

青教院附中 2024 学年第一学期期中考试

八年级数学试卷

2023 年 11 月

(满分 100 分, 考试时间 90 分钟)

一、选择题 (4×3 分 = 12 分)

1. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{96}$ B. $\sqrt{\frac{1}{6}}$ C. $\sqrt{91}$ D. $\sqrt{20}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式的性质、最简二次根式的定义等知识点. 最简二次根式必须满足两个条件: (1) 被开方数不含分母; (2) 被开方数不含能开得尽方的因数或因式. 根据最简二次根式的定义逐个判断即可.

【详解】解: A: $\because \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$, $\therefore \sqrt{96}$ 不是最简二次根式, 不符合题意;

B: $\because \sqrt{\frac{1}{6}}$ 被开方数是分数, $\therefore$ 不是最简二次根式, 不符合题意;

C: $\sqrt{91}$ 是最简二次根式, 符合题意;

D: $\because \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $\therefore \sqrt{20}$ 不是最简二次根式, 不符合题意;

故选: C.

2. 在下列二次根式中, 与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{6a}$ B. $\sqrt{4a^2}$ C. $\sqrt{a^{13}}$ D. $\sqrt{a^{10}}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了同类二次根式, 熟练掌握同类二次根式的定义是解题的关键. 根据同类二次根式的定义, 先化简, 再判断.

【详解】解: A、 $\sqrt{6a}$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数不同, 故不是同类二次根式;

B、 $\sqrt{4a^2} = 2|a|$ 不是二次根式, 故与 $\sqrt{a}$ 不是同类二次根式;

C、 $\sqrt{a^{13}} = a^6\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{a}$ 被开方数相同，故是同类二次根式；

D、 $\sqrt{a^{10}} = |a^5|$ 不是二次根式，故与 $\sqrt{a}$ 不是同类二次根式。

故选 C.

3. 下列方程一定是一元二次方程的是 ()

A. $xy + x = y$

B. $x^2 = -2$

C. $ax^2 + 2x = 0$

D. $(x-5)x = x^2 - 5x - 1$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程的定义，根据一元二次方程的定义逐项判断即可。

【详解】 因为 $xy + x = y$ 是二元方程，所以 A 不符合题意；

因为 $x^2 = -2$ 是一元二次方程，所以 B 符合题意；

因为当 $a = 0$ 时 $ax^2 + 2x = 0$ 不是一元二次方程，所以 C 不符合题意；

因为 $(x-5)x = x^2 - 5x - 1$ 整理得 $x^2 - 5x = x^2 - 5x - 1$ ，即 $0 = -1$ ，所以 D 不符合题意。

故选：B.

4. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与函数 $y = \frac{1}{6}x$ 的图象没有交点，若点 $\left(-\frac{3}{2}, y_1\right)$ 、 $\left(-\frac{6}{7}, y_2\right)$ 、 $\left(\frac{1}{3}, y_3\right)$ 在

这个反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，则下列结论中正确的是 ()

A. $y_1 > y_2 > y_3$

B. $y_2 > y_1 > y_3$

C. $y_3 > y_1 > y_2$

D. $y_3 > y_2 > y_1$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数和正比例函数的图形与性质，熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键。

先根据两个函数没有交点，确定 k 的符号，再根据函数的增减性，进行判断即可。

【详解】 $\because$ 函数 $y = \frac{1}{6}x$ 经过一、三象限，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与函数 $y = \frac{1}{6}x$ 的图象没有交点，

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在二、四象限，

$\therefore \left(-\frac{3}{2}, y_1\right), \left(-\frac{6}{7}, y_2\right), \left(\frac{1}{3}, y_3\right)$ 在这个反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上,

$\therefore$ 点 $\left(-\frac{3}{2}, y_1\right), \left(-\frac{6}{7}, y_2\right)$ 在第二象限, 点 $\left(\frac{1}{3}, y_3\right)$ 在第四象限,

$$\therefore -\frac{3}{2} < -\frac{6}{7},$$

$$\therefore y_2 > y_1 > 0,$$

$$\therefore \frac{1}{3} > 0,$$

$$\therefore y_3 < 0,$$

$$\therefore y_2 > y_1 > y_3,$$

故选: B.

