

2023 学年第一学期八年级数学学科期中考试试卷

(满分 150, 时间: 100 分钟)

一、选择题 (每题 4 分, 共 24 分)

1. 下列二次根式中最简二次根式为 ()

- A. $\sqrt{0.3x}$ B. $\sqrt{\frac{2}{x}}$ C. $\sqrt{x^3y}$ D. $\sqrt{x^2-1}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用最简二次根式的定义判断即可得到正确的选项.

【详解】解: A、 $\sqrt{0.3x}$ 可化为 $\frac{\sqrt{30x}}{10}$, 不是最简二次根式, 故本选项错误;

B、 $\sqrt{\frac{2}{x}}$ 可化为 $\frac{\sqrt{2x}}{x}$, 不是最简二次根式, 故本选项错误;

C、 $\sqrt{x^3y}$ 可化为 $|x|\sqrt{xy}$, 不是最简二次根式, 故本选项错误;

D、 $\sqrt{x^2-1}$ 是最简二次根式, 故本选项正确;

故选: D.

【点睛】此题考查了最简二次根式以及二次根式的化简, 熟练掌握最简二次根式的判断方法是解答本题的关键.

2. 在下列各组二次根式中, 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{8}}$ B. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{12}}$ C. $\sqrt{2ab}$ 和 $\sqrt{ab^3}$ D. $\sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a+1}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是同类二次根式的概念、二次根式的化简. 根据二次根式的性质化简, 根据“把几个二次根式化为最简二次根式后, 如果它们的被开方数相同, 就把这几个二次根式叫做同类二次根式”, 判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 是同类二次根式, 故本选项符合题意;

B、 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 不是同类二次根式, 故本选项不符合题意;

C、 $\sqrt{2ab}$ 和 $\sqrt{ab^3} = |b|\sqrt{ab}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

D、 $\sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a+1}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

故选：A

3. 下列函数中，y 随着 x 的增大而减小的是（ ）

A. $y=3x$

B. $y=-3x$

C. $y=\frac{3}{x}$

D. $y=-\frac{3}{x}$

【答案】B

【解析】

【详解】试题分析：A、 $y=3x$ ，y 随着 x 的增大而增大，故此选项错误；

B、 $y=-3x$ ，y 随着 x 的增大而减小，正确；

C、 $y=\frac{3}{x}$ ，每个象限内，y 随着 x 的增大而减小，故此选项错误；

D、 $y=-\frac{3}{x}$ ，每个象限内，y 随着 x 的增大而增大，故此选项错误；

故选 B.

考点：反比例函数的性质；正比例函数的性质.

4. 某厂今年十月份的总产量为 500 吨，十二月份的总产量达到 720 吨. 若平均每月增长率是 x，则可以列出方程（ ）

A. $500(1+2x)=720$

B. $500(1+x)^2=720$

C. $500(1+x^2)=720$

D. $720(1-x)^2=500$

【答案】B

【解析】

【分析】根据经过两个月的增长，产量从 500 吨增长到 720 吨列方程即可.

【详解】解：设平均每月的增率是 x，

由题意得： $500(1+x)^2=720$ ；

故选：B.

【点睛】本题考查求平均变化率的方法. 若设变化前的量为 a，变化后的量为 b，平均变化率为 x，则经过两次变化后的数量关系为 $a(1\pm x)^2=b$ （当增长时中间的“±”号选“+”，当降低时中间的“±”号选“-”）.

5. 下列条件中，不能判定两个直角三角形全等的是（ ）

A. 两直角边对应相等

B. 斜边和一条直角边对应相等

C. 两锐角对应相等

D. 一个锐角和斜边对应相等

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定和性质、解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定和性质，属于基础题.

根据全等三角形的判定方法即可判断.

【详解】解：A 正确. 根据 SAS 即可判断.

B 正确. 根据 HL 即可判断.

C 错误. 两锐角对应相等不能判断两个三角形全等.

D 正确. 根据 AAS 即可判断.

故选：C.

