

**2022-2023 学年上海市徐汇区南洋模范中学八年级（上）期
中数学试卷**

一、选择题

1. 下列根式，不能与 $\sqrt{48}$ 合并的是（ ）

A. $\sqrt{0.12}$

B. $\sqrt{18}$

C. $\sqrt{1\frac{1}{3}}$

D. $-\sqrt{75}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 把各个二次根式化为最简二次根式，选出与 $\sqrt{48}$ 不是同类二次根式的选项即可；

【详解】 解： $\because \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ ， $\sqrt{0.12} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ， $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ， $\sqrt{1\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， $-\sqrt{75} = -5\sqrt{3}$

$\therefore$ 不能与 $\sqrt{48}$ 合并的是 $\sqrt{18}$

故选 B.

【点睛】 本题考查同类二次根式的概念及二次根式的化简，掌握二次根式化简的方法是解题关键.

2. 下列各式中，是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{x^3}$

B. $\sqrt{4x}$

C. $\sqrt{x^2+1}$

D. $\sqrt{\frac{x}{2}}$

【答案】 C

【解析】

【详解】 A 选项： $\sqrt{x^3} = |x|\sqrt{x}$ ，故不是最简二次根式；

B 选项： $\sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ ，故不是最简二次根式；

C 选项： $\sqrt{x^2+1}$ 是最简二次根式；

D 选项： $\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2x}}{2}$ ，故不是最简二次根式；

故选 C.

3. 下列方程中，一定是关于 x 的一元二次方程的是（ ）

A. $ax^2 + x + 1 = 0$

B. $(\frac{1}{x})^2 + \frac{2}{x} + 1 = 0$

C. $4x^2 = 8$

D. $x(x-1) = x^2$

【答案】 C

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义进行判断即可；

【详解】解：A、当 $a=0$ 时，该方程是一元一次方程；不符合题意；

B、 $(\frac{1}{x})^2 + \frac{2}{x} + 1 = 0$ 是分式方程；不符合题意；

C、 $4x^2 = 8$ 是关于 x 的一元二次方程；符合题意；

D、 $x(x-1) = x^2$ 可化为： $-x = 0$ ，该方程是关于 x 的一元一次方程；不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查了识别一元二次方程，理解一元二次方程的定义是解答本题的关键.

4. 下列说法正确的是 ()

A. $x^2 = 4$ 的根为 $x = 2$

B. $x = \sqrt{2}$ 是 $x^2 = 2$ 的根

C. 方程 $y^2 + \frac{1}{4} = 0$ 的根为 $y = \pm \frac{1}{2}$

D. $x^2 = -a$ 没有实数根

【答案】B

【解析】

【分析】根据方程的根与方程的逻辑关系，逐项判断即可；

【详解】解：A、 $x^2 = 4$ 的根为 $x = \pm 2$ ；选项错误，不符合题意；

B、 $x = \sqrt{2}$ 是 $x^2 = 2$ 的根；选项正确，符合题意；

C、方程 $y^2 + \frac{1}{4} = 0$ 无实数根；选项错误，不符合题意；

D、当 $a \leq 0$ 时， $x^2 = -a$ 有实数根；选项错误，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根；熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键.

5. 在命题：“三角形的一个外角大于三角形的每一个内角”、“底边及一个内角相等的两个等腰三角形全等”、“两条平行线被第三条直线所截，一对同旁内角的平分线互相垂直中，真命题的个数有 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】分析是否为真命题，需要分别分析各题设是否能推出结论，从而得出答案.

【详解】解：三角形的一个外角大于任何与之不相邻的一个内角，故原命题错误，为假命题；

底边及一个底角相等的两个等腰三角形全等，故原命题错误，为假命题；

两条平行线被第三条直线所截，一对同旁内角的平分线互相垂直，正确，为真命题，

故选：B.

【点睛】本题考查了命题与定理的知识,能够熟练掌握有关的命题及定理是解答本题的关键.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $AC=6$, AD 是 BC 边上的中线, 则 AD 的取值范围是 ()

- A. $0 < AD < 10$ B. $1 < AD < 5$ C. $2 < AD < 10$ D. $0 < AD < 5$

【答案】B

【解析】

【分析】延长 AD 至点 E , 使得 $DE=AD$, 可证 $\triangle ABD \cong \triangle CDE$, 可得 $AB=CE$, $AD=DE$, 在 $\triangle ACE$ 中, 根据三角形三边关系即可求得 AE 的取值范围, 即可解题.