二、填空题 (14 × 2 分 = 28 分)

5. 写出 $\sqrt{a-1}$ 的一个有理化因式: _____.

【答案】 $\sqrt{a-1}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质, 求解即可.

【详解】 解: $\therefore (\sqrt{a-1}) \times (\sqrt{a-1}) = a-1,$

$\therefore \sqrt{a-1}$ 的一个有理化因式为 $\sqrt{a-1},$

故答案为: $\sqrt{a-1}$ (答案不唯一)

【点睛】 本题主要考查分母有理化的方法, 分母有理化常常是乘二次根式本身 (分母只有一项) 或与原分母组成平方差公式, 解题的关键是掌握分母有理化的方法.

6. 若最简二次根式 $^{2a-4}\sqrt{3a+b}$ 与 $\sqrt{a-b}$ 是同类根式, 则 $a-3b =$ _____.

【答案】 12

【解析】

【分析】 此题考查了同类二次根式的定义, 熟记定义是解题的关键.

根据同类二次根式的定义, 可得 $2a-4=2$, $3a+b=a-b$, 求出 a 、 b , 代入 $a-3b$ 即可求解.

【详解】 $\therefore$ 二次根式 $^{2a-4}\sqrt{3a+b}$ 与 $\sqrt{a-b}$ 是同类根式,

$$\therefore 2a-4=2, \quad 3a+b=a-b,$$

解得： $a=3$ ， $b=-3$ ，

$$\therefore a-3b=3-3\times(-3)=12,$$

故答案为： 12.

7. 化简： $\sqrt{(3-\pi)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\pi-3$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质即可求出答案.

【详解】 解： 原式 $=|3-\pi|=\pi-3$

故答案为： $\pi-3$.

【点睛】 本题考查二次根式的性质与化简，解题的关键是熟练运用二次根式的性质，本题属于基础题型.

8. 计算： $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{2023} \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2024} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的混合运算、平方差公式及积的乘方的逆用，熟练掌握各个运算是解题的关键；因此此题可根据积的乘方、平方差公式及二次根式的运算法则进行求解.

【详解】 解： 原式 $= [(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3})]^{2023} \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3})$
 $= (2-3)^{2023} \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3})$
 $= \sqrt{3}-\sqrt{2};$

故答案为 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

9. 不等式 $\sqrt{2}x+3 < \sqrt{3}x$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $x > 3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的应用，利用不等式的基本性质，将不等式未知项和常数项各移到一边，解得 x 的解集，解题的关键是熟悉不等式的基本性质：不等式的两边同时除以负数，不等号的方向发生改变.

【详解】 解： 由 $\sqrt{2}x+3 < \sqrt{3}x$ ， 得：

$$\sqrt{2}x-\sqrt{3}x < -3,$$

$$\therefore (\sqrt{2}-\sqrt{3})x < -3,$$

$$\text{解得: } x > 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2},$$

$$\text{故答案为: } x > 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}.$$

10. 方程 $x^2 = -4x$ 的根是_____.

【答案】 0 和-4.

【解析】

【分析】 根据因式分解即可求解.

【详解】 解 $x^2 = -4x$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+4) = 0$$

$$\therefore x_1=0, x_2=-4,$$

故填: 0 和-4.

【点睛】 此题主要考查一元二次方程的求解, 解题的关键是熟知一元二次方程的解法.

11. 方程 $x^2 + 6x = 16$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = -8$, $x_2 = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 先移项然后根据因式分解法解一元二次方程, 即可求解.

【详解】 解: $x^2 + 6x = 16$

$$\therefore x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$\therefore (x+8)(x-2) = 0$$

$$\text{解得: } x_1 = -8, x_2 = 2,$$

$$\text{故答案为: } x_1 = -8, x_2 = 2.$$

12. 在实数范围内因式分解: $-2x^2 - 2x + 1 =$ _____.

【答案】 $-2\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程，先利用求根公式求出方程的根，然后根据题目中所说的方法进行分解因式即可，解题关键是熟练掌握求方程的根再分解因式的方法.