6. 下列说法错误的有 ()

- ①. 在一个角的内部 (包括顶点) 到角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线
- ②. 到点 P 距离等于 1cm 的点的轨迹是以点 P 为圆心, 半径长为 1cm 的圆
- ③. 到直线 l 距离等于 2cm 的点的轨迹是两条平行于 l 且与 l 的距离等于 2cm 的直线
- ④. 等腰三角形 ABC 的底边 BC 固定, 顶点 A 的轨迹是线段 BC 的垂直平分线.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】A

【解析】

【分析】根据角平分线的性质、圆的轨迹、平行线和等腰三角形的性质结合图形进行解答即可.

【详解】解：①. 在一个角的内部 (包括顶点) 到角的两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线, 故该选项正确,

②. 到点 P 距离等于 1cm 的点的轨迹是以点 P 为圆心, 半径长为 1cm 的圆, 故该选项正确,

③. 到直线 l 距离等于 2cm 的点的轨迹是两条平行于 l 且与 l 的距离等于 2cm 的直线, 故该选项正确;

④. 等腰三角形 ABC 的底边 BC 固定, 顶点 A 的轨迹是线段 BC 的垂直平分线 (BC 的中点除外), 故该选项错误,

故选 A.

【点睛】本题考查的是点的轨迹, 掌握角平分线的性质、圆的轨迹、平行线和线段垂直平分线的性质是解题的关键.

二、填空题 (每题 4 分, 共 48 分)

7. 计算: $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{5}-2$

【解析】

【分析】 本题考查的是二次根式的化简，掌握 $\sqrt{a^2} = |a|$ 是解本题的关键，本题判断 $2-\sqrt{5} < 0$ ，再化简即可.

【详解】 解： $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$,

故答案为： $\sqrt{5}-2$

8. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是

_____.

【答案】 $k < 1$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义和根的判别式列不等式组求解即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4k > 0$ 且 $k \neq 0$,

解得 $k < 1$ 且 $k \neq 0$.

故答案为： $k < 1$ 且 $k \neq 0$.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的定义、一元二次方程根的判别式等知识点，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 (a \neq 0)$ ，若 $\Delta = b^2-4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根是解答本题的关键.

9. 在实数范围内分解因式： $x^2-3xy-2y^2 =$ _____.

【答案】 $\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}y\right)$

【解析】

【分析】 本题考查的是在实数范围内分解因式，一元二次方程的解法，本题令 $x^2-3xy-2y^2=0$ ，用含 y 的代数式表示 x ，再分解因式即可.

【详解】 解： 令 $x^2-3xy-2y^2=0$,

$\therefore \Delta = (-3y)^2 - 4 \times 1 \times (-2y^2) = 9y^2 + 8y^2 = 17y^2$,

$\therefore x = \frac{3y \pm \sqrt{17}y}{2}$,

解得: $x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}y$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}y$,

$$\therefore x^2 - 3xy - 2y^2 = \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}y\right);$$

故答案为: $\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2}y\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}y\right)$.

10. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{-2x+5}}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x < \frac{5}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查求函数自变量的范围, 根据二次根式被开方数大于等于 0, 分母不等于 0, 列不等式求解即可.

【详解】 解: 依题意, $-2x+5 > 0$

解得: $x < \frac{5}{2}$,

故答案为: $x < \frac{5}{2}$.

11. 已知反比例函数 $y = \frac{3m-1}{x}$ 的图像在第二、四象限, 那么常数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数图象的性质, 在 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中, 当 $k > 0$ 时, 函数的图象在一、三象限, 当 $k < 0$ 时, 反比例函数的图象在二、四象限, 掌握反比例函数图象的性质是解题的关键. 根据反比例函数图象的性质得出 $3m-1 < 0$, 解不等式即可求解.

【详解】 解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{3m-1}{x}$ 的图像在第二、四象限,

$$\therefore 3m-1 < 0,$$

解得: $m < \frac{1}{3}$,

故答案为: $m < \frac{1}{3}$.

12. 等腰三角形的周长为 61 厘米, 腰长为 x 厘米, 底边长为 y 厘米, 其中 x 的取值范围是_____.

