sqrt{2}$ ， $5\sqrt{3}$ ，则此三角形周长为_____.

【答案】 $10\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ 或 $3\sqrt{2}+10\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查等腰三角形的性质、三角形的三边关系及二次根式的运算，根据题意可分两种情况进行求解，即当腰长为 $3\sqrt{2}$ ，底边为 $5\sqrt{3}$ 和当腰长为 $5\sqrt{3}$ ，底边长为 $3\sqrt{2}$ ，然后再根据三角形的三边关系再进一步判断求解即可．熟练掌握等腰三角形的性质、三角形的三边关系及二次根式的运算是解题的关键．

【详解】 解：由题意得：

①当腰长为 $3\sqrt{2}$ ，底边为 $5\sqrt{3}$ 时，

$$\because 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = \sqrt{72}, \quad 5\sqrt{3} = \sqrt{75}$$

$$\because \sqrt{72} < \sqrt{75}$$

$$\therefore 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} < 5\sqrt{3},$$

$\therefore$ 围不成三角形，不符合题意，

②当腰长为 $5\sqrt{3}$ ，底边长为 $3\sqrt{2}$ 时，

$$\because 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3} > 3\sqrt{2}, \quad \text{符合题意，}$$

$$\therefore \text{此三角形周长为 } 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{3} + 3\sqrt{2}.$$

综上所述：这个三角形的周长为 $10\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ ．

故答案为： $10\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ ．

三、简答题（本大题共 10 题，每小题 4 分，满分 40 分）

19. 计算： $4\sqrt{5} + \sqrt{45} - \sqrt{8} + 4\sqrt{2}$ ．

【答案】 $7\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，二次根式的加减法运算，先化为最简二次根式，再合并同类二次根式即可．掌握二次根式的混合运算是解题的关键．

【详解】 $4\sqrt{5} + \sqrt{45} - \sqrt{8} + 4\sqrt{2}$

$$= 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$$

$$= 7\sqrt{5} + 2\sqrt{2}.$$

20. 计算: $3\sqrt{18} \times \frac{\sqrt{3}}{6} \div 2\sqrt{6}$.

【答案】 $\frac{3}{4}$.

【解析】

【分析】 根据二次根式的乘除运算法则计算即可.

【详解】 解: 原式 = $(3 \times \frac{1}{6} \div 2) \sqrt{18 \times 3 \div 6}$
 $= \frac{1}{4} \sqrt{9}$
 $= \frac{3}{4}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的乘除混合运算, 熟练掌握二次根式的乘除运算法则是解题的关键.

21. 计算: $\frac{1}{3-\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{7}-2}$

【答案】 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$

【解析】

【分析】 此题考查了二次根式的混合运算, 首先分母有理化, 然后化简合并同类二次根式求解即可. 解题的关键是熟练掌握二次根式的混合运算法则.

【详解】 $\frac{1}{3-\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{7}-2}$
 $= \frac{3+\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} - \frac{3(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}$
 $= \frac{3+\sqrt{7}}{9-7} - \frac{3\sqrt{7}+6}{7-4}$
 $= \frac{3+\sqrt{7}}{2} - \frac{3\sqrt{7}+6}{3}$
 $= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} - \sqrt{7} - 2$
 $= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}$.

22. $(6\sqrt{\frac{x}{4}} - 2x\sqrt{\frac{1}{x}}) \div 3\sqrt{x}$

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 先化简各二次根式，再计算即可.

【详解】 解：原式 $= (3\sqrt{x} - 2\sqrt{x}) \div 3\sqrt{x} = \sqrt{x} \div 3\sqrt{x} = \frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的运算法则是解答本题的关键. 在二次根式的混合运算中，如能结合题目特点，灵活运用二次根式的性质，选择恰当的解题途径，往往能事半功倍. 整式的乘法的运算公式及运算法则对二次根式的运算同样适应.

23. 计算： $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

【答案】 $2\sqrt{a}-2\sqrt{b}$

【解析】

【分析】 本题考查分式的混合运算，分母不变，分子利用完全平方公式和平方差公式变形，然后化简求解即可. 解题的关键是将分子利用完全平方公式和平方差公式变形.

【详解】
$$\begin{aligned} & \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\ &= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\ &= \sqrt{a}-\sqrt{b} + \sqrt{a}-\sqrt{b} \\ &= 2\sqrt{a}-2\sqrt{b}. \end{aligned}$$

24. 解不等式： $(1-\sqrt{3})x < 4$.

【答案】 $x > -2-2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式，分母有理化，根据不等式的性质求解，再进行分母有理化即可.

【详解】 解： $(1-\sqrt{3})x < 4$,

$x > \frac{4}{1-\sqrt{3}},$

$$x > \frac{4(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})},$$

$$x > -2 - 2\sqrt{3}.$$

25. 解方程: $(2x-1)^2 - 9 = 0$.

【答案】 $x_1 = 2, x_2 = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法，利用直接开方法解一元二次方程即可；解题的关键是掌握一元二次方程的解法：直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法等.

【详解】 $(2x-1)^2 - 9 = 0$

$$(2x-1)^2 = 9$$

$$\therefore 2x-1 = \pm 3$$

解得 $x_1 = 2, x_2 = -1$.

26. 解方程: $x^2 - 5 = 4x$.

【答案】 $x_1=5, x_2=-1$

【解析】

【分析】 利用因式分解法解方程即可.

