

2022 学年第一学期初二年级数学期中考试试卷

一、填空题 (本大题共 18 小题, 每题 4 分, 共 72 分)

1. 16 的平方根是_____.

【答案】 ± 4

【解析】

【分析】 根据平方根的定义即可求解.

【详解】 即: 16 的平方根是 $\pm\sqrt{16}=\pm 4$

故填: ± 4

【点睛】 此题主要考查平方根, 解题的关键是熟知平方根的定义.

2. 化简: $\sqrt{(3-\pi)^2}=_____$.

【答案】 $\pi-3$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质即可求出答案.

【详解】 解: 原式 $=|3-\pi|=\pi-3$

故答案为: $\pi-3$.

【点睛】 本题考查二次根式的性质与化简, 解题的关键是熟练运用二次根式的性质, 本题属于基础题型.

3. $\sqrt{5}-2\sqrt{2}$ 的有理化因式为_____.

【答案】 $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 根据有理化因式的定义求解即可.

【详解】 解: $\because (\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}+2\sqrt{2})=5-8=-3$.

$\therefore \sqrt{5}-2\sqrt{2}$ 的有理化因式为 $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ (答案不唯一).

【点睛】 本题考查了有理化因式, 如果两个含有二次根式的非零代数式相乘, 它们的积不含有二次根式, 就说这两个非零代数式互为有理化因式. 单项二次根式的有理化因式是它的同类二次根式; 其他代数式的有理化因式可用平方差公式来进行分步确定.

4. 若 $x-1=\sqrt{5}$, 则 $(x-1)^2-4(x-1)+4$ 的值为_____.

【答案】 $9 - 4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 把 $x-1 = \sqrt{5}$ 直接代入 $(x-1)^2 - 4(x-1) + 4$ 计算即可.

【详解】 解: 把 $x-1 = \sqrt{5}$ 代入 $(x-1)^2 - 4(x-1) + 4$, 得

$$(\sqrt{5})^2 - 4\sqrt{5} + 4 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}.$$

故答案为: $9 - 4\sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

5. 方程 $x(x-1) = 2(x-1)$ 的根为_____.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 2$

【解析】

【分析】 利用因式分解法解一元二次方程即可得.

【详解】 $x(x-1) = 2(x-1)$,

$$x(x-1) - 2(x-1) = 0,$$

$$(x-1)(x-2) = 0,$$

$$x-1 = 0 \text{ 或 } x-2 = 0,$$

$$x = 1 \text{ 或 } x = 2,$$

$$\text{即 } x_1 = 1, x_2 = 2,$$

故答案为: $x_1 = 1, x_2 = 2$.

【点睛】 本题考查了解一元二次方程, 主要解法包括: 直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法、换元法等, 熟练掌握各解法是解题关键.

6. 若方程 $(m^2 - 1)x^2 + \sqrt{2m}x = 9$ 是关于 x 的一元二次方程, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq 0$ 且 $m \neq 1$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的定义, 二次根式的性质, 解一元一次不等式求解集, 即可求解.

【详解】 解: 根据题意得, $m^2 - 1 \neq 0$, 且 $\sqrt{2m} \geq 0$,

$$\therefore m \neq \pm 1 \text{ 且 } m \geq 0,$$

$\therefore m \geq 0$ 且 $m \neq 1$,

故答案为: $m \geq 0$ 且 $m \neq 1$.

【点睛】 本题主要考查根据一元二次方程的定义, 二次根式的性质求参数, 掌握一元二次方程的定义, 二次根式的性质, 解一元一次不等式是解题的关键.

7. 若关于 x 的一元二次方程 $k^2x^2 - (2k+1)x + 1 = 0$ 有两个实数根, 则 k 的取值范围为_____.

【答案】 $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】 在与一元二次方程有关的求值问题中, 必须满足下列条件: (1) 二次项系数不为零; (2) 在有两个实数根下必须满足 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

【详解】 解: 根据题意列出方程组
$$\begin{cases} [-(2k+1)]^2 - 4k^2 \geq 0 \\ k^2 \neq 0 \end{cases},$$

解得 $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$,

故答案为: $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程根的判别式的应用. 切记不要忽略一元二次方程二次项系数不为零这一隐含条件.

8. $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-2}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x \geq 1$ 且 $x \neq 2$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质, 分式的性质即可求解.

【详解】 解: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$, 解不等式组得, $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$,

$\therefore$ 定义域为 $x \geq 1$ 且 $x \neq 2$,

故答案为: $x \geq 1$ 且 $x \neq 2$.

【点睛】 本题主要考查二次根式, 分式的性质, 掌握二次根式中被开方数必须是非负数, 分式中分母不能为零是解题的关键.

9. 已知函数 $y = (a+2)x + (a^2-4)$, 当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 这个函数为正比例函数.

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据正比例函数的定义列式求解即可.

【详解】 解: 由题意得

$$a^2 - 4 = 0 \text{ 且 } a + 2 \neq 0,$$

$$\therefore a = 2.$$

故答案为: 2.

【点睛】 本题主要考查了正比例函数的定义, 正比例函数的定义是形如 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的函数, 其中 k 叫做比例系数.

10. 已知正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过一、三象限, 且经过点 $P(k+2, 2k+1)$, 则 $k =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 先根据正比例函数的性质求出 k 的取值范围, 再把 P 点坐标代入求解即可.

