

青浦一中 2023 学年第一学期期中学业质量调研

初二年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟, 满分: 100 分)

一、选择题: (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列函数表达式中, 表示反比例函数的是 ()

A. $y = \frac{x}{7}$

B. $y = \frac{1}{3x}$

C. $y = \frac{x+1}{x}$

D. $y = \frac{2x}{3}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的定义和方程式的变形, 涉及的知识面比较广. 反比例函数解析式的一般形式 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 也可转化为 $y = kx^{-1} (k \neq 0)$ 的形式, 特别注意不要忽略 $k \neq 0$ 这个条件, 据此判断即可.

【详解】 解: A、 $y = \frac{x}{7}$ 是正比例函数, 故本选项错误;

B、 $y = \frac{1}{3x}$ 符合反比例函数的定义, 故本选项正确;

C、 $y = \frac{x+1}{x}$ 不符合反比例函数的定义, 故本选项错误;

D、 $y = \frac{2x}{3}$ 是正比例函数, 故本选项错误;

故选: B

2. 下列说法正确的是 ()

A. 任何定理都有逆定理

B. 真命题的逆命题一定是真命题

C. 任何命题都有逆命题

D. “到角两边距离相等的点在这个角的角平分线上”是真命题

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据逆定理、逆命题、真命题、角平分线的判定定理, 对各选项进行判断作答即可.

【详解】 解: 不是每个定理都有逆定理, A 错误, 故不符合要求;

真命题的逆命题可能是真命题, 也可能是假命题, B 错误, 故不符合要求;

任何命题都有逆命题, C 正确, 故符合要求;

“在角的内部到角两边距离相等的点在这个角的角平分线上”是真命题，D 错误，故不符合要求；

故选：C.

【点睛】本题考查了逆定理、逆命题、真命题、角平分线的判定定理等知识，熟练掌握各知识是解题的关键.

3. 下列说法正确的是 ()

A. $x^4 + 1 = 0$ 是二项方程

B. $x^2y - y = 2$ 是二元二次方程

C. $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 1$ 是分式方程

D. $\sqrt{2}x^2 - 1 = 0$ 是无理方程

【答案】A

【解析】

【分析】根据整式方程、分式方程和无理方程的概念逐一判断即可得.

【详解】A. 方程是一般式，且方程的左边只有 2 项，此方程是二项方程，此选项正确；

B. $x^2y - y = 2$ 是二元三次方程，此选项错误；

C. $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 1$ 是一元一次方程，属于整式方程，此选项错误；

D. $\sqrt{2}x^2 - 1 = 0$ 是一元二次方程，属于整式方程；

故选 A.

【点睛】本题主要考查无理方程，解题的关键是掌握整式方程、分式方程和无理方程的定义.

4. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 是双曲线 $y = -\frac{2}{x}$ 上的两个点，如果 $x_1 < x_2$ ，那么 y_1 与 y_2 的大小关系正确的是 ()

A. $y_1 > y_2$

B. $y_1 < y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. 无法判断

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的图像与性质，由于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 不一定在同一象限，所以无法判断出 y_1, y_2 的大小.

【详解】 $\because k = -2 < 0$,

$\therefore$ 双曲线在第二、四象限，

①当 $x_1 < x_2 < 0$ 时， $y_1 < y_2$ ；

②当 $0 < x_1 < x_2$ 时， $y_1 < y_2$ ；

③当 $x_1 < 0 < x_2$ 时, $y_1 > y_2$;

综上, 无法判断出 y_1, y_2 的大小,

故选: D.

5. 满足下列条件的 $\triangle ABC$ 中, 不是直角三角形的是 ()

A. $\angle B + \angle A = \angle C$

B. $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 5$

C. $\angle A = 2\angle B = 3\angle C$

D. 一个外角等于和它相邻的一个内角

【答案】C

【解析】

【分析】由三角形的内角和等于 180° , 根据题意可求得最大角的度数, 继而求得答案; 注意掌握排除法在选择题中的应用.

【详解】本题考查了直角三角形的判定

根据三角形的内角和是 180° 及邻补角是 180° , 对各选项进行分析即可.

A、 $\because \angle A + \angle B = \angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore \angle C = 90^\circ$, 故是直角三角形;

B、 $\because \angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 5$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore \angle C = \frac{5}{2+3+5} \times 180^\circ = 90^\circ$, 是直角三角形;

C、 $\because \angle A = 2\angle B = 3\angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore \angle A : \angle B : \angle C = 6 : 3 : 2$,

$\therefore \angle A = \frac{6}{6+3+2} \times 180^\circ > 90^\circ$, 故是钝角三角形,

$\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形;

D、 $\because$ 一个外角等于和它相邻的内角,

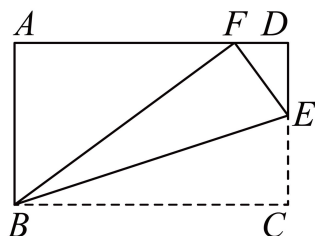
$\therefore$ 每一个角等于 90° ,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形;

故选: C.

【点睛】本题考查的是三角形内角和定理, 熟知三角形内角和是 180° 是解答此题的关键.

6. 如图长方形 $ABCD$ 中, $BC = 5$, $AB = 3$, 点 E 为边 CD 上一点, 将 $\triangle BCE$ 沿 BE 翻折后, 点 C 恰好落在边 AD 上的点 F 处, 则 $CE =$ ()



- A. 2 B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了折叠的性质及勾股定理，设 $CE = x$ ，则 $DE = 3 - x$ ，由折叠性质可知， $EF = CE = x$ ， $BF = BC = 5$ ，求出 $AF = 4$ ， $FD = AD - AF = 1$ ，在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中， $DE^2 + DF^2 = EF^2$ ，即 $(3 - x)^2 + 1^2 = x^2$ ，即可求解.