【详解】 解： 令 $-2x^2 - 2x + 1 = 0$,

$$\text{解得: } x_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -\frac{1-\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore -2x^2 - 2x + 1 = -2\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{故答案为: } -2\left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

13. 在 2019 年 11 月 11 日, 某商品销售额为 2.35 亿人民币. 在 2023 年同日, 销售额增长到 6.38 亿人民币. 设这几年来销售额的平均增长率为 x , 则根据题意可列出方程_____.

【答案】 $2.35(1+x)^4 = 6.38$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的增长率问题，一般用增长后的量=增长前的量 $\times$ (1+增长率) n ，参照本题，等量关系列方程即可.

【详解】 根据题意得: $2.35(1+x)^4 = 6.38$,

故答案为: $2.35(1+x)^4 = 6.38$.

14. 方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 没有实数根, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 1$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程无实数根得到 $\Delta < 0$, 代入即可得出答案.

【详解】 $\because$ 方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 没有实数根,

$$\therefore \Delta = 4 - 4 \times 1 \times m < 0,$$

$$\therefore m > 1,$$

故答案为: $m > 1$.

【点睛】 本题考查一元二次方程有无实数根，熟记判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 是解题的关键.

15. 反比例函数 $y = \frac{2m-3}{x}$ 的图象经过第二、四象限, 实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的性质，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ， $k > 0$ 时，图象在第一、三象限，呈下降趋势，当 $k < 0$ 时，图象在第二、四象限，呈上升趋势．根据反比例函数的图象经过第二、四象限列出关于 m 的不等式，求出 m 的取值范围即可．

【详解】解：∵ 反比例函数 $y = \frac{2m-3}{x}$ 的图象经过第二、第四象限，

$$\therefore 2m-3 < 0,$$

$$\therefore m < \frac{3}{2}$$

故答案为： $m < \frac{3}{2}$ ．

16. 已知 $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ ，如果 $f(a) = \sqrt{2}$ ，那么 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

【答案】 $1+2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据函数值的概念得到关于 a 的分式方程，解方程即可得到答案．

【详解】由题意得 $\frac{a+3}{a+1} = \sqrt{2}$ ，

解得 $a = 1+2\sqrt{2}$ ，

检验：当 $a = 1+2\sqrt{2}$ 时， $a+1 \neq 0$ ，

∴ $a = 1+2\sqrt{2}$ 是原方程的解，

故答案为 $1+2\sqrt{2}$ ．

【点睛】本题考查的是函数，熟练掌握概念是解题的关键．

17. 我国南宋时期数学家秦九韶曾提出利用三角形的三边求面积的公式，即三角形的三边长为 a 、 b 、 c ，记 $p = \frac{a+b+c}{2}$ ，那么其面积 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ．如果某个三角形的三边长分别为 5，6，7 时，其面积 S 介于整数 n 和 $n+1$ 之间，那么 n 的值是 ．

【答案】 14

【解析】

【分析】根据题意，先求出 p ，然后求出 S ，代入公式即可求 S ，再根据二次根式比较大小的方法，即可求解．

【详解】解：∵三角形的三边长为 a 、 b 、 c ，记 $p = \frac{a+b+c}{2}$ ，面积 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ，

∴当三角形的三边长分别为 5，6，7 时， $p = \frac{5+6+7}{2} = 9$ ，

∴面积 $s = \sqrt{9 \times (9-5) \times (9-6) \times (9-7)} = \sqrt{216}$ ，

∵ $14^2 = 196$ ， $15^2 = 225$ ，

∴ $196 < 216 < 225$ ，

∴ $14 < \sqrt{216} < 15$ ，

∴ S 介于整数 n 和 $n+1$ 之间，

∴ $n = 14$ 。

故答案为：14。

【点睛】本题考查二次根式的应用，估算二次根式的值，解题的关键是理解题意，求出 P ， S ；掌握二次根式比较大小的方法。

18. 等腰三角形的一边长为 1，另两边的长是关于 x 的方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 的两根，那么其周长是_____。