【详解】 解: $\because$ 正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象经过一、三象限,

$$\therefore k > 0.$$

把 $P(k+2, 2k+1)$ 代入 $y = kx$ ($k \neq 0$), 得

$$k(k+2) = 2k+1,$$

解得 $k=1$ 或 $k=-1$ (舍去).

故答案为: 1.

【点睛】 本题考查了正比例函数图象与系数的关系: 对于 $y = kx$ (k 为常数, $k \neq 0$), 当 $k > 0$ 时, $y = kx$ 的图象经过一、三象限, y 随 x 的增大而增大; 当 $k < 0$ 时, $y = kx$ 的图象经过二、四象限, y 随 x 的增大而减小.

11. 已知正比例函数图像经过点 $(-\sqrt{2}, -6)$, 若点 $M(-1, a)$ 、 $N(-b, \sqrt{3})$ 都在此图像上, 则 $a+b =$ _____.

【答案】 $-3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{6}$

【解析】

【分析】 设正比例函数解析式为 $y = kx$, 将点 $(-\sqrt{2}, -6)$ 即可求解正比例函数解析式, 再将点 $M(-1, a)$ 、 $N(-b, \sqrt{3})$ 代入正比例函数解析式, 即可求出 a , b 的值, 由此即可求解.

【详解】 解: 设正比例函数解析式为 $y = kx$, 点 $(-\sqrt{2}, -6)$ 在图像上,

$$\therefore -\sqrt{2}k = -6, \text{ 则 } k = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{正比例函数解析式为 } y = 3\sqrt{2}x,$$

$\therefore$ 点 $M(-1, a)$ 、 $N(-b, \sqrt{3})$ 都在此图像上,

$$\therefore a = 3\sqrt{2} \times (-1) = -3\sqrt{2}, \quad 3\sqrt{2} \times (-b) = \sqrt{3}, \text{ 则 } b = -\frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\therefore a + b = -3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$\text{故答案为: } -3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

【点睛】 本题主要考查待定系数法解正比例函数, 已知自变量的值求函数值, 已知函数值求自变量的值的综合, 掌握正比例函数解析的计算方法, 代入求值的方法是解题的关键.

12. 若正比例函数与反比例函数图像交于点 $(-2, 1)$ 和点 (a, b) 则 $a^b =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 设正比例函数解析式为 $y = k_1x$, 反比例函数解析式为 $y = \frac{k_2}{x}$, 函数图像交于点 $(-2, 1)$, 代入即可求出函数解析式, 再把 (a, b) , 即可求解.

【详解】 解: 根据题意, 设正比例函数解析式为 $y = k_1x$, 反比例函数解析式为 $y = \frac{k_2}{x}$,

$\therefore$ 函数图像交于点 $(-2, 1)$,

$$\therefore -2k_1 = 1, \quad \frac{k_2}{-2} = 1, \text{ 则 } k_1 = -\frac{1}{2}, \quad k_2 = -2,$$

$$\therefore \text{正比例函数解析式为 } y = -\frac{1}{2}x, \text{ 反比例函数解析式为 } y = -\frac{2}{x},$$

$\therefore$ 点 (a, b) 在函数图像上,

$$\therefore -\frac{1}{2}a = b, \quad -\frac{2}{a} = b,$$

$$\therefore a = 2 \text{ 时, } b = -1, \text{ 即 } (2, -1), \text{ 则 } a^b = 2^{-1} = \frac{1}{2};$$

当 $a = -2$ 时, $b = 1$, 即 $(-2, 1)$ 与另一个交点重合, 不符合题意, 舍去.

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题主要考查正比例函数与反比例函数交点的综合, 负指数幂的运算, 掌握计算正比例函数解析, 反比例函数解析式, 负指数幂的运算是解题的关键.

13. 已知 x 和 $\frac{1}{y}$ 成正比例, y 和 $\frac{1}{z}$ 成反比例, 则 x 和 z 成_____比例.

【答案】 反.

【解析】

【分析】 根据正比例函数的一般形式是 $y=kx$ ($k \neq 0$), 反比例函数的一般形式是 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 进行设出解析式, 然后消去 y .

【详解】 $\because x$ 与 $\frac{1}{y}$ 成正比例, y 和 $\frac{1}{z}$ 成反比例,

$$\therefore x = \frac{k_1}{y}, y = \frac{1}{zk_2}.$$

$$\therefore x = \frac{k_1}{zk_2} = \frac{\frac{k_1}{k_2}}{z}.$$

$\therefore x$ 和 z 成反比例.

故答案为反.

【点睛】 本题应注意正比例函数和反比例函数, 比例系数不一定相同, 因而在设解析式时一定要用不同的字母表示.

14. 若直线 $y_1 = -\frac{x}{100}$ 与双曲线 $y_2 = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 的图像有两个交点, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 0$

【解析】

【分析】 根据直线 $y_1 = -\frac{x}{100}$ 的图像过二、四象限可知双曲线 $y_2 = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 的图像在二、四象限, 然后根据反比例函数图像与系数的关系得出答案.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y_1 = -\frac{x}{100}$ 的图像过二、四象限, 且直线 $y_1 = -\frac{x}{100}$ 与双曲线 $y_2 = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 的图像有两个交点,

$\therefore$ 双曲线 $y_2 = \frac{m}{x}$ ($m \neq 0$) 的图像在二、四象限,

$\therefore m < 0$,

故答案为: $m < 0$.