【答案】 $\frac{61}{4} < x < \frac{61}{2}$

【解析】

【分析】根据三角形的周长公式结合等腰三角形的周长为61厘米，即可得出底边长 y 关于腰长 x 的函数解析式，再由三角形的三边关系即可得出关于 x 的一元一次不等式组，解不等式组即可得出 x 的取值范围.

【详解】解：依题意， $y = 61 - 2x$

$$\text{根据三边关系可得} \begin{cases} x > 0 \\ 2x > 61 - 2x \\ 61 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \frac{61}{4} < x < \frac{61}{2}$$

$$\text{故答案为：} \frac{61}{4} < x < \frac{61}{2}.$$

13. 已知 y 与 $3x-1$ 成正比例，当 $x=2.8$ 时， $y=5$ ，那么 y 与 x 函数解析式为_____.

$$\text{【答案】 } y = \frac{75}{37}x - \frac{25}{37}$$

【解析】

【分析】此题考查了待定系数法求一次函数解析式；设出关系式 $y = k(3x-1)$ ，将 $x=2.8$ ， $y=5$ 代入求出 k 的值，即可确定出解析式，即可求解.

【详解】解：依题意，设 $y = k(3x-1)$ ，将 $x=2.8$ ， $y=5$ 代入

$$5 = k(3 \times 2.8 - 1),$$

$$\text{解得：} k = \frac{25}{37}$$

$$\therefore y = \frac{25}{37}(3x-1) = \frac{75}{37}x - \frac{25}{37}$$

$$\text{故答案为：} y = \frac{75}{37}x - \frac{25}{37}.$$

14. 已知点 P 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 上，过点 P 向 y 轴作垂线，垂足为 M . 如果 $S_{\triangle PMO} = \sqrt{11}$ ，那么 $k =$ _____.

$$\text{【答案】 } \pm 2\sqrt{11}$$

【解析】

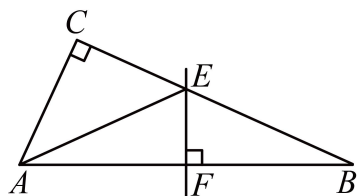
【分析】本题考查反比例函数系数 k 的几何意义，根据反比例函数的 k 的几何意义即可直接求解.

【详解】当 P 在第一象限或第三象限时， $k = 2 \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$,

当 P 在第二象限或第四象限时， $k = -2 \times \sqrt{11} = -2\sqrt{11}$.

故答案是: $\pm 2\sqrt{11}$.

15. 如图,在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AB 的垂直平分线 EF 分别交 BC 、 AB 于点 E 、 F , $\angle AEF = 65^\circ$, 那么 $\angle CAE =$ _____.



【答案】 40°

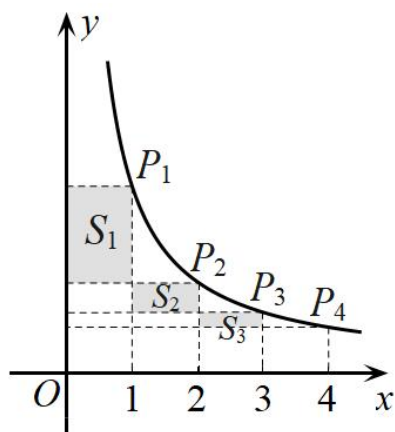
【解析】

【分析】 根据垂直平分线的性质和三角形内角和的性质进行计算, 即可得到答案.

【详解】因为 AB 的垂直平分线 EF 分别交 BC 、 AB 于点 E 、 F , 所以三角形 AEB 是等腰三角形, $\angle EAF = \angle EBF$, $\angle EFA = \angle EFB$; 又因为 $\angle AEF = 65^\circ$, 所以 $\angle EAF = 180^\circ - \angle EFA - \angle AEF = 25^\circ$; 因为 $\angle EAF = \angle EBF$, 所以 $\angle EAF = \angle EBF = 25^\circ$. 所以 $\angle CAE = 90^\circ - \angle EAF - \angle EBF = 40^\circ$.

【点睛】 本题考查垂直平分线的性质和三角形内角和的性质, 解题的关键是掌握垂直平分线的性质和三角形内角和的性质.