【答案】7

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式，等腰三角形的性质，三角形三边关系，掌握一边分别为腰长和底边两种情况，进行分类讨论是解题的关键。

分别讨论当 1 为底时，腰长为方程的两个相等的实数根，根据判别式的意义得出 $\Delta = (-6)^2 - 4k = 0$ ，解方程；当腰长为 1，则 $x = 1$ 为方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 的一个根，求出 k ，转化一元二次方程，求出解，并根据三角形三边关系判断，即可得出三角形周长。

【详解】当底边为 1 时，则腰长为方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 的两个相等的根，

∴ $\Delta = (-6)^2 - 4k = 0$ ，解得 $k = 9$ ，

方程转化为 $x^2 - 6x + 9 = 0$ ，解得： $x_1 = x_2 = 3$

∴ 1、3、3 符合三角形三边关系，

当腰长为 1 时，则 $x = 1$ 为方程的一个根，

∴ $1 - 6 + k = 0$ ，解得 $k = 5$ ，

方程转化为 $x^2 - 6x + 5 = 0$ ，解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 5$ ，

∴ $1 + 1 < 5$ ，

∴ 1、1、5 不符合三角形三边关系，不能构成三角形，舍去，

∴ 三角形的周长为 $1+3+3=7$,

故答案为: 7

三、解答题 (19~24 题, 每题 6 分; 第 25、26 题每题 7 分, 共计 50 分)

19. 计算: $2\sqrt{\frac{2}{3m}} \div \frac{1}{6}\sqrt{6m} \cdot \sqrt{8m^3}$

【答案】 $8\sqrt{2m}$

【解析】

【分析】 先进行分母有理化, 然后进行二次根式的乘除运算即可.

【详解】 解:
$$= 2\sqrt{\frac{2}{3m}} \cdot \frac{6}{\sqrt{6m}} \cdot 2m\sqrt{2m}$$
$$= 8\sqrt{2m}$$

故答案为 $8\sqrt{2m}$

【点睛】 本题主要考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握运算顺序与运算是解题的关键.

20. 解方程: $\frac{1}{3}(2x-3)^2 - 25 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{3+5\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{3-5\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 根据直接开平方法解一元二次方程, 即可求解.

【详解】 解: $\frac{1}{3}(2x-3)^2 - 25 = 0,$

$$(2x-3)^2 = 75,$$

即 $2x-3 = \pm 5\sqrt{3},$

解得: $x_1 = \frac{3+5\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{3-5\sqrt{3}}{2}.$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程, 掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

21. 用配方法解方程: $x^2 - 2\sqrt{2}x - 4 = 0$

【答案】 $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}, x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6}$

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程-配方法：将一元二次方程配成 $(x+m)^2=n$ 的形式，再利用直接开平方法求解，这种解一元二次方程的方法叫配方法。

移项，然后两边都加上一次项系数的一半的平方，再根据完全平方公式整理，然后求解即可。

【详解】解：移项得， $x^2 - 2\sqrt{2}x = 4$ ，

配方得， $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 4 + 2$ ，

即 $(x - \sqrt{2})^2 = 6$ ，

$x - \sqrt{2} = \pm\sqrt{6}$ ，

$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ ， $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6}$ 。

$\therefore$ 方程的解为 $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ ， $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6}$ 。

22. 在实数范围内因式分解： $-2x^2 + 3xy + y^2$ 。

【答案】 $-2\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}y\right)$

【解析】

【分析】本题考查特殊方法分解因式，涉及二次根式性质等知识，将 y 看作常数，令 $-2x^2 + 3xy + y^2 = 0$ ，这是一个关于未知数 x 的一元二次方程，利用公式法解一元二次方程即可得到答案，掌握这种特殊的因式分解方法是解决问题的关键。

【详解】解：将 y 看作常数，令 $-2x^2 + 3xy + y^2 = 0$ ，这是一个关于未知数 x 的一元二次方程，

$\therefore 2x^2 - 3xy - y^2 = 0$ ，

$\therefore \Delta = (-3y)^2 - 4 \times 2 \times (-y^2)$

$= 9y^2 + 8y^2$

$= 17y^2 \geq 0$ ，

$\therefore x = \frac{-(-3y) \pm \sqrt{17y^2}}{4} = \frac{3y \pm \sqrt{17}|y|}{4} = \frac{3y \pm \sqrt{17}y}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}y$ ，即 $x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}y$ ， $x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}y$