【点睛】 本题考查了一次函数与反比例函数的图象, 根据题意得出双曲线的图像在二、四象限是解题的关键.

15. 已知反比例函数 $y = \frac{m-1}{x}$ 的图像上两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, 有 $y_1 < y_2$, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 1$

【解析】

【分析】 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, 有 $y_1 < y_2$, 可知 y 随 x 的增大而增大, 由此可知图像经过第二、四象限, 由此即可求解.

【详解】 解: $\because$ 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $y_1 < y_2$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大, 反比例函数图像经过第二、四象限,

$\therefore m-1 < 0$,

$\therefore m < 1$,

故答案为: $m < 1$.

【点睛】 本题主要考查根据函数值的大小判断反比例函数图形的位置, 掌握根据反比例系数判断反比例函数图形的位置是解题的关键.

16. 已知 $y = y_1 + y_2$, y_1 与 x 成正比例, y_2 与 x 成反比例; 并且当 $x = 1$ 时, $y = 4$; 当 $x = 2$ 时, $y = 5$, 则当 $x = 4$ 时 y 的值为_____.

【答案】 $8\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 y_1 与 x 成正比例, y_2 与 x 成反比例, 设 $y_1 = k_1x$, $y_2 = \frac{k_2}{x}$, 当 $x = 1$ 时, $y = 4$; 当 $x = 2$ 时, $y = 5$, 求出 k_1 , k_2 的值, 由此可求出 $y = y_1 + y_2$, 由此即可求解.

【详解】 解: 根据题意得, 设 $y_1 = k_1x$, $y_2 = \frac{k_2}{x}$,

$\therefore y = k_1x + \frac{k_2}{x}$, 当 $x = 1$ 时, $y = 4$; 当 $x = 2$ 时, $y = 5$,

$\therefore \begin{cases} k_1 + k_2 = 4 \\ 2k_1 + \frac{k_2}{2} = 5 \end{cases}$, 解方程组得, $\begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 2 \end{cases}$,

$$\therefore y = 2x + \frac{2}{x},$$

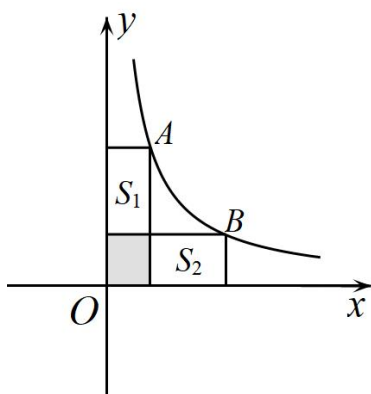
$$\text{当 } x = 4 \text{ 时, } y = 2 \times 4 + \frac{2}{4} = 8\frac{1}{2},$$

故答案为: $8\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题主要考查正比例函数与反比例函数的综合运用, 掌握正比例函数, 反比例函数的解析式的计算方法是解题的关键.

17. 如图, 点 A、B 是双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上的点, 分别经过 A、B 两点向 x 轴、y 轴作垂线段, 若 $S_{\text{阴影}} = 1$, 则

$$S_1 + S_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 4

【解析】

【详解】 解: $\because$ 点 A、B 是双曲线 $y = \frac{3}{x}$ 上的点, 分别经过 A、B 两点向 x 轴、y 轴作垂线段,

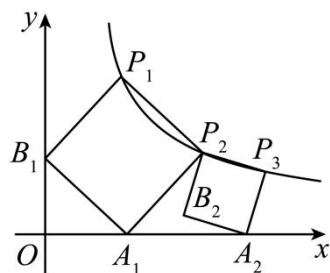
则根据反比例函数的图象的性质得两个矩形的面积都等于 $|k|=3$,

$$\therefore S_1 + S_2 = 3 + 3 - 1 \times 2 = 4.$$

故答案为: 4

18. 如图, 正方形 $A_1B_1P_1P_2$ 的顶点 P_1 、 P_2 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, 顶点 A_1 、 B_1 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上, 再在其右侧作正方形 $P_2P_3A_2B_2$, 顶点 P_3 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, 顶点 A_2

在 x 轴的正半轴上, 则点 P_3 的坐标为_____.



【答案】 $(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$

【解析】

【分析】作 $P_1C \perp y$ 轴于 C , $P_2D \perp x$ 轴于 D , $P_3E \perp x$ 轴于 E , $P_3F \perp P_2D$ 于 F , 设 $P_1(a, \frac{2}{a})$, 则 $CP_1 = a$, $OC = \frac{2}{a}$, 易得 $Rt \triangle P_1B_1C \cong Rt \triangle B_1A_1O \cong Rt \triangle A_1P_2D$, 则 $OB_1 = P_1C = A_1D = a$, 所以 $OA_1 = B_1C = P_2D = \frac{2}{a} - a$, 则 P_2 的坐标为 $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a} - a)$, 然后把 P_2 的坐标代入反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 得到 a 的方程, 解方程求出 a , 得到 P_2 的坐标; 设 P_3 的坐标为 $(b, \frac{2}{b})$, 易得 $Rt \triangle P_2P_3F \cong Rt \triangle A_2P_3E$, 则 $P_3E = P_3F = DE = \frac{2}{b}$, 通过 $OE = OD + DE = 2 + \frac{2}{b} = b$, 这样得到关于 b 的方程, 解方程求出 b , 得到 P_3 的坐标.

