

2023 学年度第一学期期中测试八年级数学试卷

一、单项选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{4a^3}$ B. $\sqrt{24}$ C. $\sqrt{\frac{a}{2}}$ D. $2\sqrt{mn}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查最简二次根式, 根据最简二次根式“被开方数是整式且不含有能开得尽方的因数或因式的二次根式是最简二次根式”进行判断即可.

【详解】 解: A. $\sqrt{4a^3} = 2a\sqrt{a}$, 不是最简二次根式, 不合题意;

B. $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, 不是最简二次根式, 不合题意;

C. $\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2a}}{2}$, 不是最简二次根式, 不合题意;

D. $2\sqrt{mn}$, 是最简二次根式, 符合题意;

故选: D.

2. 下列二次根式中, 不能与 $\sqrt{3}$ 合并的是 ()

- A. $\sqrt{9}$ B. $\sqrt{27}$ C. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $2\sqrt{48}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式的判断, 二次根式的化简, 解题的关键是正确化简二次根式. 先化简各个选项的二次根式, 再看能否与 $\sqrt{3}$ 合并, 即可得到答案.

【详解】 解: A、 $\sqrt{9} = 3$, 不能和 $\sqrt{3}$ 合并, 符合题意,

B、 $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, 能和 $\sqrt{3}$ 合并, 不符合题意,

C、 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 能和 $\sqrt{3}$ 合并, 不符合题意,

D、 $2\sqrt{48} = 8\sqrt{3}$, 能和 $\sqrt{3}$ 合并, 不符合题意,

故选: A.

3. 下列关于 x 的方程一定有实数解的是 ()

A. $x^2 - x - n = 0$

B. $\sqrt{3}x^2 - 2x + 1 = 0$

C. $x^2 - nx - 1 = 0$

D. $x^2 - x + 1 = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则方程没有实数根，据此求出每个方程的判别式即可得到答案.

【详解】解：A、 $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-n) = 1 + 4n$ ，当 $n < -\frac{1}{4}$ 时， $\Delta < 0$ ，此时该方程无实数根，故此选项不符合题意；

B、 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3} < 0$ ，该方程无实数根，故此选项不符合题意；

C、 $\Delta = (-n)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = n^2 + 4 > 0$ ，该方程有两个不相等的实数根，故此选项符合题意；

D、 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ ，该方程无实数根，故此选项不符合题意；

故选 C.

4. 用配方法解方程 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 时，配方法所得的方程是 ()

A. $(x-2)^2 = 1$

B. $(x-2)^2 = 2$

C. $(x-2)^2 = 3$

D. $(x-2)^2 = -2$

【答案】B

【解析】

【分析】此题考查了解一元二次方程—配方法，熟练掌握配方法的方法步骤是解本题的关键. 方程变形后，配方得到结果，即可做出判断.

【详解】解：方程 $x^2 - 4x + 2 = 0$ ，

变形得： $x^2 - 4x = -2$ ，

配方得： $x^2 - 4x + 4 = -2 + 4$ ，即 $(x-2)^2 = 2$ ，

故选：B.

5. 下列命题中，是假命题的是 ()

A. 如果两个角互补，那么这两个角分别是锐角和钝角；

- B. 周长相等的两个等边三角形全等;
- C. 三角形的一个外角大于与它不相邻的一个内角;
- D. 互为余角的两个角一定都是锐角.

【答案】 A

【解析】

【分析】如果两个角的度数之和为 90° 度，那么这两个角互余，如果两个角的度数之和为 180° 度，那么这两个角互补，据此可判断 A、D；根据等边三角形的三边相等，若两个等边三角形周长相等，则这两个等边三角形边长相等，则这两个等边三角形全等，据此可判断 B；根据三角形一个外角的度数等于与其不相邻的两个内角度数之和即可判断 C.

【详解】解：A、如果两个角互补，那么这两个角可以是锐角和钝角，也可以都是直角，原命题是假命题，符合题意；

B、周长相等的两个等边三角形的边长相等，即这两个等边三角形全等，原命题是真命题，不符合题意；

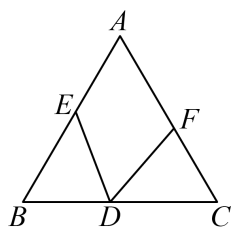
C、三角形的一个外角大于与它不相邻的一个内角，原命题是真命题，不符合题意；

D、互为余角的两个角一定都是锐角，原命题是真命题，不符合题意；

故选 A.