16. 如图, 在反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图象上, 有点 P_1, P_2, P_3, P_4 它们的横坐标依次为 1, 2, 3, 4. 分别过这些点作 x 轴与 y 轴 $y = \frac{2}{x}$ 的垂线, 图中所构成的阴影部分的面积从左到右依次为 S_1, S_2, S_3 , 则 $S_1 + S_2 + S_3 =$ _____.



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据反比例函数的几何意义, 可知图中所构成的阴影部分的总面积正好是从点 P_1 向 x 轴、 y 轴引垂线构成的长方形面积减去最下方的长方形的面积, 据此作答.

【详解】解：∵反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 的图象上，有点 P_1, P_2, P_3, P_4 它们的横坐标依次为 1, 2, 3, 4.

∴可得点 P_1, P_2, P_3, P_4 坐标分别为：(1, 2), (2, 1), $(3, \frac{2}{3})$, $(4, \frac{1}{2})$.

$$\therefore S_1 = 1 \times (2 - 1) = 1,$$

$$S_2 = 1 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

$$S_3 = 1 \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6},$$

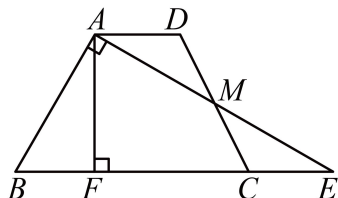
$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}.$$

故答案为： $\frac{3}{2}$.

【点睛】本题主要考查了反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义，即过双曲线上任意一点引 x 轴、 y 轴垂线，所

得矩形面积为 $|k|$ ，是经常考查的一个知识点；这里体现了数形结合的思想，做此类题一定要正确理解 k 的几何意义.

17. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AF \perp BC$ 于 F ， M 是 CD 中点， AM 的延长线交 BC 的延长线于 E ， $AE \perp AB$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $AF = 2\sqrt{3}$ ，则梯形的面积是_____.



【答案】 $8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据已知条件易证 $\triangle ADM \cong \triangle ECM$ ，得 $S_{\triangle ADM} = S_{\triangle ECM}$ ，进而得到 $S_{\text{梯形}} = S_{\triangle ABE}$ ，然后解直角 $\triangle ABF$ ，求出 AB ，进而可得 AE ，根据三角形面积公式求出 $S_{\triangle ABE}$ 即可.

【详解】解：∵ $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DAM = \angle E, \quad \angle D = \angle ECM,$$

$$\because DM = CM,$$

$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle ECM,$$

$$\therefore S_{\triangle ADM} = S_{\triangle ECM},$$

$$\therefore S_{\text{梯形}} = S_{\triangle ABE},$$

$$\because AF \perp BC, \angle B = 60^\circ, AF = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{AF}{AB}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{AB},$$

$$\text{解得: } AB = 4,$$

$$\because AE \perp AB,$$

$$\therefore AE = \sqrt{3}AB = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AB \cdot AE = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}, \text{ 即梯形的面积是 } 8\sqrt{3},$$

故答案为: $8\sqrt{3}$.

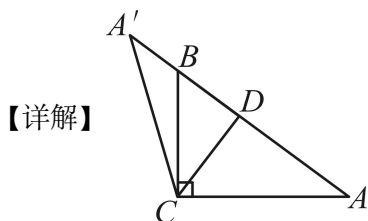
【点睛】本题考查了平行线的性质、全等三角形的判定和性质以及解直角三角形等知识点, 求出 $S_{\text{梯形}} = S_{\triangle ABE}$ 是解题关键.

18. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$, 点 D 是 AB 边上一点, 将 $\triangle ABC$ 沿着直线 CD 翻折, 点 A 落在直线 AB 上的点 A' 处, 则 $A'B = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{7}{5}$

【解析】

【分析】根据翻折的性质可知 $\angle ADC = \angle A'DC = 90^\circ$, $AD = A'D$, 根据勾股定理即可求出 AB 的值再利用三角形的面积公式可知 CD , 再次利用勾股定理即可求出 AD 的值, 即而可求出答案.