【详解】解: 延长 AD 至点 E , 使得 $DE=AD$,

$\therefore$ 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AD=DE \\ \angle ADB=\angle CDE, \\ BD=CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDE$ (SAS),

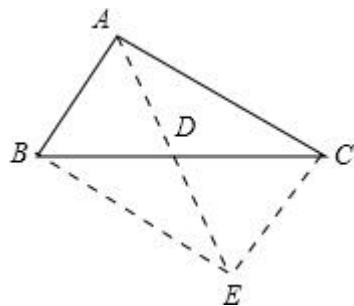
$\therefore AB=CE$, $AD=DE$

$\therefore \triangle ACE$ 中, $AC-AB < AE < AC+AB$,

$\therefore 2 < AE < 10$,

$\therefore 1 < AD < 5$.

故选: B.



【点睛】本题考查了全等三角形的判定, 考查了全等三角形对应边相等的性质, 本题中求证 $\triangle ABD \cong \triangle CDE$ 是解题的关键.

二、填空题

7. 当 x _____ 时, $\sqrt{3-2x}$ 在实数范围内有意义.

【答案】 $\leq \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件列不等式求解即可;

【详解】解: 由题意得: $3-2x \geq 0$

解得： $x \leq \frac{3}{2}$

故答案为： $x \leq \frac{3}{2}$

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件；熟练运用二次根式有意义的条件列不等式是解题的关键.

8. 化简： $\sqrt{8a^2b}$ ($a > 0$) = ____.

【答案】 $2a\sqrt{2b}$

【解析】

【分析】二次根式的化简公式： $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ ，再把原式化为 $\sqrt{4a^2 \cdot 2b}$ ，再结合公

式进行化简即可.

【详解】解： $\because a > 0$,

$$\therefore \sqrt{8a^2b} = \sqrt{4a^2 \cdot 2b} = 2a\sqrt{2b},$$

故答案为： $2a\sqrt{2b}$

【点睛】本题考查的是二次根式的化简，掌握 “ $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ ” 是解难题的关键.

9. $2 - \sqrt{5}$ 的倒数_____.

【答案】 $-2 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据题意列出 $2 - \sqrt{5}$ 的倒数，然后分母有理化即可.

【详解】 $2 - \sqrt{5}$ 的倒数为 $\frac{1}{2 - \sqrt{5}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})} = -2 - \sqrt{5}$

所以答案为 $-2 - \sqrt{5}$

【点睛】本题主要考查了二次根式中的分母有理化，熟练掌握分母有理化的步骤和方法是关键.

10. 化简： $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ = _____.

【答案】 $-\sqrt{-a}$

【解析】

【分析】先根据二次根式有意义的条件得到 $a < 0$ ，然后根据二次根式的性质化简.

【详解】 $\because -\frac{1}{a} > 0,$

$\therefore a < 0,$

$\therefore \text{原式} = a\sqrt{-\frac{a}{a^2}} = a \cdot \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{a^2}} = a \cdot \frac{\sqrt{-a}}{-a} = -\sqrt{-a},$

故填: $-\sqrt{-a}.$

【点睛】 本题考查二次根式的化简，掌握二次根式的性质是关键.

11. 方程 $3x^2=4x$ 的根是_____.

【答案】 $0, \frac{4}{3}$

【解析】

【详解】 试题解析: $\because 3x^2 = 4x.$

$\therefore 3x^2 - 4x = 0.$

$x(3x - 4) = 0.$

$x = 0, 3x - 4 = 0.$

$x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}.$

故答案为 $x_1 = 0, x_2 = \frac{4}{3}.$

点睛：一元二次方程的解法有：直接开方法，配方法，公式法，因式分解法.

本题用的是因式分解法.

12. 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有一个根为 -1 ，则 a, b, c 的关系是_____.

【答案】 $a - b + c = 0$

【解析】

【分析】 将 $x = -1$ 代入 $ax^2 + bx + c = 0$ 中，即可得出 a, b, c 的关系.