$\therefore -2x^2 + 3xy + y^2 = -2\left(x - \frac{3 - \sqrt{17}}{4}y\right)\left(x - \frac{3 + \sqrt{17}}{4}y\right)$ 。

23. 先化简再求值: $\frac{a^2-a-6}{a+2} - \frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$, 其中 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

【答案】 $a - 3 + \frac{1}{a}$, 1

【解析】

【分析】 先将分子和分母分解因式, 并根据二次根式的性质化简, 再约分, 最后代入计算即可.

【详解】 因为 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}$,

可知 $a - 1 = 2 - \sqrt{3} - 1 = 1 - \sqrt{3} < 0$.

$$\text{原式} = \frac{(a-3)(a+2)}{a+2} - \frac{\sqrt{(a-1)^2}}{a(a-1)}$$

$$= a - 3 - \frac{1-a}{a(a-1)}$$

$$= a - 3 + \frac{1}{a}.$$

$$\text{所以原式} = 2 - \sqrt{3} - 3 + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= -1 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}$$

$$= 1.$$

【点睛】 本题主要考查了分式的化简求值, 根据 a 的大小化简 $\sqrt{(a-1)^2} = 1-a$ 是解题的关键.

24. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 当 $x = -3$ 时, $y = 4$.

(1) 求 y 关于 x 的函数表达式;

(2) 当 $y \leq \frac{4}{3}$ 且 $y \neq 0$ 时, 求自变量 x 的取值范围.

【答案】 (1) $y = -\frac{12}{x}$

(2) $x \leq -9$ 或 $x > 0$

【解析】

【分析】 (1) 待定系数法求解析式即可求解;

(2) 先求得当 $y = \frac{4}{3}$ 时, $x = -9$, 根据反比例函数的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 当 $x = -3$ 时, $y = 4$.

$$\therefore k = -3 \times 4 = 12$$

$$\therefore y = -\frac{12}{x},$$

【小问 2 详解】

当 $y = \frac{4}{3}$ 时, $x = -9$,

$\therefore y = -\frac{12}{x}$ 的图象在第二、四象限,

$\therefore$ 当 $y \leq \frac{4}{3}$ 且 $y \neq 0$ 时, $x \leq -9$ 或 $x > 0$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求反比例函数解析式, 判断反比例函数的增减性, 掌握反比例函数的图象的性质是解题的关键.

25. 小毛将进货单价为 40 元的商品按 50 元出售, 每天可卖 500 个, 如果这种商品每涨价 1 元, 其销售量就减少 10 个, 小毛为使这种商品每天赚得 8000 元的利润, 商品的售价应定为每件多少元?

【答案】 80 元或 60 元

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程解应用题, 涉及因式分解解一元二次方程, 读懂题意, 设定价为 x 元, 由等量关系列方程求解即可得到答案, 读懂题意, 准确列出一元二次方程是解决问题的关键.

【详解】 解: 设定价为 x 元,

根据题意可得, $(x - 40)[500 - 10(x - 50)] = 8000$, 即 $x^2 - 140x + 4800 = 0$,

$$\therefore (x - 60)(x - 80) = 0, \text{ 解得 } x_1 = 80, x_2 = 60,$$

答: 定价为 80 元或 60 元, 利润可达到 8000 元.

26. 已知 a 、 b 为整数, 关于 x 的方程 $x^2 - ax + 3 - b = 0$ 有两个不相等的实数根, 关于 x 的方程

$x^2 + (6 - a)x + 7 - b = 0$ 有两个相等的实数根, 关于 x 的方程 $x^2 + (4 - a)x + 5 - b = 0$ 没有实数根, 求 a 与 b 的值.

【答案】 $a = 2$, $b = 3$.