$\because$ 翻折

$$\therefore \angle ADC = \angle A'DC = 90^\circ, \quad AD = A'D.$$

$$\therefore CD \perp AB.$$

$$\text{在 Rt } \triangle ABC \text{ 中, } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}BC \cdot AC,$$

$$\therefore CD = \frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AD = A'D = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{16}{5},$$

$$\therefore A'B = A'D + AD - AB = \frac{7}{5},$$

故答案为: $\frac{7}{5}$.

【点睛】 本题考查的是翻折的性质和勾股定理, 能够多次利用勾股定理求解所需边长是解题的关键.

三、解答题 (共 8 小题, 19-22 每题 10 分, 23-24 每题 12 分, 25 题 14 分)

19. 计算: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}) + \sqrt{8}$

【答案】 4

【解析】

【分析】 先进行分母有理化, 计算二次根式的乘法, 然后计算二次根式的加减.

【详解】 解: 原式 = $\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + 3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

$$= \sqrt{2} + 1 + 3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= 4.$$

【点睛】 本题考查二次根式的运算, 熟练掌握分母有理化和二次根式运算法则是解题关键.

20. 解方程: $\frac{x^2-1}{3} + \frac{3-x}{2} = x$

【答案】 $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = 1.$

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程的解法, 掌握利用因式分解的方法解方程是解本题的关键; 本题先把方程化为 $(2x-7)(x-1)=0$, 再化为两个一次方程即可.

【详解】 解: $\frac{x^2-1}{3} + \frac{3-x}{2} = x,$

去分母得: $2x^2 - 2 + 9 - 3x = 6x,$

整理得: $2x^2 - 9x + 7 = 0,$

$$\therefore (2x-7)(x-1) = 0,$$

$$\therefore 2x-7=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

解得: $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = 1.$

21. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m-1)x + m^2 = 0$ ，其根的判别式的值为 9，求 m 的值及这个方程的根.

【答案】 $m = -2$; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

【解析】

【分析】 根据根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 9$ ，求得 m 的值；进而得到原方程，再解方程求出方程的根即可.

【详解】 解：由题意得： $(2m-1)^2 - 4 \times m^2 = 9$,

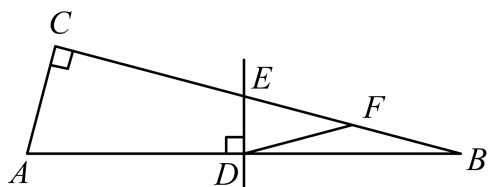
解得 $m = -2$,

当 $m = -2$ 时，原方程为： $x^2 - 5x + 4 = 0$,

解得： $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

【点睛】 本题考查根的判别式以及解一元二次方程，熟知根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 是解题关键.

22. 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 15^\circ$ ，边 AB 的垂直平分线交边 BC 于点 E ，垂足为点 D 。取线段 BE 的中点 F ，联结 DF 。求证： $AC = DF$ 。

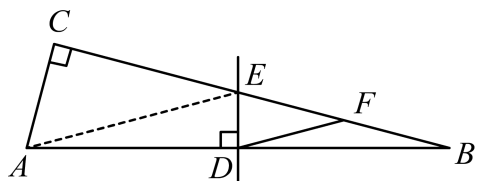


【答案】 见解析

【解析】

【分析】 本题考查中垂线的性质，直角三角形斜边中线的性质，直角三角形 30° 角所对的边与斜边之间的关系；先根据线段垂直平分线的性质得： $AE = BE$ ，再利用直角三角形斜边中线的性质得： DF 与 BE 的关系，最后根据直角三角形 30° 度的性质得 AC 和 AE 的关系，从而得出结论.

【详解】 证明：如图所示，连接 AE ，



$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线，

$\therefore AE = BE$, $\angle EDB = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAB = \angle EBA = 15^\circ$,

$\therefore \angle AEC = 30^\circ$,

$\text{Rt}\triangle EDB$ 中， $\because F$ 是 BE 的中点，

$$\therefore DF = \frac{1}{2} BE,$$

Rt $\triangle ACE$ 中, $\because \angle AEC = 30^\circ$,

$$\therefore AC = \frac{1}{2} AE,$$

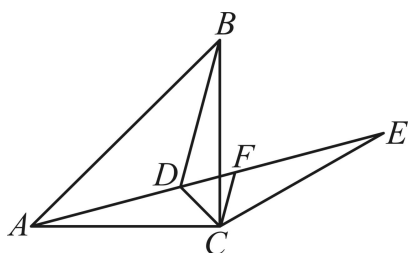
$$\therefore AC = DF.$$

23. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$, $\angle CAD=\angle CBD$.