【详解】 解：把 $x = -1$ 代入 $ax^2 + bx + c = 0$ 中，得： $a - b + c = 0,$

$\therefore b = a + c.$

故答案为 $b = a + c.$

【点睛】 本题考查的是一元二次方程解的定义：能使方程成立的未知数的值，就是方程的解，比较简单.

13. 满足底边为已知线段 BC 的等腰三角形 ABC 的顶点 A 在_____上.

【答案】 线段 BC 的垂直平分线

【解析】

【分析】 根据等腰三角形的定义，知点 A 到 B, C 的距离相等，再结合到一条线段两个端

点距离相等的点在这条线段的垂直平分线，即可解答.

【详解】解：因为线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等，

$\therefore$ 满足底边为已知线段 BC 的等腰三角形 ABC 的顶点 A 在是线段 BC 的垂直平分线上.

【点睛】本题考查了等腰三角形的定义和线段垂直平分线的判定；理解 BC 是底边是正确解答本题的关键.

14. 一个三角形的两边长分别为 3 和 5，其第三边是方程 $x^2 - 13x + 40 = 0$ 的根，则此三角形的周长为 ____.

【答案】13

【解析】

【分析】先求 $x^2 - 13x + 40 = 0$ 的根，根据三角形存在性，后计算周长.

【详解】 $\because x^2 - 13x + 40 = 0$,

$$\therefore (x-5)(x-8)=0,$$

$$\therefore x_1 = 5, x_2 = 8,$$

当第三边为 5 时，三边为 3, 5, 5，三角形存在，

$\therefore$ 三角形的周长为 $3+5+5=13$;

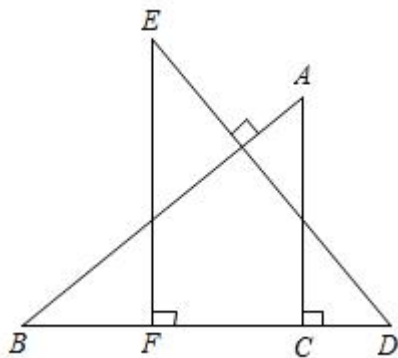
当第三边为 8 时，三边为 3, 5, 8，且 $3+5=8$ ，三角形不存在，

$\therefore$ 三角形的周长为 13;

故答案为：13.

【点睛】本题考查了三角形的存在性，一元二次方程的解法，熟练掌握一元二次方程的解法是解题的关键.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $\angle ACB = \angle EFD = 90^\circ$ ，点 B 、 F 、 C 、 D 在同一直线上，已知 $AB \perp DE$ ，且 $AB = DE$ ， $AC = 6$ ， $EF = 8$ ， $DB = 10$ ，则 CF 的长度为_____.



【答案】4

【解析】

【分析】先证明 $\triangle ACB \cong \triangle DFE$ (AAS)，通过全等三角形的性质转化线段求解即可；

【详解】解：∵ $\angle ACB = \angle EFD = 90^\circ$ ， $AB \perp DE$

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 90^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle D$$

在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle DFE$ 中

$$\begin{cases} \angle ACB = \angle EFD = 90^\circ \\ \angle A = \angle D \\ AB = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACB \cong \triangle DFE (\text{AAS})$$

$$\therefore BC = EF = 8, \quad DF = AC = 6$$

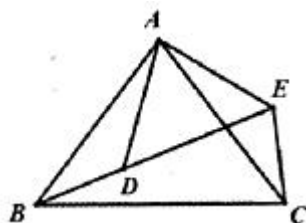
$$\therefore BF = DB - DF = 10 - 6 = 4, \quad CD = DB - BC = 10 - 8 = 2$$

$$\therefore CF = DB - BF - CD = 4$$

故答案为：4

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质；熟练运用全等三角形的性质转化线段是解题的关键。

16. 如图，已知 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE$ ， $\angle BAD = 22^\circ$ ， $\angle ACE = 30^\circ$ ，则 $\angle ADE =$ _____.