【详解】解: 作 $P_1C \perp y$ 轴于 C , $P_2D \perp x$ 轴于 D , $P_3E \perp x$ 轴于 E , $P_3F \perp P_2D$ 于 F , 如图所示:

设 $P_1(a, \frac{2}{a})$, 则 $CP_1 = a$, $OC = \frac{2}{a}$,

$\because$ 四边形 $A_1B_1P_1P_2$ 为正方形,

$\therefore \angle A_1B_1P_1 = 90^\circ$,

$\therefore \angle CB_1P_1 + \angle OB_1A_1 = 90^\circ$,

$\because \angle CB_1P_1 + \angle CP_1B_1 = 90^\circ$, $\angle OB_1A_1 + \angle OA_1B_1 = 90^\circ$,

$\therefore \angle CB_1P_1 = \angle OA_1B_1$,

在 $\triangle P_1B_1C$ 和 $\triangle B_1A_1O$ 中,
$$\begin{cases} \angle B_1CP_1 = \angle B_1OA_1 = 90^\circ \\ \angle OB_1A_1 = \angle CP_1B_1 \\ B_1P_1 = A_1B_1 \end{cases},$$

$\therefore \triangle P_1B_1C \cong \triangle B_1A_1O (AAS)$,

同理: $\triangle B_1A_1O \cong \triangle A_1P_2D$,

$\therefore OB_1 = P_1C = A_1D = a$,

$\therefore OA_1 = B_1C = P_2D = \frac{2}{a} - a$,

$\therefore OD = a + \frac{2}{a} - a = \frac{2}{a}$,

$\therefore P_2$ 的坐标为 $(\frac{2}{a}, \frac{2}{a} - a)$,

把 P_2 的坐标代入 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 得: $(\frac{2}{a} - a) \cdot \frac{2}{a} = 2$,

解得: $a = -1$ (舍去) 或 $a = 1$,

$\therefore P_2(2, 1)$,

设 P_3 的坐标为 $(b, \frac{2}{b})$,

又 $\because$ 四边形 $P_2P_3A_2B_2$ 为正方形,

同上: $\triangle P_2P_3F \cong \triangle A_2P_3E$,

$\therefore P_3E = P_3F = DE$,

$\therefore OE = OD + DE = 2 + \frac{2}{b}$,

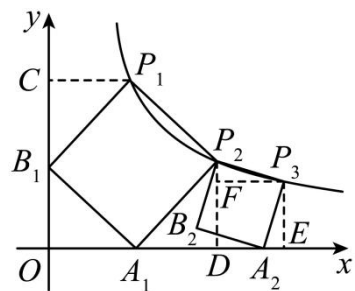
$\therefore 2 + \frac{2}{b} = b$,

解得: $b = 1 - \sqrt{3}$ (舍去), $b = 1 + \sqrt{3}$,

$\therefore \frac{2}{b} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$,

$\therefore$ 点 P_3 的坐标为 $(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$.

故答案为: $(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$.



故答案是: $(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$.

【点睛】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特点为横纵坐标之积为定值; 也考查了正方形的性质和三角形全等的判定与性质以及解分式方程的方法.

二、选择题 (本大题共 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

19. 下列说法正确的是 ()

A. 等边三角形的面积与边长成反比例

B. 人的身高与体重成正比例

C. 车在行驶中, 速度与时间成反比例

D. 面积为 8 平方厘米的长方形的长与宽成反比例

【答案】 D

【解析】

【分析】根据正比例函数，反比例函数的定义和性质，即可求解.

【详解】解：A 选项，等边三角形的面积与边长的关系可表示为 $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$ ，是正比例关系，故 A 选项错误，不符合题意；

B 选项，人的身高与体重不一定是正比例关系，故 B 选项错误，不符合题意；

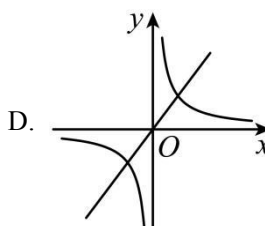
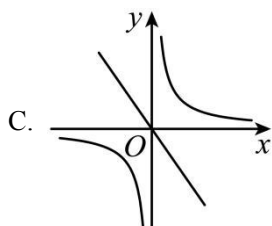
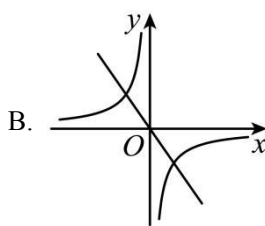
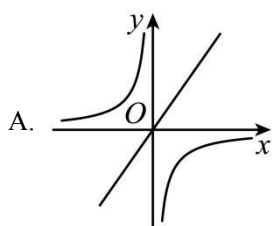
C 选项，车在行驶中，速度与时间的关系可表示为 $v = \frac{s}{t} (v \neq 0, t \neq 0)$ ，路程不确定，不可以确定速度与时间的关系，故 C 选项错误，不符合题意；

D 选项，面积为 8 平方厘米的长方形的长与宽的关系可表示为 $a = \frac{8}{b} (a \neq 0, b \neq 0)$ ，是反比例关系，故 D 选项正确，符合题意.