(1) 求证: CD 平分 $\angle ACB$;

(2) 点 E 是 AD 延长线上一点, $CE=CA$, $CF \parallel BD$ 交 AE 于点 F , 若 $\angle CAD=15^\circ$,

求证: $EF=BD$.



【答案】(1) 见解析; (2) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据等腰直角三角形的性质可得 $\angle BAC = \angle ABC$, 进而得到 $\angle BAD = \angle ABD$, 由等角对等边可得 $DA = DB$, 利用 SSS 证明 $\triangle DAC \cong \triangle DBC$, 得到 $\angle DCA = \angle DCB$ 即可得出结论;

(2) 根据 $\triangle DAC \cong \triangle DBC$, $CE = CA$ 可得 $\angle DBC = \angle E = 15^\circ$, $CE = CA = CB$, 然后根据三角形外角的性质求出 $\angle BDF = 60^\circ$, 利用平行线的性质得出 $\angle CFD = 60^\circ$, 可得 $\angle CFE = 120^\circ$, 再根据三角形内角和定理求出 $\angle CDB = 120^\circ$, 利用 AAS 证明 $\triangle BDC \cong \triangle EFC$ 即可得出结论.

【详解】证明: (1) $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$,

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\because \angle CAD = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ABD,$$

$$\therefore DA = DB,$$

$$\text{又} \because AC = BC, CD = CD,$$

$$\therefore \triangle DAC \cong \triangle DBC,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle DCB, \text{ 即 } CD \text{ 平分 } \angle ACB;$$

$$(2) \because \triangle DAC \cong \triangle DBC, CE = CA, \angle CAD = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = 15^\circ, \angle E = 15^\circ, CE = CA = CB,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ABD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\because CF \parallel BD,$$

$$\therefore \angle CFD = \angle BDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CFE = 120^\circ,$$

$$\text{又} \because CD \text{ 平分 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle DCB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CDB = 180^\circ - 15^\circ - 45^\circ = 120^\circ,$$

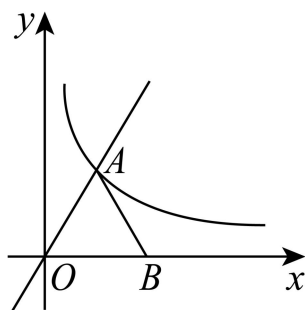
$$\text{在 } \triangle BDC \text{ 和 } \triangle EFC \text{ 中, } \begin{cases} \angle E = \angle DBC \\ \angle CFE = \angle CDB, \\ CE = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDC \cong \triangle EFC \text{ (AAS),}$$

$$\therefore EF = BD.$$

【点睛】本题考查全等三角形的判定和性质、等腰直角三角形的性质、平行线的性质、三角形内角和定理以及三角形外角的性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考常考题型.

24. 如图，在平面直角坐标系中， O 为坐标原点，正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像都经过点 $A(2, m)$.



(1) 求反比例函数的解析式

(2) 点 B 在 x 轴上，且 $OA = BA$ ，反比例函数图像上有一点 C ，且 $\angle ABC = 90^\circ$ ，求点 C 坐标.

(3) 在 (2) 的条件下，连接 OC ， AC ，求 $\triangle AOC$ 的面积.