【详解】 解: $x^2-5=4x$;

原方程变形得: $x^2-4x-5=0$,

因式分解得: $(x-5)(x+1)=0$,

得: $x-5=0$, 或 $x+1=0$,

$$\therefore x_1=5, x_2=-1.$$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程，解题的关键是掌握因式分解法.

27. 用配方法解方程: $4x^2 - 2x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

【解析】

【分析】 先把常数项移到等号右边，将二次项系数化为 1，得到 $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$ ，方程两边同时加上一项系

数一半的平方 $\frac{1}{16}$ ，配成完全平方式，得到 $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$ ，直接开平方后即可求解.

【详解】解： $4x^2 - 2x - 1 = 0$

移项，得： $4x^2 - 2x = 1$ ，

系数化为 1，得： $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$ ，

配方，得： $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ ，

即 $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16}$ ，

开方，得： $x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$ ，

解得： $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ ， $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$.

【点睛】 本题考查了配方法解一元二次方程，熟练掌握用配方法解一元二次方程的步骤是解题的关键.

28. 解方程： $y^2 - 2\sqrt{3}y - 4 = 0$.

【答案】 $y_1 = \sqrt{3} + \sqrt{7}$ ， $y_2 = \sqrt{3} - \sqrt{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解法，首先把常数项移到右边，方程两边同时加上一项系数一半的平方配成完全平方公式，然后开方求解即可；解题的关键是掌握配方法解一元二次方程的步骤：（1）把常数项移到等号的右边；（2）把二次项的系数化为 1；（3）等式两边同时加上一项系数一半的平方.

【详解】解： $y^2 - 2\sqrt{3}y - 4 = 0$ ，

$y^2 - 2\sqrt{3}y = 4$ ，

$y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 7$ ，

$\left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 7$ ，

$\therefore y - \sqrt{3} = \pm\sqrt{7}$ ，

解得 $y_1 = \sqrt{3} + \sqrt{7}$ ， $y_2 = \sqrt{3} - \sqrt{7}$.

四、解答题（本大题共 2 题，每小题 6 分，满分 12 分）

29. 已知 $x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}$ 求 $x^2 + xy + y^2$ 的值

【答案】 35

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的化简求值和整式的混合运算，首先利用分母有理化求出 x 和 y 的值，然后求出 $x + y = 6$, $xy = 1$ ，然后将 $x^2 + xy + y^2$ 利用完全平方公式变形为 $(x + y)^2 - xy$ ，然后代入求解即可。熟练掌握完全平方公式是解题的关键。

$$\text{【详解】 } \because x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 3+2\sqrt{2},$$

$$y = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 3-2\sqrt{2},$$

$$\therefore x + y = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6, \quad xy = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1,$$

$$\therefore x^2 + xy + y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - xy$$

$$= (x + y)^2 - xy$$

$$= 6^2 - 1$$

$$= 35.$$

30. 观察下列等式

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{1}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{1}+\sqrt{2};$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}+\sqrt{3};$$

$$\sqrt{7+2\sqrt{12}} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2} = \sqrt{3}+\sqrt{4};$$

.....

请你直接写出以下计算结果:

(1) 请你猜测 $\sqrt{13+2\sqrt{42}} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\sqrt{21+2\sqrt{110}} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 针对上述各式显示的规律, 请你猜测

$$\sqrt{(2n-1)+2\sqrt{n^2-n}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (n \geq 2, \quad n \text{ 为整数});$$

(3) 利用上述规律计算:

$$\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)+2\sqrt{n^2-n}}} = \text{———} \quad (n \geq 2, n \text{ 为整数}).$$

【答案】(1) $\sqrt{6} + \sqrt{7}$, $\sqrt{10} + \sqrt{11}$

(2) $\sqrt{n-1} + \sqrt{n}$

(3) $-1 + \sqrt{n}$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的混合运算，平方差公式，分母有理化，熟练掌握相分母有理化的方法和步骤是解题的关键.

(1) 根据题目所给的运算方法进行计算即可；

(2) 根据题目所给的运算方法进行计算即可；

(3) 根据 (1) (2) 的运算结果，将算式化简，根据平方差公式将分母有理化，再进行计算即可.

【小问 1 详解】

解：根据题意可得：

$$\sqrt{13+2\sqrt{42}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{7})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{7},$$

$$\sqrt{21+2\sqrt{110}} = \sqrt{(\sqrt{10} + \sqrt{11})^2} = \sqrt{10} + \sqrt{11},$$

故答案为： $\sqrt{6} + \sqrt{7}$, $\sqrt{10} + \sqrt{11}$.

【小问 2 详解】

$$\text{解：} \sqrt{(2n-1)+2\sqrt{n^2-n}} = \sqrt{(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})^2} = \sqrt{n-1} + \sqrt{n},$$

故答案为： $\sqrt{n-1} + \sqrt{n}$.

【小问 3 详解】

解：根据题意可得：

$$\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}} + \frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)+2\sqrt{n^2-n}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

$$= -(\sqrt{1} - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - \sqrt{4}) - \cdots - (\sqrt{n-1} - \sqrt{n})$$

$$= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \cdots - \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

$$=-1+\sqrt{n},$$

故答案为: $-1+\sqrt{n}$.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>) 致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群出品的《老师请开讲》私享直播课等增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>) 是学科网旗下智能题库，拥有小初高全学科超千万精品试题，提供智能组卷、拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能