故选：D.

【点睛】本题主要考查正比例函数，反比例函数的定义，掌握正比例函数，反比例函数的定义是解题的关键.

20. 已知函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，那么它和函数 $y = kx (k \neq 0)$ 在同一直角坐标平面内的大致图象是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】先根据反比例函数图象的性质判断出 k 的范围，再确定其所在象限，进而确定正比例函数图象所在象限即可解答.

【详解】解：∵ 函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，

∴ $k < 0$,

∴ 双曲线在第二、四象限，函数 $y = kx$ 的图象经过第二、四象限，

∴ B 选项满足题意

故选： B .

【点睛】 本题主要考查了反比例函数图象的性质与正比例函数图象的性质，掌握 k 对正比例函数和反比例函数图象的影响成为解答本题的关键.

21. 已知反比例函数 $y = \frac{-k^2-2}{x}$ 的图像上有三个点： $A(2, y_1)$ ， $B(3, y_2)$ ， $C(-1, y_3)$ ， 则 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_3 > y_2 > y_1$ B. $y_2 > y_1 > y_3$ C. $y_3 > y_1 > y_2$ D. $y_1 > y_2 > y_3$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据反比例函数图形的性质， 对称性即可求解.

【详解】 解： ∵ 反比例函数 $y = \frac{-k^2-2}{x}$ 中， $-k^2-2 < 0$ ，

∴ 图像经过第二、四象限， 当 $x < 0$ 时， $y > 0$ ， y 随 x 的增大而增大； 当 $x > 0$ 时， $y < 0$ ， y 随 x 的增大而增大，

∵ $A(2, y_1)$ ， $B(3, y_2)$ ， $C(-1, y_3)$ 在反比例函数 $y = \frac{-k^2-2}{x}$ 的图象上，

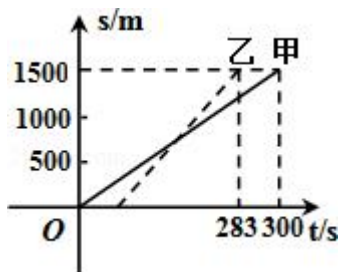
∴ $y_3 > 0$ ， $y_1 < y_2 < 0$ ，

∴ $y_3 > y_2 > y_1$ ，

故选： A .

【点睛】 本题主要考查反比例函数图象的性质， 掌握反比例函数图形的性质是解题的关键.

22. 甲、乙两人赛跑， 所跑路程与时间的关系如图（实线为甲的路程与时间的关系图象， 虚线为乙的路程与时间的关系图象）， 小王根据图象得到如下四条信息， 其中错误的是 ()



- A. 这是一次 1500m 赛跑
B. 甲、乙同时起跑
C. 甲、乙两人中先到达终点的是乙
D. 甲在这次赛跑中的速度为 5m/s

【答案】B

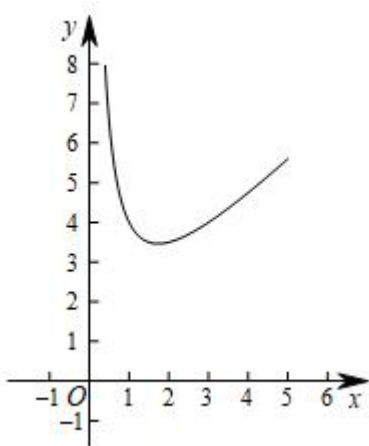
【解析】

【详解】从图中可获取的信息有：

这是一次 1500 米赛跑，A 正确，甲，乙两人中先到达终点的是乙，C 正确，甲在这次赛跑中的速度为 $1500 \div 300 = 5$ 米/秒，D 正确，甲比乙先跑，B 错误。

故选 B.

23. 已知：函数 $y = x + \frac{3}{x} (x > 0)$ 的图象如图，则当 $y > 4$ 时， x 的范围是 ()



A. $x < 1$

B. $x > 3$

C. $x < 1$ 或 $x > 3$

D. $0 < x < 1$ 或 $x > 3$

【答案】D

【解析】

【分析】先求出当 $y = 4$ 时对应的 x 的值，再根据函数图象的特征即可求得结果.

【详解】当 $y = 4$ 时， $x + \frac{3}{x} = 4$ ，解得 $x = 1$ 或 3 ，

所以当 $y > 4$ 时， x 的范围是 $0 < x < 1$ 或 $x > 3$

故选 D.

【点睛】函数的图象问题是初中数学的重点，是中考常见题，一般难度不大，需熟练掌握.

考点：函数的图象

三、解答题（第 24~27 题，每题 6 分；第 28~29 题，每题 7 分；第 30~31 题，每题 8 分，共 54 分）

24. 计算： $\sqrt{12} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 8^{\frac{1}{3}} + |2 - \sqrt{3}|$

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的化简，分数指数幂的运算，绝对值的性质即可求解.

【详解】 解： $\sqrt{12} - \frac{1}{\sqrt{3}} - 8^{\frac{1}{3}} + |2 - \sqrt{3}|$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt[3]{8} + (2 - \sqrt{3})$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 + 2 - \sqrt{3}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】 本题主要考查的是实数的运算，包括二次根式的化简，分母有理化，分数指数幂，绝对值的性质，掌握实数的运算法则解题的关键.