【答案】 52°

【解析】

【分析】求出 $\angle BAD = \angle EAC$ ，证 $\triangle BAD \cong \triangle EAC$ ，推出 $\angle 2 = \angle ABD = 30^\circ$ ，根据三角形的外角性质求出即可。

【详解】∵ $\angle BAC = \angle DAE$,

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle EAC,$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle EAC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle EAC \\ AD = AE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 55^\circ) = 62.5^\circ$$

$\because AO$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAO = \angle CAO = \frac{55^\circ}{2} = 27.5^\circ,$$

$\because OD$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 27.5^\circ,$$

$\because AB = AC, OA = OA,$

$$\therefore \triangle BAO \cong \triangle CAO (SAS),$$

$$\therefore OB = OC, \angle AOC = \angle OBA = 27.5^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 62.5^\circ - 27.5^\circ = 35^\circ,$$

由折叠得: $OE = EC$,

$$\therefore \angle COE = \angle ECO = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle OEC = 180^\circ - 2 \times 35^\circ = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle OEB = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

故答案为: 70.

【点睛】此题主要考查了折叠的性质, 角平分线的定义, 线段垂直平分线的性质, 三角形全等的性质和判定, 等腰三角形的性质、三角形的内角和定理等知识, 证明 $OB = OC$ 是解本题的关键.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \theta$. 边 AB 的垂直平分线交边 BC 于点 D , 边 AC 的垂直平分线交边 BC 于点 E , 连结 AD , AE , 则 $\angle DAE$ 的度数为 _____. (用含 θ 的代数式表示)

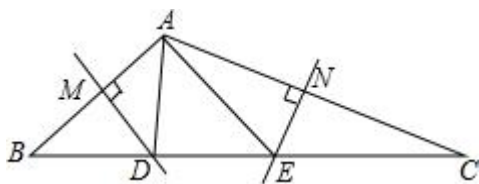
【答案】 $2\theta - 180^\circ$ 或 $180^\circ - 2\theta$

【解析】

【分析】分两种情况进行讨论, 先根据线段垂直平分线的性质, 得到 $\angle B = \angle BAD$, $\angle C = \angle CAE$, 进而得到 $\angle BAD + \angle CAE = \angle B + \angle C = 180^\circ - \theta$, 再根据角的和差关系进行计算即可.

【详解】解: 分两种情况:

如图所示, 当 $\angle BAC \geq 90^\circ$ 时,



$\because DM$ 垂直平分 AB ,

$$\therefore DA=DB,$$

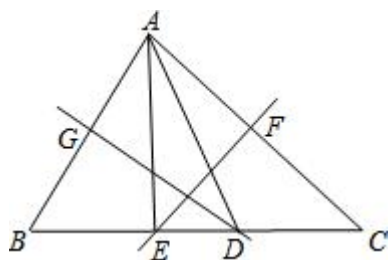
$$\therefore \angle B = \angle BAD,$$

同理可得, $\angle C = \angle CAE$,

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = \angle B + \angle C = 180^\circ - \theta,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC - (\angle BAD + \angle CAE) = \theta - (180^\circ - \theta) = 2\theta - 180^\circ;$$

②如图所示, 当 $\angle BAC < 90^\circ$ 时,



$\because$ DM 垂直平分 AB,

$$\therefore DA=DB,$$

$$\therefore \angle B = \angle BAD,$$

同理可得, $\angle C = \angle CAE$,

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = \angle B + \angle C = 180^\circ - \theta,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAD + \angle CAE - \angle BAC = 180^\circ - \theta - \theta = 180^\circ - 2\theta.$$

故答案为: $2\theta - 180^\circ$ 或 $180^\circ - 2\theta$.

【点睛】本题考查了三角形内角和定理, 线段垂直平分线性质的应用, 注意: 线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等.

三、解答题

$$19. \frac{3}{2}\sqrt{4x} + 2\sqrt{\frac{x}{9}} - x\sqrt{\frac{1}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

【答案】 $\frac{8}{3}\sqrt{x} + \sqrt{2x}$

【解析】

$$\text{【详解】 } \frac{3}{2}\sqrt{4x} + 2\sqrt{\frac{x}{9}} - x\sqrt{\frac{1}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{2}}$$

$$= 3\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \sqrt{2x}$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{x} + \sqrt{2x}$$

$$20. \text{解不等式: } \sqrt{3x} - \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{3} < \sqrt{\frac{1}{3}} + 2x.$$

【答案】 $x > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 先化简二次根式，然后根据解不等式的方法和步骤解不等式即可；

【详解】 解： $\sqrt{3}x - \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{3} < \sqrt{\frac{1}{3}} + 2x$

$$\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} < \frac{\sqrt{3}}{3} + 2x$$

$$\sqrt{3}x - 2x < \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3} - 2)x < -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$(2 - \sqrt{3})x > \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$x > \frac{\sqrt{3}}{6} \times (2 + \sqrt{3})$$

$$x > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

【点睛】 本题考查了二次根式的化简、二次根式的混合运算、解一元一次不等式；熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

21. 解方程： $(x+1)(x+2) = 2x+4$.