【答案】(1) $y = \frac{4\sqrt{3}}{x}$

(2) $\left(6, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

(3) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 先求解 $A(2, 2\sqrt{3})$ ，再把 $A(2, 2\sqrt{3})$ 代入反比例函数解析式 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ ，从而可得答案；

(2) 过点 A 作 $AD \perp OB$ 于 D ，根据等腰三角形三线合一可得 $OD = BD$ ，求出 B 点坐标，利用两点间距离公式表示出 AB 、 BC 和 AC ，根据 $\angle ABC = 90^\circ$ 利用勾股定理列出方程，解方程即可解决问题；

(3) 如图，延长 CA 与 y 轴交于点 H ，求解直线 AC 为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3}$ ；可得 $OH = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ ，利用

$S_{\triangle OAC} = S_{\triangle OCH} - S_{\triangle OAH}$ ，再计算即可。

【小问 1 详解】

解：将点 $A(2, m)$ 代入 $y = \sqrt{3}x$ ，得： $m = 2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore A(2, 2\sqrt{3}),$$

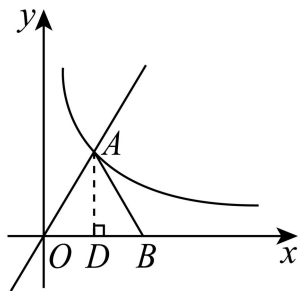
将点 $A(2, 2\sqrt{3})$ 代入 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 得： $2\sqrt{3} = \frac{k}{2}$ ，

$$\therefore k = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为： } y = \frac{4\sqrt{3}}{x};$$

【小问 2 详解】

过点 A 作 $AD \perp OB$ 于 D ，



$$\therefore OA = BA,$$

$$\therefore OD = BD,$$

$$\therefore A(2, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore OD = 2,$$

$$\therefore OB = 4, \text{ 即 } B(4, 0),$$

设点 C 坐标为 $\left(a, \frac{4\sqrt{3}}{a}\right)$,

$$\text{则 } AB^2 = (2-4)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16,$$

$$BC^2 = (a-4)^2 + \frac{48}{a^2} = a^2 + \frac{48}{a^2} - 8a + 16,$$

$$AC^2 = (a-2)^2 + \frac{48}{a^2} - 2\sqrt{3}^2 = a^2 - 4a - \frac{48}{a} + \frac{48}{a^2} + 16,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

$$\text{即 } 16 + a^2 + \frac{48}{a^2} - 8a + 16 = a^2 - 4a - \frac{48}{a} + \frac{48}{a^2} + 16,$$

$$\text{整理得: } a^2 - 4a - 12 = 0,$$

$$\text{解得: } a = 6 \text{ 或 } a = -2,$$

经检验, $a = 6$ 或 $a = -2$ 均是分式方程的解,

$$\therefore x > 0,$$

$$\therefore a = 6,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 坐标为 } \left(6, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right);$$

【小问3详解】

如图, 延长 CA 与 y 轴交于点 H ,

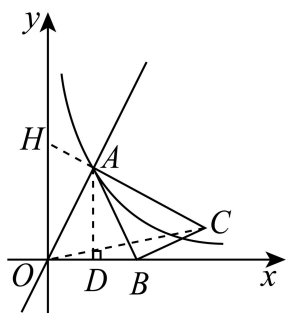
$$\therefore A(2, 2\sqrt{3}), C\left(6, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

设直线 AC 为 $y = ex + f$,

$$\therefore \begin{cases} 2e + f = 2\sqrt{3} \\ 6e + f = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} e = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ f = \frac{8\sqrt{3}}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3};$$



当 $x=0$ 时, $y = \frac{8\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore OH = \frac{8\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore S_{\triangle OAC} = S_{\triangle OCH} - S_{\triangle OAH} = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} \times 6 - \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} \times 2 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】本题主要考查了待定系数法求函数解析式、函数图象上点的坐标特征、等腰三角形的性质、两点间距离公式、勾股定理以及解分式方程和一元二次方程等知识，灵活运用相关知识进行推理计算是解答本题的关键。

25. 已知：如图 1，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 4$ ，点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 上动点，点 D 不与点 A 、 B 重合， $DE \parallel BC$ 。

(1) 如图 1，当 $AE=1$ 时，求 BD 长；

(2) 如图 2，把沿着直线 DE 翻折得到 $\triangle DEF$ ，设 $CE = x$

①当点 F 落在斜边 BC 上时，求 x 的值；

② 如图 3，当点 F 落在 $Rt\triangle ABC$ 外部时， EF 、 DF 分别与 BC 相交于点 H 、 G ，如果 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 重叠部分的面积为 y ，求 y 与 x 的函数关系式及定义域。（直接写出答案）