25. 计算： $|\sqrt{3} - 1| - 4^{\frac{1}{2}} - \sqrt{12} + (\frac{1}{3})^{-2}$.

【答案】 $6 - \sqrt{3}$.

【解析】

【详解】 试题分析：根据绝对值、分数指数幂，二次根式、负指数幂的定义解答即可.

试题解析：原式 $= \sqrt{3} - 1 - 2 - 2\sqrt{3} + 9 = 6 - \sqrt{3}$.

考点：实数的运算.

26. 已知： $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, $y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, 求 $x^2 - 2022xy + y^2$ 的值.

【答案】 -1988

【解析】

【分析】 先把 $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, $y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ 化简，再把 $x^2 - 2022xy + y^2$ 变形为 $(x-y)^2 - 2020xy$ 代入计算即可.

$$\text{【详解】} \because x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 3-2\sqrt{2}, \quad y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 3+2\sqrt{2},$$

$$\begin{aligned} & \therefore x^2 - 2022xy + y^2 \\ &= x^2 - 2xy + y^2 - 2020xy \\ &= (x-y)^2 - 2020xy \\ &= \left[(3-2\sqrt{2}) - (3+2\sqrt{2}) \right]^2 - 2020 \times (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) \\ &= (-4\sqrt{2})^2 - 2020 \times (9-8) \\ &= 32 - 2020 \\ &= -1988 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的运算法则是解答本题的关键，整式的乘法的运算公式及运算法则对二次根式的运算同样适应.

27. 已知方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 的一个根为 2，求另一个根及 m 的值.

【答案】 方程的另一个根是 4， m 的值是 -1 或 3

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的判别式，确定 m 的取值范围，再根据方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 的一个根为 2，求出 m 的值，代入 m 的值，即可求解.

【详解】 解：方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ ，则 $a = 1$ ， $b = -6$ ， $c = m^2 - 2m + 5$ ，

$\therefore$ 方程有两个根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (m^2 - 2m + 5) \geq 0,$$

$$\therefore m^2 - 2m - 4 \leq 0,$$

$$\therefore 1 - \sqrt{5} \leq m \leq 1 + \sqrt{5},$$

$\therefore$ 方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 的一个根为 2，

$$\therefore 4 - 12 + m^2 - 2m + 5 = 0, \text{ 则 } m_1 = -1, \quad m_2 = 3,$$

当 $m = -1$ 时，方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 得， $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0$ ，

$$\therefore x_1 = 2, \quad x_2 = 4;$$

当 $m=3$ 时, 方程 $x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 得, $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4) = 0$,

$$\therefore x_3 = 2, \quad x_4 = 4,$$

$\therefore x^2 - 6x + m^2 - 2m + 5 = 0$ 的一个根为 2, 求另一个根是 4, m 的值是 -1 或 3.

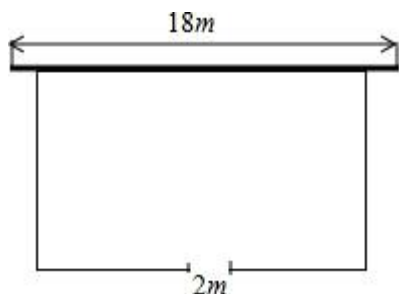
故答案为: 方程的另一个根是 4, m 的值是 -1 或 3.

【点睛】 本题主要考查根的判别式, 根据一个根求另有一个根, 及参数的值, 掌握根的判别式, 解一元二次方程的方法, 分类讨论的方法是解题的关键.

28. 如图, 若要建一个长方形鸡场, 鸡场的一边靠墙, 墙对面有一个 2 米宽的门, 另三边用竹篱笆围成, 篱笆总长 33 米.

(1) 若墙长为 18 米, 要围成鸡场的面积为 150 平方米, 则鸡场的长和宽各为多少米?

(2) 围成鸡场的面积可能达到 200 平方米吗?



【答案】 (1) 长为 15 米, 宽为 10 米; (2) 不可能达到 200 平方米.

【解析】

【详解】 试题分析: (1) 若鸡场面积 150 平方米, 求鸡场的长和宽, 关键是用一个未知数表示出长或宽, 并注意去掉门的宽度;

(2) 求二次函数的最值问题, 因为 $a < 0$, 所以当 $(x - \frac{35}{4})^2 = 0$ 时函数式有最大值.

试题解析:

(1) 设宽为 x 米, 则: $x(33 - 2x + 2) = 150$,

解得: $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{15}{2}$ (不合题意舍去),

$\therefore$ 长为 15 米, 宽为 10 米;

(2) 设面积为 w 平方米, 则: $W = x(33 - 2x + 2)$,

变形为: $W = -2(x - \frac{35}{4})^2 + \frac{1225}{8}$

故鸡场面积最大值为 $\frac{1225}{8} < 200$, 即不可能达到 200 平方米.

29. 已知函数 $y = ax$ 和 $y = \frac{4-a}{x}$ 的图像有两个交点, 其中一个交点的横坐标为 1, 求这两个函数图像的交

点坐标.

【答案】 $(-1, -2)$, $(1, 2)$

【解析】

【分析】 根据函数有交点, 联立方程组, 将一个交点的横坐标为 1 代入, 即可求出 a 的值, 从而求出函数解析式, 联立两个函数, 即可求解出两个交点坐标.