【答案】 $x = -2$ 或 1

【解析】

【分析】 先变形得到 $(x+1)(x+2) - 2(x+2) = 0$ ，然后利用因式分解法解方程.

【详解】 原方程可变为： $(x+1)(x+2) = 2(x+2)$.

即 $(x+2)(x-1) = 0$,

解得： $x = -2$ 或 1 .

【点睛】 本题考查了解一元二次方程-因式分解法：先把方程的右边化为 0，再把左边通过因式分解化为两个一次因式的积的形式，那么这两个因式的值就都有可能为 0，这就能得到两个一元一次方程的解，这样也就把原方程进行了降次，把解一元二次方程转化为解一元一次方程的问题了（数学转化思想）.

22. 用配方法解方程： $2x^2 + 4x - 1998 = 0$.

【答案】 $x_1 = -1 + 10\sqrt{10}$, $x_2 = -1 - 10\sqrt{10}$

【解析】

【分析】根据配方法解一元二次方程的步骤求解即可；

【详解】解： $2x^2 + 4x - 1998 = 0$

$$x^2 + 2x - 999 = 0$$

$$x^2 + 2x = 999$$

$$x^2 + 2x + 1 = 999 + 1$$

$$(x+1)^2 = 1000$$

$$x+1 = \pm 10\sqrt{10}$$

$$x = -1 \pm 10\sqrt{10}$$

$$\therefore x_1 = -1 + 10\sqrt{10}, \quad x_2 = -1 - 10\sqrt{10}$$

【点睛】本题考查了一元二次方程的解法；熟练掌握用配方法解一元二次方程的步骤是解题的关键.

23. 已知 $x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, $y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, 求 $\frac{x^2 - 4xy + y^2}{x+y}$ 的值

【答案】5

【解析】

【分析】根据 x , y 的值先求出 $x+y$, $x-y$ 和 xy 的值, 再对要求的式子进行化简, 然后代值计算即可.

【详解】解: $\because x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}, y = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$

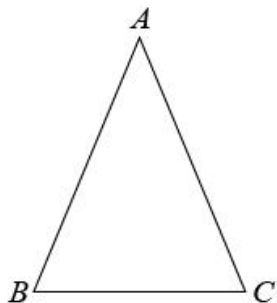
$$\therefore x+y=6, x-y=-4\sqrt{2}, xy=1,$$

$$\therefore \frac{x^2 - 4xy + y^2}{x+y} = \frac{(x-y)^2 - 2xy}{x+y} = \frac{32-2}{6} = 5,$$

故答案为 5.

【点睛】此题考查了二次根式的化简求值, 用到的知识点是通分和配方法的应用, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,



(1) 用直尺和圆规作 $\angle A$ 的平分线，交边 BC 于点 M （不写作法，保留作图痕迹，在图上清楚地标注点 M ）；

(2) 如果在 (1) 条件下点 M 是 BC 的中点，求证： $\angle B = \angle C$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

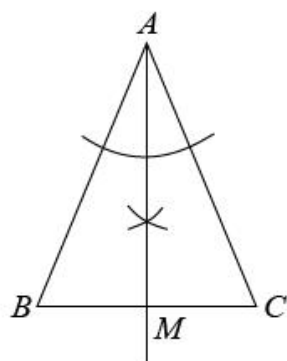
【解析】

【分析】 (1) 根据尺规作已知角的角平分线的作图方法进行作图即可；

(2) 作 $MD \perp AB$ 交 AB 于点 D ；作 $ME \perp AC$ 交 AC 于点 E ；构造 $\text{Rt}\triangle DMB \cong \text{Rt}\triangle EMC(\text{HL})$ ；即可得出结论；