【解析】

【分析】 利用一元二次方程根的判别式, 分别得到 $a^2 + 4b > 12$ ①; $a^2 + 4b = 12a - 8$ ②; $a^2 + 4b < 8a + 4$ ③; 把②分别代入①③得不等式组, 解之即可求解.

【详解】解：∵关于 x 的方程 $x^2 - ax + 3 - b = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-a)^2 - 4 \times 1 \times (3 - b) > 0, \text{ 即 } a^2 + 4b > 12 \text{ ①};$$

∵关于 x 的方程 $x^2 + (6 - a)x + 7 - b = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (6 - a)^2 - 4 \times 1 \times (7 - b) = 0, \text{ 即 } a^2 + 4b = 12a - 8 \text{ ②};$$

∵关于 x 的方程 $x^2 + (4 - a)x + 5 - b = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta = (4 - a)^2 - 4 \times 1 \times (5 - b) < 0, \text{ 即 } a^2 + 4b < 8a + 4 \text{ ③};$$

把②分别代入①③得 $12a - 8 > 12$ 且 $12a - 8 < 8a + 4$,

解得 $\frac{5}{3} < a < 3$, 而 a 为整数,

$$\therefore a = 2,$$

把代入 $a = 2$ ②得 $4 + 4b = 12 \times 2 - 8$, 解得 $b = 3$,

故, $a = 2, b = 3$.

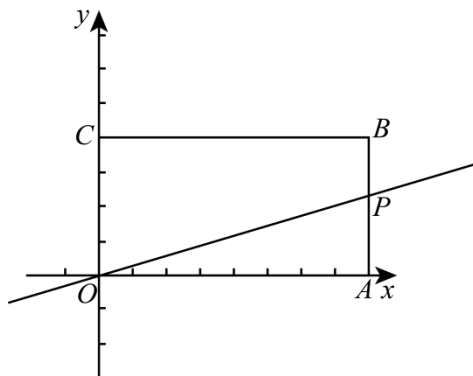
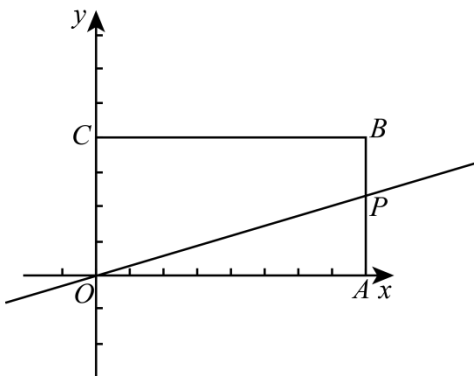
【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式, 注意: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$),

当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根; 当

$b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程没有实数根.

四、综合题 (本题满分 10 分, 第一小题 3 分, 第二小题 3 分, 第三小题 4 分)

27. 如图, 长方形 $OABC$ 边 $BC = 8$, $AB = 4$.



备用图

- (1) 直线 $y = kx$ ($k \neq 0$), 交边 AB 于点 P , 求 k 的取值范围;
- (2) 直线 $y = kx$ ($k \neq 0$), 将长方形 $OABC$ 的面积分成两部分, 直线上方的一部分记作 S , 试写出 S 关于 k 的解析式;
- (3) 直线 $y = kx$ ($k \neq 0$), 是否可能将长方形 $OABC$ 的面积分成两部分的面积比为 $2 : 7$? 若能, 求出 k 的值; 若不能, 说明理由.

【答案】(1) $0 < k \leq \frac{1}{2}$

$$(2) S = \begin{cases} \frac{8}{k} \left(k > \frac{1}{2} \right) \\ 16 \left(k = \frac{1}{2} \right) \\ -32k + 32 \left(0 < k < \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

(3) 能, k 的值为 $\frac{9}{8}$ 或 $\frac{2}{9}$

【解析】

【分析】(1) 根据题意, 得到 $B(8, 4)$, 由直线 $y = kx$ ($k \neq 0$), 交边 AB 于点 P , 可知 P 与 A 重合时, k 最小; P 与 B 重合时, k 最大; 将点的坐标代入解析式求出 k 值即可得到答案;