【详解】 解: 函数 $y = ax$ 和 $y = \frac{4-a}{x}$ 的图像有两个交点, 联立方程组得,
$$\begin{cases} y = ax \\ y = \frac{4-a}{x} \end{cases}$$
, 且一个交点的横坐标

标为 1,

$\therefore a = 4 - a$, 则 $a = 2$,

$\therefore$ 函数的解析式为, $y = 2x$, $y = \frac{2}{x}$,

$\therefore \begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{2}{x} \end{cases}$, 解方程组得, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$,

$\therefore$ 这两个函数图像的交点坐标分别是 $(-1, -2)$, $(1, 2)$.

【点睛】 本题主要考查正比例函数, 反比例函数交点的综合运用, 掌握正比例函数解析式, 反比例函数解析式的计算方法是解题的关键.

30. 某水电站的蓄水池有 2 个进水口, 1 个出水口, 每个进水口进水量与时间的关系如图 (甲) 所示, 出水口出水提与时间的关系如图 (乙) 所示. 已知某天 0 点到 6 点, 进行机组试运行, 试机时至少打开一个水口, 且该水池的蓄水量与时间的关系如图 (丙) 所示, 根据图像说明:

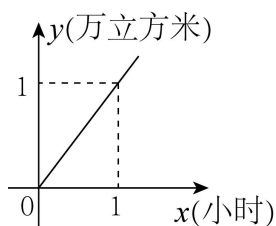


图 (甲)

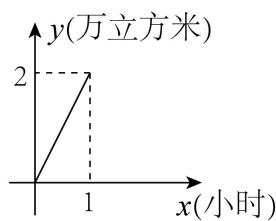


图 (乙)

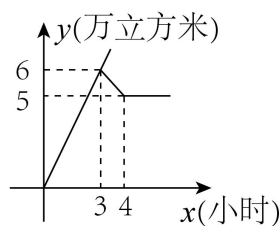


图 (丙)

- (1) 进水口单位时间内进水量是多少? 出水口单位时间内出水量是多少?
- (2) 求 0 点到 3 点这段时间水池内水量 y 与时间 x 的函数解析式及定义域;
- (3) 试说明 3 点到 4 点和 4 点到 6 点这个时间段内进出水口的开放情况.

【答案】 (1) 1 (万立方米/时), 2 (万立方米/时)

(2) $y = 2x (0 \leq x \leq 3)$

(3) 3 点到 4 点时一只进水管进水，一只出水管出水；4 点到 6 点时两只进水管进水，一只出水管出水

【解析】

【分析】(1) 根据图甲，乙可知进水口的进水量，出水口的出水量，由此即可求解；

(2) 根据图丙，可知 0 点到 3 点只有进水管进水，由此即可求解；

(3) 根据图丙，从 3 点开始水量下降，到 4 点时保持不变，从 4 点到 6 点时水池水量保持不变，由此即可求解.

【小问 1 详解】

解：由图甲可知，当时间是 1 小时时，进水量为 1 万立方米，从图乙可知，当时间是 1 小时时，出水量为 2 万立方米，

$\therefore$ 进水口单位时间内进水量是 1（万立方米/时），出水口单位时间内出水量是 2（万立方米/时）.

【小问 2 详解】

解：0 点到 3 点，则有 $(0,0)$ ， $(3,6)$ ，根据图丙，设水量 y 与时间 x 的函数解析式为 $y=kx(k \neq 0)$ ，

$\therefore 3k=6$ ，则 $k=2$ ，

$\therefore$ 水量 y 与时间 x 的函数解析式为 $y=2x$ ，定义域为 $0 \leq x \leq 3$.

【小问 3 详解】

解：3 点到 4 点，根据图丙得， $(3,6)$ ， $(4,5)$ ，设直线方程的解析式为 $y=k_1x+b_1$ ，

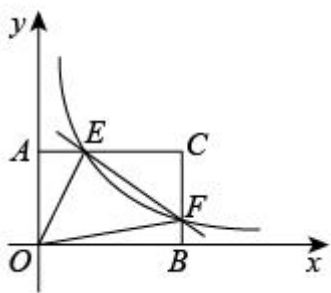
$$\therefore \begin{cases} 3k_1+b_1=6 \\ 4k_1+b_1=5 \end{cases}, \text{解方程组得, } \begin{cases} k_1=-1 \\ b_1=9 \end{cases},$$

$\therefore$ 3 点到 4 点时的直线方程为 $y=-x+9(3 \leq x \leq 4)$ ，即一只进水管进水，一只出水管出水；

当时间从 4 点到 6 点时，若一只进水管进水，一只出水管出水，则水池的水量 $y < 5$ ，从图丙可知，水位恒定在 5 万立方米，则两只进水管进水，一只出水管出水.

【点睛】本题主要考查一次函数图形的性质，理解函数图形的性质，对图形上数据分分析，结合实际情况得出结论是解题的关键.

31. 在矩形 $AOBC$ 中， $OB=4$ ， $OA=3$ 分别以 OB 、 OA 在直线为 x 轴和 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系. F 是边 BC 上的一个动点（不与 B 、 C 合），过点 F 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图像与 AC 边交于点 E .



(1) 求证: $\triangle AOE$ 与 $\triangle BOF$ 的面积相等;

(2) 记 $S = S_{\triangle OEF} - S_{\triangle ECF}$, 求当 k 为何值时, S 有最大值, 最大值是多少?