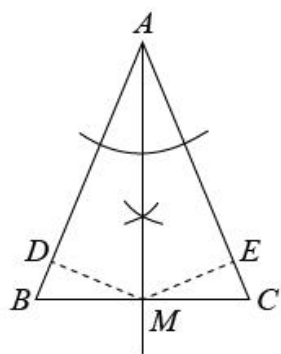
【小问 1 详解】

解：作图如下：



【小问 2 详解】

证明：如图，作 $MD \perp AB$ 交 AB 于点 D ；作 $ME \perp AC$ 交 AC 于点 E ；



由 (1) 可知： AM 平分 $\angle BAC$

$$\therefore DM = EM$$

$\because$ 点 M 是 BC 的中点

$$\therefore BM = CM$$

在 $\text{Rt}\triangle DMB$ 和 $\text{Rt}\triangle EMC$ 中

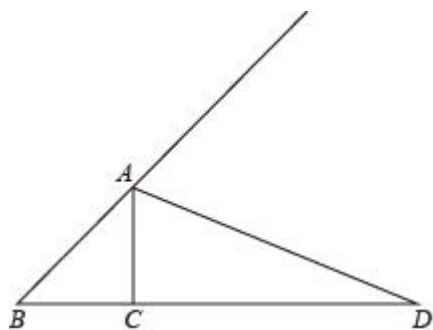
$$\begin{cases} DM = EM \\ BM = CM \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DMB \cong \text{Rt}\triangle EMC(\text{HL})$$

$$\therefore \angle B = \angle C$$

【点睛】本题考查了尺规作图、角平分线的性质、全等三角形的判定与性质；熟练掌握角平分线的性质定理是解题的关键.

25. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， AD 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线，交 BC 的延长线于点 D ，且 $\angle B = 2\angle D$ ，求证： $AB + AC = CD$ 。

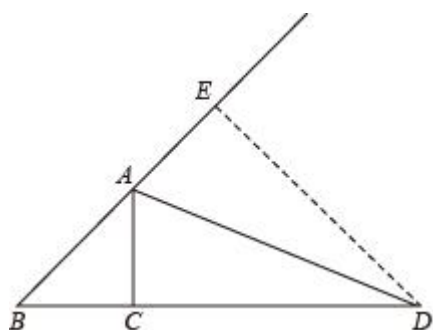


【答案】见解析

【解析】

【分析】作 $DE \perp BA$ 交 BA 的延长线于点 E ；构造 $\text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AED(\text{HL})$ ，通过转化线段得出结论；

【详解】证明：如图，作 $DE \perp BA$ 交 BA 的延长线于点 E ；



$$\because \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore DC \perp AC$$

$\because AD$ 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线；

$$\therefore CD = ED$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle AED$ 中

$$\begin{cases} CD = ED \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AED(\text{HL})$$

$$\therefore AE = AC, \quad \angle ADC = \angle ADE$$

$$\therefore \angle EDC = 2\angle ADC$$

$$\because \angle B = 2\angle ADC$$

$$\therefore \angle B = \angle EDC$$

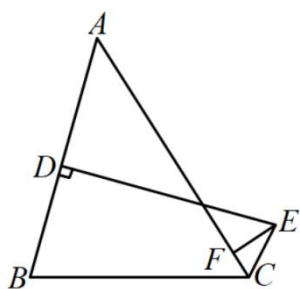
$$\therefore ED = BE = AB + AE = AB + AC$$

$$\therefore CD = ED$$

$$\therefore AB + AC = CD$$

【点睛】本题考查了角平分线的性质定理、全等三角形的判定与性质；熟练运用角平分线的性质构造全等三角形是解题的关键.

26. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 的中点, $DE \perp AB$, $\angle ACE + \angle BCE = 180^\circ$, $EF \perp AC$ 于点 F , 若 $AC = 12$, $BC = 8$, 求 AF 的长.

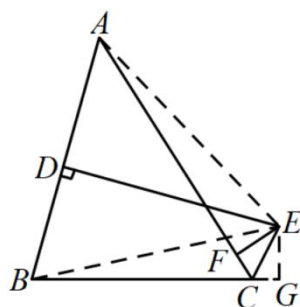


【答案】 10

【解析】

【分析】作 $EG \perp BC$, 交 BC 的延长线于点 G ; 连接 AE 、 BE ; 构造 $\text{Rt}\triangle AEF \cong \text{Rt}\triangle BEG(\text{HL})$ 和 $\text{Rt}\triangle CEF \cong \text{Rt}\triangle CEG(\text{HL})$, 通过全等三角形的性质转化线段求解即可;