(2) 根据题意, 有三种情况: 当直线 $y = kx$ 交 BC 于 P 时; 当直线 $y = kx$ 经过点 B 时; 当直线 $y = kx$ 交 AB 于点 P 时; 分别求解即可得到答案;

(3) 由 (2) 中分类, 结合 $S_{\text{矩形}} = 32$, 直线 $y = kx$ ($k \neq 0$) 将长方形 $OABC$ 的面积分成两部分的面积比为 $2:7$, 分情况讨论即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 长方形 $OABC$ 边 $BC = 8$, $AB = 4$,

$$\therefore B(8, 4),$$

$\because$ 直线 $y = kx$ ($k \neq 0$), 交边 AB 于点 P ,

$\therefore$ 直线 $y = kx$ ($k \neq 0$) 经过一、三象限,

$$\therefore k > 0,$$

把 $B(8, 4)$ 代入 $y = kx$ ($k \neq 0$), 得 $4 = 8k$, 解得 $k = \frac{1}{2}$,

$\therefore k$ 的取值范围为 $0 < k \leq \frac{1}{2}$;

【小问 2 详解】

解: 根据题意, 有三种情况:

①当直线 $y = kx$ 交 BC 于 P 时, 联立 $\begin{cases} y = kx \\ y = 4 \end{cases}$, 解得 $x = \frac{4}{k}$,

$$\therefore P\left(\frac{4}{k}, 4\right),$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \frac{4}{k} \times 4 = \frac{8}{k}, \text{ 即 } S = \frac{8}{k} \left(k > \frac{1}{2} \right);$$

$$\textcircled{2} \text{ 当直线 } y = kx \text{ 经过点 } B \text{ 时, } S = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16;$$

$$\textcircled{3} \text{ 当直线 } y = kx \text{ 交 } AB \text{ 于点 } P \text{ 时, 联立 } \begin{cases} y = kx \\ x = 8 \end{cases}, \text{ 解得 } y = 8k,$$

$$\therefore S = S_{\text{矩形}} - S_{\triangle AOP} = 8 \times 4 - \frac{1}{2} \times 8 \times 8k = 32 - 32k, \text{ 即 } S = -32k + 32 \left(0 < k < \frac{1}{2} \right);$$

$$\text{综上所述, } S \text{ 关于 } k \text{ 的解析式为 } S = \begin{cases} \frac{8}{k} \left(k > \frac{1}{2} \right) \\ 16 \left(k = \frac{1}{2} \right) \\ -32k + 32 \left(0 < k < \frac{1}{2} \right) \end{cases};$$

【小问 3 详解】

解: 能,

$$\because S_{\text{矩形}} = 32, \text{ 直线 } y = kx \text{ } (k \neq 0) \text{ 将长方形 } OABC \text{ 的面积分成两部分的面积比为 } 2:7,$$

$$\textcircled{1} \text{ 当直线 } y = kx \text{ 交 } BC \text{ 于 } P \text{ 时, } S_{\triangle POC} = 32 \times \frac{2}{9} = \frac{64}{9},$$

$$\therefore S = \frac{8}{k},$$

$$\therefore \frac{8}{k} = \frac{64}{9}, \text{ 解得 } k = \frac{9}{8};$$

$$\textcircled{2} \text{ 当直线 } y = kx \text{ 交 } AB \text{ 于点 } P \text{ 时, } S_{\triangle AOP} = \frac{64}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle AOP} = 32k,$$

$$\therefore 32k = \frac{64}{9}, \text{ 解得 } k = \frac{2}{9};$$

综上所述, 直线 $y = kx$ ($k \neq 0$), 将长方形 $OABC$ 的面积分成两部分的面积比为 $2:7$ 时, k 的值为 $\frac{9}{8}$ 或 $\frac{2}{9}$.

【点睛】 本题考查正比例函数综合, 涉及待定系数法确定函数关系式、正比例函数图象与性质、正比例函数 k 的取值范围、不规则图形面积的间接表示、三角形面积等知识, 读懂题意, 熟记正比例函数图象与性质, 数形结合, 准确分类是解决问题的关键.