【答案】(1) 证明过程见详解

(2) 当 $k=6$ 时, S 有最大面积, 最大面积为 3

【解析】

【分析】(1) 设 $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$, 根据点 E , F 在反比例函数图像上, 则可求出 $x_1 y_1 = k$, $x_2 y_2 = k$, 且 $S_{\triangle AOE} = S_1 = \frac{1}{2} x_1 y_1$, $S_{\triangle BOF} = S_2 = \frac{1}{2} x_2 y_2$, 由此即可求证;

(2) 确定 $E\left(\frac{k}{3}, 3\right)$, $F\left(4, \frac{k}{4}\right)$, $S_{\triangle ECF} = \frac{1}{2} EC \cdot CF = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{k}{3}\right) \left(3 - \frac{k}{4}\right)$,

$S_{\triangle EOF} = S_{\text{矩形}AOBC} - S_{\triangle AOE} - S_{\triangle BOF} - S_{\triangle ECF}$, 将 $S = S_{\triangle EOF} - S_{\triangle ECF}$ 转化为含有 k 的一元二次方程, 根据一元二次方程的顶点式即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 设 $E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$, $\triangle AOE$ 的面积为 S_1 , $\triangle BOF$ 的面积为 S_2 ,

$\because E(x_1, y_1)$, $F(x_2, y_2)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图像上,

$\therefore y_1 = \frac{k}{x_1}$, $y_2 = \frac{k}{x_2}$, 则 $x_1 y_1 = k$, $x_2 y_2 = k$,

$\therefore S_{\triangle AOE} = S_1 = \frac{1}{2} x_1 y_1 = \frac{1}{2} k$, $S_{\triangle BOF} = S_2 = \frac{1}{2} x_2 y_2 = \frac{1}{2} k$,

$\therefore S_{\triangle AOE} = S_{\triangle BOF} = \frac{1}{2} k$.

【小问 2 详解】

解: 根据题意可知, $E\left(\frac{k}{3}, 3\right)$, $F\left(4, \frac{k}{4}\right)$,

$\therefore S_{\triangle ECF} = \frac{1}{2} EC \cdot CF = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{k}{3}\right) \left(3 - \frac{k}{4}\right)$,

$$\therefore S_{\triangle EOF} = S_{\text{矩形}AOBC} - S_{\triangle AOE} - S_{\triangle BOF} - S_{\triangle ECF}, \text{ 即 } S_{\triangle EOF} = 12 - \frac{k}{2} - \frac{k}{2} - S_{\triangle ECF} = 12 - k - S_{\triangle ECF},$$

$$\therefore S = S_{\triangle OEF} - S_{\triangle ECF} = 12 - k - 2S_{\triangle ECF} = 12 - k - 2 \times \frac{1}{2} \left(4 - \frac{k}{3} \right) \left(3 - \frac{k}{4} \right), \text{ 即}$$

$$S = -\frac{1}{12}k^2 + k = -\frac{1}{12}(k-6)^2 + 3,$$

$\therefore$ 当 $k=6$ 时, S 有最大面积, 最大面积为 3.

【点睛】本题主要考查矩形的性质, 反比例函数与几何的综合问题, 掌握反比例函数图形的性质, 矩形的性质是解题的关键.

四、探究题 (本小题共 4 空, 每空 1 分, 共 4 分)

32. 阅读下列材料并完成练习题:

已知一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根分别为 x_1 和 x_2

$$\therefore ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

$$\text{对比系数可得: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

类比上面的证明方法:

(1) 如果一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2, x_3 ,

$$x_1 + x_2 + x_3 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad x_1x_2x_3 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 已知方程 $2x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$, 求值: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】(1) $-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, -\frac{d}{a}$

(2) $3\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】(1) 将一元三次方程按照一元二次方程的方式因式分解为 $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, 再将其按照多项式乘以多项式的方式展开, 最后得到 $-a(x_1 + x_2 + x_3) = b$, $a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = c$, $-ax_1x_2x_3 = d$, 由此即可求解;

(2) 由 (1) 的结论代入即可求得 $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$, $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{1}{2}$, 再将 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 变形为 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$, 由此

即可求解.

【小问 1 详解】

解: 根据材料提示得, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2](x - x_3)$$

$$= a[x^3 - x^2x_3 - (x_1 + x_2)x^2 + (x_1 + x_2)x_3x + x_1x_2x - x_1x_2x_3]$$

$$= a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3]$$

$$= ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - ax_1x_2x_3 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

$$\therefore -a(x_1 + x_2 + x_3) = b, \quad a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = c, \quad -ax_1x_2x_3 = d,$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{b}{a}, \quad \frac{c}{a}, \quad -\frac{d}{a}.$$

【小问 2 详解】

解: 根据 (1) 的结论得, 一元三次方程 $2x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$ 中, $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$, $d = 1$,

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}, \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{且 } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3),$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} + 3 = 3\frac{1}{4},$$

$$\text{故答案为: } 3\frac{1}{4}.$$

【点睛】 本题主要考查根据一元二次方程的韦达定理推理一元三次方程中根与系数的关系, 掌握一元二次方程中根与系数的关系, 多项式乘以多项式的运算法则是解题的关键.