【详解】解: 如图, 作 $EG \perp BC$, 交 BC 的延长线于点 G ; 连接 AE 、 BE ;



$$\because \angle ACE + \angle BCE = 180^\circ$$

$$\angle ECG + \angle BCE = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ACE = \angle ECG$$

$$\because EF \perp AC, EG \perp BC$$

$$\therefore EF = EG$$

$$\because D \text{ 是 } AB \text{ 的中点, } DE \perp AB$$

$$\therefore AE = BE$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 和 $\text{Rt}\triangle BEG$ 中

$$\begin{cases} EF = EG \\ AE = BE \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEF \cong \text{Rt}\triangle BEG(\text{HL})$$

$$\therefore AF = BG$$

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 和 $\text{Rt}\triangle CEG$ 中

$$\begin{cases} EF = EG \\ EC = EC \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CEF \cong \text{Rt}\triangle CEG(\text{HL})$$

$$\therefore CF = CG$$

$$\text{设 } AF = BG = x, \text{ 则 } CF = AC - AF = 12 - x, \quad CG = BG - BC = x - 8$$

$$\therefore 12 - x = x - 8$$

$$\text{解得: } x = 10$$

$$\text{故 } AF = 10$$

【点睛】本题考查了中垂线的性质，角平分线的性质定理、全等三角形的判定与性质；构造全等三角形转化线段是解题的关键。

27. 如图，已知， $\triangle ABC$ 是等边三角形， CE 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACM$ 的平分线，点 D 为射线 BC 上一点，且 $\angle ADE = \angle ABC$ ， DE 与 CE 相交于点 E 。

(1) 如图 1，如果点 D 在边 BC 上，求证： $AD = DE$ ；

(2) 如图 2，如果点 D 在边 BC 的延长线上，那么 (1) 中的结论“ $AD = DE$ ”还成立吗？

请说明理由；

(3) 如果 $\triangle ABC$ 的边长为 4，且 $\angle DAC = 30^\circ$ ，请直接写出线段 BD 的长度。（无需写出解题过程）

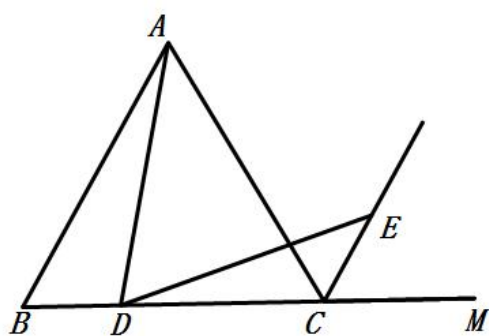


图 1

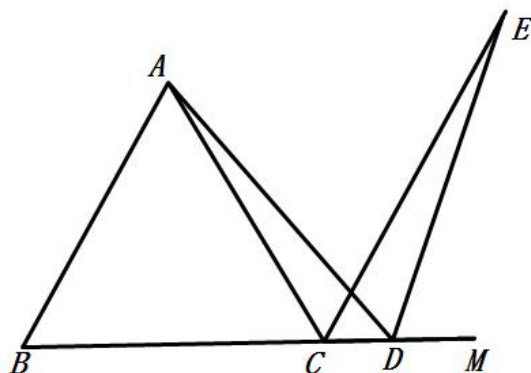


图 2

【答案】(1) 证明见解析；(2) 成立，理由见解析；(3) 2 或 8.

【解析】

【分析】(1) 如图 1 (见解析)，先根据等边三角形的判定与性质可得 $AF = DC$ ， $\angle BFD = 60^\circ$ ，

再根据角平分线的定义、角的和差可得 $\angle DCE = \angle AFD = 120^\circ$ ，然后根据三角形的外角性质、等量代换可得 $\angle DAF = \angle EDC$ ，最后根据三角形全等的判定定理与性质即可得证；

(2) 如图 2 (见解析)，先根据等边三角形的判定与性质可得 $AF = DC, \angle F = 60^\circ$ ，再根据角平分线的定义、角的和差可得 $\angle DCE = \angle F = 60^\circ$ ，然后根据三角形的外角性质、等量代换可得 $\angle DAF = \angle EDC$ ，最后根据三角形全等的判定定理与性质即可得证；