【点睛】本题主要考查了判断命题真假，等边三角形的性质，三角形外角的性质，全等三角形的判定，余角与补角的定义，熟练掌握相关知识是解题的关键。

6. 已知, 如图在等边 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的一点, $\angle EDF = 60^\circ$, $BD = CF$, 下列结论不正确的是 ()



- A. $DE = DF$
- B. $\angle BED + \angle DFC = 120^\circ$
- C. $\triangle BED \cong \triangle CDF$
- D. $\angle BED = \angle DFC$.

【答案】 D

【解析】

【分析】本题主要考查了等边三角形的性质，全等三角形的性质与判定，三角形内角和定理，根据等边三角形的性质得到 $\angle B = \angle C = 60^\circ$ ，根据平角的定义和三角形内角和定理证明 $\angle BED = \angle CDF$ ，

$\angle BED + \angle DFC = 120^\circ$, 进而证明 $\triangle BED \cong \triangle CDF$ (AAS), 得到根据现有条件无法证明

$\angle BED = \angle DFC$, 据此可得答案.

【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle EDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE + \angle BED = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \angle BDE + \angle CDF,$$

$$\therefore \angle BED = \angle CDF,$$

$$\therefore \angle BED + \angle DFC = 120^\circ, \text{ 则 B 选项正确;}$$

$$\text{又} \because BD = CF,$$

$$\therefore \triangle BED \cong \triangle CDF (\text{AAS}), \text{ 则 C 选项正确;}$$

$$\therefore DE = DF, \text{ 则 A 选项正确;}$$

∴ 四个选项中，只有 D 选项根据现有条件无法证明，

故选：D.

二、填空题（每题 2 分，共 24 分）

7. 化简 $\sqrt{18} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】利用二次根式的性质化简即可.

【详解】解： $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2},$

故答案为： $3\sqrt{2}.$

【点睛】本题主要考查了化简二次根式，熟知二次根式的化简方法是解题的关键.

8. 要使二次根式 $\sqrt{2x}$ 有意义，则 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x \geq 0$

【解析】

【分析】直接利用二次根式的定义得出答案.

【详解】解：二次根式 $\sqrt{2x}$ 有意义，故 $2x \geq 0,$

则 x 的取值范围是： $x \geq 0.$

故答案为： $x \geq 0.$

【点睛】本题主要考查了二次根式有意义的条件，正确把握二次根式的定义是解题关键.

9. 如果关于 x 的方程 $4x^2 - x - m = 0$ 没有实数根，那么 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $m < -\frac{1}{16}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，则方程有两个不相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，则方程有两个相等的实数根，若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，则方程没有实数根，据此求解即可.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的方程 $4x^2 - x - m = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 \cdot (-m) < 0,$$

$$\therefore m < -\frac{1}{16},$$

故答案为： $m < -\frac{1}{16}$.

10. 不等式 $\sqrt{3}x - 1 \geq 2x$ 的解集是_____.

【答案】 $x \leq -2 - \sqrt{3}$ ## $x \leq -\sqrt{3} - 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式，分母有理化，按照移项，合并同类项，系数化为 1 的步骤解不等式，再分母有理化即可得到答案.

【详解】 解： $\sqrt{3}x - 1 \geq 2x$

移项得： $\sqrt{3}x - 2x \geq 1$,

合并同类项得： $(\sqrt{3} - 2)x \geq 1$,

系数化为 1 得： $x \leq \frac{1}{\sqrt{3} - 2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(\sqrt{3} - 2)(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 - 4} = -2 - \sqrt{3}$,

故答案为： $x \leq -2 - \sqrt{3}$.

11. 分母有理化： $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{2} + 1$ ## $1 + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分母有理化，把分子分母同时乘以 $\sqrt{2} + 1$ ，再计算求解即可得到答案.

【详解】解： $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1) \times (\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1}$$

$$= \sqrt{2}+1,$$

故答案为： $\sqrt{2}+1$.

12. $\sqrt{a-b}$ 的一个有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{a-b}$ (合理即可)

【解析】

【分析】 根据有理化因式的定义，直接写出即可.

【详解】 解： $\because \sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a-b} = a-b$

$\therefore \sqrt{a-b}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{a-b}$ (合理即可) .

【点睛】 本题考查了有理化因式的定义. 一般来说 $\sqrt{a}$ 的有理化因式为： $\sqrt{a}$ 或 $b\sqrt{a}$.

13. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx - 2 = 0$ 有一个根为 1，则 $2a + 2b =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的定义，根据题意得出 $a+b=2$ ，代入代数式，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx - 2 = 0$ 有一个根为 1，

$$\therefore a+b-2=0,$$

$$\therefore a+b=2,$$

$$\therefore 2a+2b=2(a+b)=4,$$

故答案为： 4.