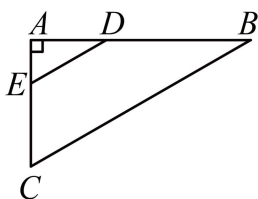


图1

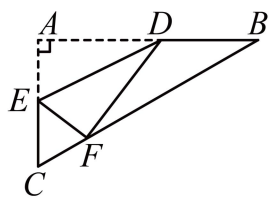


图2

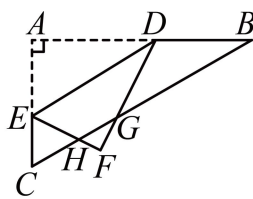


图3

【答案】(1) $BD = 3\sqrt{3}$ ；(2) ① $x=2$ ；② $y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 + 4\sqrt{3}x$ ($0 < x < 2$)。

【解析】

【分析】(1) 根据 $DE \parallel BC$ ，可得 $\angle ADE = 30^\circ$ ，然后分别利用三角函数求出 AB 和 AD 即可；

(2) ①设 $CE = x$ ，则 $AE = EF = 4 - x$ ，然后证明 $\triangle CEF$ 是等边三角形即可解决问题；

②由①可知 $CE = x$ ， $AE = EF = 4 - x$ ， $\triangle CEF$ 是等边三角形，然后分别求出 HF 、 FG 和 AD ，利用三角形面积公式计算出 $S_{\triangle HFG}$ 和 $S_{\triangle AED}$ ，进而得到 $S_{\triangle DEF}$ ，然后根据 $y = S_{\triangle DEF} - S_{\triangle HFG}$ 列式整理，并求出定义域即可。

【详解】解：(1) $\because \angle A = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 4$ ， $AE = 1$ ，

$$\therefore AB = \frac{4}{\tan 30^\circ} = 4\sqrt{3},$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = 30^\circ,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BD = AB - AD = 3\sqrt{3};$$

(2) ①设 $CE = x$ ，则 $AE = 4 - x$ ，

$$\therefore EF = 4 - x,$$

$$\because \angle ADE = \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CEF = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形，

$$\therefore CE = EF, \text{ 即 } x = 4 - x,$$

$$\therefore x = 2;$$

②由①可知 $CE = x$ ， $AE = EF = 4 - x$ ， $\triangle CEF$ 是等边三角形，

$$\therefore HF = EF - EH = 4 - x - x = 4 - 2x, \quad \angle FHG = \angle CHE = 60^\circ,$$

$$\because \angle F = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore FG = \sqrt{3} HF = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x,$$

$$\therefore S_{\triangle HFG} = \frac{1}{2} HF \times FG = \frac{1}{2} (4 - 2x) (4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x) = 2\sqrt{3}x^2 - 8\sqrt{3}x + 8\sqrt{3},$$

$$\because AE = 4 - x, \quad \angle ADE = 30^\circ,$$

$$\therefore AD = \sqrt{3} AE = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}x,$$

$$\therefore S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} AE \times AD = \frac{1}{2} (4 - x) (4\sqrt{3} - \sqrt{3}x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 - 4\sqrt{3}x + 8\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 - 4\sqrt{3}x + 8\sqrt{3},$$

$$\therefore y = S_{\triangle DEF} - S_{\triangle HFG} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - 4\sqrt{3}x + 8\sqrt{3} - (2\sqrt{3}x^2 - 8\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 + 4\sqrt{3}x,$$

$\therefore$ 当 $x=2$ 时, 点 F 落在斜边 BC 上,

$\therefore$ 定义域为: $0 < x < 2$,

$$\text{即 } y = -\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 + 4\sqrt{3}x \quad (0 < x < 2).$$

【点睛】 本题主要考查了平行线的性质、直角三角形的性质、解直角三角形、折叠的性质、等边三角形的判定和性质等知识, 准确识别图形, 求出 $\triangle CEF$ 是等边三角形是解题的关键.