(3) 如图 3-1 和 3-2 (见解析)，分点 D 在边 BC 上和点 D 在边 BC 的延长线上两种情况，再分别利用等边三角形的性质、等腰三角形的性质即可得。

【详解】(1) 如图 1，在 AB 上取一点 F，使 $BF = BD$ ，连接 DF，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore AB - BF = BC - BD, \text{ 即 } AF = DC,$$

$$\because BF = BD, \angle ABC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BDF$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle BFD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD = 180^\circ - \angle BFD = 120^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACM = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ,$$

$\because CE$ 平分 $\angle ACM$ ，

$$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2} \angle ACM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle ACB + \angle ACE = 120^\circ = \angle AFD,$$

$$\because \angle ADE = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADE + \angle EDC = \angle ABC + \angle EDC,$$

$$\text{又} \because \angle ADC = \angle ABC + \angle DAF,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle EDC,$$

$$\text{在 } \triangle ADF \text{ 和 } \triangle DEC \text{ 中, } \begin{cases} \angle AFD = \angle DCE \\ AF = DC \\ \angle DAF = \angle EDC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle DEC (ASA),$$

$$\therefore AD = DE;$$

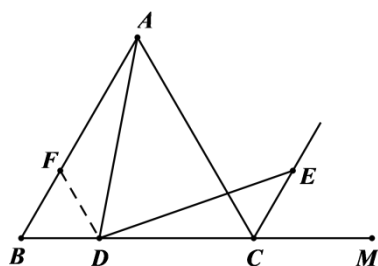


图1

(2) 成立，理由如下：

如图 2，延长 BA，使 $BF = BD$ ，连接 DF，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore BF - AB = BD - BC, \text{ 即 } AF = DC,$$

$$\because BF = BD, \angle ABC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BDF$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle F = 60^\circ,$$

$\because CE$ 平分 $\angle ACM$ ，

$$\therefore \angle DCE = \frac{1}{2} \angle ACM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle DCE,$$

$$\therefore \begin{cases} \angle DAF = \angle ABC + \angle BAD = \angle ADE + \angle BAD \\ \angle EDC = \angle ADE + \angle BAD \end{cases},$$

$$\therefore \angle DAF = \angle EDC,$$

$$\text{在 } \triangle ADF \text{ 和 } \triangle DEC \text{ 中, } \begin{cases} \angle F = \angle DCE \\ AF = DC \\ \angle DAF = \angle EDC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle DEC (ASA),$$

$$\therefore AD = DE;$$

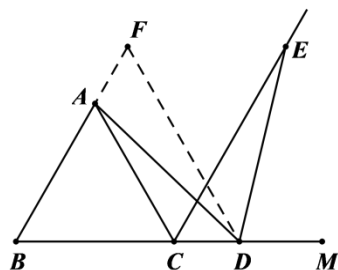


图2

(3) $\because \triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形，

$$\therefore AC = BC = 4, \angle BAC = \angle ACB = 60^\circ,$$

由题意，分以下两种情况：

①如图 3-1，当点 D 在边 BC 上时，

$$\because \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC, \text{ 即 AD 是 } \angle BAC \text{ 的角平分线,}$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2;$$

②如图 3-2，当点 D 在边 BC 的延长线上时，

$$\because \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACB - \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle DAC,$$

$$\therefore CD = AC = 4,$$

$$\therefore BD = BC + CD = 4 + 4 = 8;$$

综上，线段 BD 的长为 2 或 8.

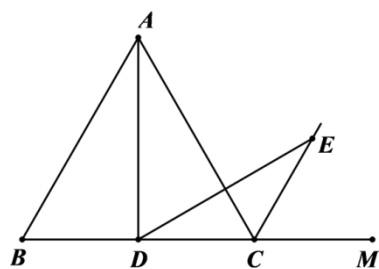


图3-1

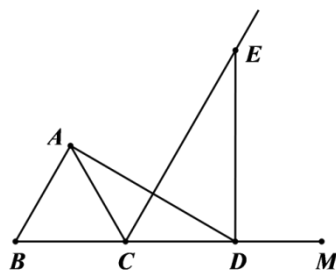


图3-2

【点睛】 本题考查了等边三角形的判定与性质、三角形全等的判定定理与性质、角平分线的定义、三角形的外角性质等知识点，通过作辅助线，构造等边三角形和全等三角形是解题关键.