14. 方程 $x(x+2) = x$ 的解是_____.

【答案】 $x=0$ 或 $x=-1$

【解析】

【分析】 因式分解法求解可得.

【详解】 $\because x^2+2x=x$, 即 $x^2+x=0$,

$$\therefore x(x+1)=0,$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x+1=0,$$

解得: $x=0$ 或 $x=-1$,

故答案为: $x=0$ 或 $x=-1$.

【点睛】 本题考查了用因式分解法解一元二次方程, 本题根据方程的特点采用因式分解法最简单. 一般地, 用什么方法解一元二次方程最简单, 要根据方程的特点选取适当的方法来解; 一般可以先考虑因式分解法或十字相乘法, 其次考虑公式法和配方法或直接开平方法.

15. 在实数范围内因式分解 $x^2-x-1=$ _____.

【答案】 $\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

【解析】

【详解】 试题解析: $\because x^2-x-1=0$ 的解为: $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,

$$\therefore x^2-x-1=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

16. 将命题“关于某直线对称的两个三角形全等”, 改写成“如果..., 那么...”的形式: 如果_____, 那么_____.

【答案】 ①. 两个三角形关于某直线对称; ②. 这两个三角形全等.

【解析】

【分析】 任何一个命题都可以写成“如果...那么...”的形式, 如果是条件, 那么是结论.

【详解】 解: 关于某直线对称的两个三角形全等, 改写成“如果..., 那么...”的形式:

如果两个三角形关于某直线对称, 那么这两个三角形全等

故答案为: 两个三角形关于某直线对称; 这两个三角形全等

【点睛】 本题考查了命题与定理, 命题是有题设和结论构成. 命题都能写成“如果..., 那么...”的形式, “如果”后面是题设, “那么”后面是结论.

17. 某家用电器经过两次降价, 每台零售价由 400 元降到 256 元, 连续两次降价的百率相同, 设这个降价的

百分率为 x ，则列出关于 x 的方程为_____.

【答案】 $400(1-x)^2 = 256$

【解析】

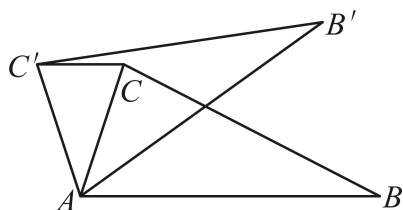
【分析】 本题主要考查了从实际问题中抽象出一元二次方程，设这个降价的百分率为 x ，则第一次降价后的售价为 $400(1-x)$ 元，第二次降价后的售价为 $400(1-x)^2$ ，据此列出方程即可.

【详解】 解： 设这个降价的百分率为 x ，

由题意得， $400(1-x)^2 = 256$ ，

故答案为： $400(1-x)^2 = 256$.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB = 72^\circ$ ，在同一平面内，现将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转，使得点 B 落在点 B' ，点 C 落在点 C' ，如果 $CC' \parallel AB$ ，那么 $\angle BAB' =$ _____.



【答案】 36° ## 36度

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质以及三角形内角和定理；先根据平行线的性质，由 $CC' \parallel AB$ 得 $\angle ACC' = \angle CAB = 70^\circ$ ，再根据旋转的性质得 $AC = AC'$ ， $\angle BAB' = \angle CAC'$ ，于是根据等腰三角形的性质有 $\angle ACC' = \angle AC'C = 70^\circ$ ，然后利用三角形内角和定理可计算出 $\angle CAC' = 40^\circ$ ，从而得到 $\angle BAB'$ 的度数.

【详解】 解： $\because CC' \parallel AB$ ，

$\therefore \angle ACC' = \angle CAB = 72^\circ$ ，

$\because$ 现将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转，使得点 B 落在点 B' ，点 C 落在点 C' ，，

$\therefore AC = AC'$ ， $\angle BAB' = \angle CAC'$ ，

在 $\triangle ACC'$ 中， $\because AC = AC'$ ，

$\therefore \angle AC'C = \angle ACC' = 72^\circ$ ，

$\therefore \angle CAC' = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$ ，

$\therefore \angle BAB' = 36^\circ$.

故答案为： 36° .

三、简答题 (第 19-23 题，每题 6 分，第 24 题 7 分，第 25 题 9 分，第 26 题 12 分，共 58 分)

19. 计算: $2\sqrt{12a} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3a}{4}} + a\sqrt{\frac{3}{a}}$.

【答案】 $\frac{14}{3}\sqrt{3a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的加减计算，先化简二次根式，再根据二次根式的加减计算法则求解即可.

【详解】 解: 原式 $= 4\sqrt{3a} - \frac{1}{3}\sqrt{3a} + \sqrt{3a}$
 $= \frac{14}{3}\sqrt{3a}$.

20. 计算: $3\sqrt{\frac{5}{4}} \div \frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} \times \frac{1}{2}\sqrt{8}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的乘除混合计算，先化简二次根式，再根据二次根式的乘除混合计算法则求解即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{3}{2}\sqrt{5} \div \frac{3}{8}\sqrt{10} \times \sqrt{2}$
 $= \left(\frac{3}{2}\sqrt{5} \times \sqrt{2}\right) \div \frac{3}{8}\sqrt{10}$
 $= \frac{3}{2}\sqrt{10} \div \frac{3}{8}\sqrt{10}$
 $= 4$.

21. 解方程: $x^2 - 4x - 96 = 0$.

【答案】 $x_1 = 12$, $x_2 = -8$.

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程. 利用因式分解法解一元二次方程.

【详解】 解: $x^2 - 4x - 96 = 0$,

$\therefore (x-12)(x+8) = 0$,

$\therefore x-12 = 0$, $x+8 = 0$,

$\therefore x_1 = 12$, $x_2 = -8$.

22. 解方程: $2x - \frac{x^2 + 2}{3} = \frac{x}{2}$.

【答案】 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 4$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程， 先把原方程整理为 $2x^2 - 9x + 4 = 0$ ， 再利用因式分解法解方程即可.

【详解】 解: $2x - \frac{x^2 + 2}{3} = \frac{x}{2}$

整理得: $2x^2 - 9x + 4 = 0$,

$\therefore (x-4)(2x-1) = 0$,

$\therefore x-4=0$ 或 $2x-1=0$,

解得 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 4$.

23. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m-1)x + m(m+2) = 0$ 有两个不相等的实数根,求 m 的取值范围.

【答案】 $m < \frac{1}{4}$.

【解析】

【分析】 根据关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m-1)x + m(m+2) = 0$ 有两个不相等的实数根, 得出判别式 $\Delta > 0$, 列出关于 m 的不等式, 求得 m 的取值范围.

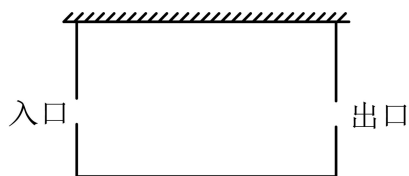
【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2(m-1)x + m(m+2) = 0$ 有两个不相等的实数根,

$\therefore [-2(m-1)]^2 - 4 \times 1 \times [m(m+2)] > 0$,

解得: $m < \frac{1}{4}$.

【点睛】 本题考查了根的判别式, 一元二次方程有两个不相等的实数根, $\Delta > 0$; 有两个相等的实数根, $\Delta = 0$; 没有实数根, $\Delta < 0$.

24. 某单位组织员工前往九棵树艺术中心欣赏民族舞表演. 表演前, 主办方工作人员准备利用11米长的墙为一边, 用20米隔栏绳为另三边, 设立一个面积为60平方米的长方形等候区, 如图, 为了方便群众进出, 在两边空出两个各为1米的出入口 (出入口不用隔栏绳). 假设这个长方形平行于墙的一边为长, 垂直于墙的一边为宽, 那么围成的这个长方形的长与宽分别是多少米?



【答案】长方形的长为 10 米，宽为 6 米.

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程的应用，设这个长方形的长为 x 米，则宽为 $\frac{1}{2}(20-x)+1=11-\frac{1}{2}x$ ，然后根据长方形的面积是 60 平方米列出方程求解即可得到答案.

【详解】解：设这个长方形的长为 x 米，则宽为 $\frac{1}{2}(20-x)+1=11-\frac{1}{2}x$ ，

$$\text{由题意得：} x\left(11-\frac{1}{2}x\right)=60$$

解得 $x=10$ 或 $x=12$ ，

$\because$ 平行于墙的一边为长，墙长为 11 米，

$\therefore$ 长方形的长不能超过 11 米，

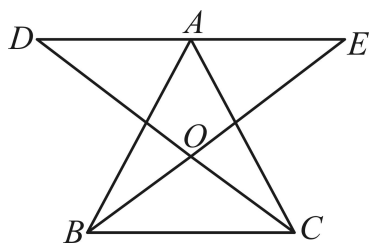
$\therefore x=10$ ，

$$\therefore 11-\frac{1}{2}x=6,$$

$\therefore$ 长方形的长为 10 米，宽为 6 米.

答：长方形的长为 10 米，宽为 6 米.

25. 已知，如图 $DE \parallel BC$ ，点 A 是 DE 上的一点， $AD=AE$ ， $AB=AC$.



(1) 求证： $\triangle ADC \cong \triangle AEB$ ；

(2) 连接 AO 并延长 AO 交 BC 于 F ，求证： $AF \perp BC$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】本题考查的是全等三角形的判定与性质，线段的垂直平分线的判定，熟记判定方法是解本题的关键；

(1) 先证明 $\angle DAB = \angle EAC$ ，可得 $\angle DAC = \angle EAB$ ，再结合已知条件可得结论；

(2) 先证明 $\angle OBC = \angle OCB$ ，可得 $OB = OC$ ，结合 $AB = AC$ ，从而可得结论.

【小问 1 详解】

证明： $\because AB = AC$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle ABC, \quad \angle EAC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle EAC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle EAB,$$

$$\therefore AD = AE, \quad AC = AB,$$

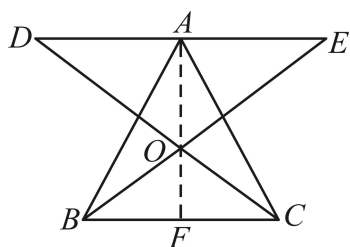
$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEB;$$

【小问 2 详解】

连接 AO 并延长 AO 交 BC 于 F ，

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEB,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ABE,$$



$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

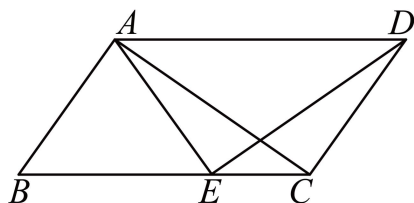
$$\therefore OB = OC,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore AO \text{ 是 } BC \text{ 的垂直平分线},$$

$$\therefore AF \perp BC;$$

26. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle B = \angle ADC$ ，点 E 是 BC 边上的一点，且 $AE = DC$ 。



(1) 求证： $AB = CD$ ；

(2) 求证： $\triangle ABC \cong \triangle EAD$ ；

(3) 如果 $AB \perp AC$, $\angle BAE$ 为 y , $\angle ACB$ 为 x , 则用含 x 的代数式表示 y .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) $y = 2x$

【解析】

【分析】(1) 由平行线定理两直线平行同旁内角互补证明 $AD \parallel BC$, 进而证明 $\angle DAC = \angle ACB$, 根据 AAS 证明 $\triangle ACD \cong \triangle CAB$, 即可得证;

(2) 根据平行线的性质和等腰三角形的性质先证 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (AAS), 再证 $\triangle ABC \cong \triangle EAD$ (SAS);

(3) 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H , 由等腰三角形和余角的性质证明;

【小问 1 详解】

解: $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle B + \angle BCD = 180^\circ$,

$\because \angle B = \angle ADC$,

$\therefore \angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAC = \angle ACB$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CAB$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle ADC \\ \angle DAC = \angle ACB \\ AC = CA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CAB$ (AAS)

【小问 2 详解】

解: $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle CAD = \angle ACB$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle ADC \\ \angle ACB = \angle CAD \\ AC = CA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (AAS),

$$\therefore BC = DA, \quad AB = CD,$$

$$\because AE = CD,$$

$$\therefore AB = AE,$$

$$\therefore \angle B = \angle AEB,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EAD,$$

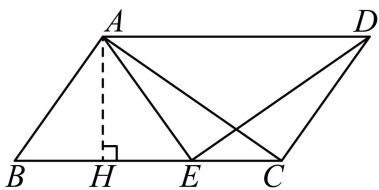
$$\therefore \angle B = \angle EAD.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 和 } \triangle EAD \text{ 中, } \begin{cases} AB = EA \\ \angle B = \angle EAD \\ BC = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EAD \text{ (SAS)}.$$

【小问 3 详解】

解：过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H，



$$\because AB = AE, \quad AH \perp BC,$$

$$\therefore \angle BAE = 2\angle BAH,$$

在 $\triangle ABC$ 中,

$$\because \angle BAC + \angle B + \angle ACB = 180^\circ,$$

又 $AB \perp AC$,

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle B + \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle B + \angle BAH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAH = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle BAE = 2\angle ACB.$$

即 $y = 2x$

【点睛】 本题考查了平行线的性质，等腰三角形的性质，直角三角形的性质，全等三角形的判定；熟练掌握其定理进行推理论证是解题关键.