【详解】解：设 $CE = x$ ，则 $DE = 3 - x$ ，
由折叠性质可知， $EF = CE = x$ ， $BF = BC = 5$ ，
在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中， $AB = 3$ ， $BF = 5$ ，

$$\therefore AF = \sqrt{BF^2 - AB^2} = 4,$$

$$\therefore DF = AD - AF = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中， $DE^2 + DF^2 = EF^2$ ，

$$\text{即 } (3 - x)^2 + 1^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{3}.$$

故选：C.

二、填空题：（每题 2 分，我 24 分）

7. 方程 $x^4 - 16 = 0$ 的根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【分析】根据平方根的定义,很容易求解,或者把方程左边因式分解,通过降次的方法也可以求解.

【详解】 $\because x^4 - 16 = 0$,

$$\therefore (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) = 0,$$

$$\therefore x = \pm 2,$$

$$\therefore \text{方程 } x^4 - 16 = 0 \text{ 的根是 } x = \pm 2,$$

故答案为 ± 2 .

【点睛】该题为高次方程，因此解决该题的关键，是需要把方程左边因式分解，从而达到降次的目的，把高次方程转化为低次方程，从而求解.

8. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{3-x}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x < 3$

【解析】

【分析】 本题考查了函数自变量的取值范围，掌握二次根式的被开方数是非负数和分母不等于 0 是解题的关键. 根据二次根式有意义的条件和分式有意义的条件即可得出答案.

【详解】 解： $\because 3-x \geq 0, 3-x \neq 0$,

$\therefore x < 3$,

故答案为： $x < 3$.

9. 方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 先把方程两边平方，使原方程化为整式方程 $x+2 = x^2$ ，解此一元二次方程得到 $x_1 = 2$ ， $x_2 = -1$ ，结合二次根式的性质，去掉增根，即可得到答案.

【详解】 方程两边平方得： $x+2 = x^2$

$\therefore x_1 = 2$, $x_2 = -1$

$\because \sqrt{x+2} \geq 0$

$\therefore \sqrt{x+2} = x \geq 0$

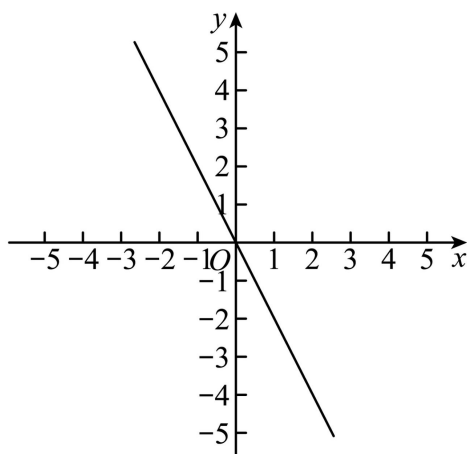
$\therefore x_2 = -1$ 不符合题意，故舍去

$\therefore$ 原方程的根为 $x = 2$

故答案为： $x = 2$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程、二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握一元二次方程、二次根式的性质，从而完成求解.

10. 如图为正比例函数 $y = (k-3)x$ (k 为常数) 的图像，那么 k 的取值范围是_____.



【答案】 $k < 3$

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数图象的性质；由正比例函数的图象位于第二、四象限，得出 $k - 3 < 0$ ，即可得出结果.

【详解】 解： $\because y = (k - 3)x$ 的图象位于第二、四象限，

$\therefore k - 3 < 0$

故答案为： $k < 3$.

11. 用换元法解分式方程 $\frac{3x}{x-1} + \frac{x-1}{x} + 2 = 0$ 时，如果设 $\frac{x}{x-1} = y$ ，那么原方程可以化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $3y^2 + 2y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查的是利用换元法解分式方程，一元二次方程；把原方程化为 $\frac{3x}{x-1} + \frac{x-1}{x} + 2 = 0$ ，设

$\frac{x}{x-1} = y$ ，原方程可以化为 $3y + \frac{1}{y} + 2 = 0$ ，可得 $3y^2 + 2y + 1 = 0$.

【详解】 解： $\because \frac{3x}{x-1} + \frac{x-1}{x} + 2 = 0$ ，设 $\frac{x}{x-1} = y$ ，

$\therefore$ 原方程可以化为 $3y + \frac{1}{y} + 2 = 0$ ，

$\therefore 3y^2 + 2y + 1 = 0$ ，

故答案为： $3y^2 + 2y + 1 = 0$.

12. 直角三角形中两个锐角的差为 20° ，则较小的锐角度数是_____°.

【答案】 35

【解析】

【分析】 根据直角三角形中两个锐角互余，且差为 20° ，即可得到结果.

【详解】 设其中较小的一个锐角是 x ，则另一个锐角是 $x + 20$ ，

$\because$ 直角三角形的两个锐角互余，

$\therefore x + x + 20^\circ = 90^\circ$ ，解得 $x = 35^\circ$ ，

$\therefore x + 20^\circ = 55^\circ$.

$\therefore$ 较小的锐角度数是 35°

故答案为： 35

【点睛】 本题考查了直角三角形两个锐角互余，根据题意列出方程是解题的关键.

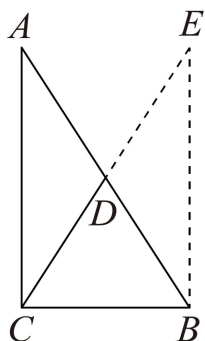
13. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 D 是斜边 AB 的中点，若 $CD = 3$ ，则 $AB =$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据题意，作出图形，数形结合，利用三角形全等的判定与性质得到 $AB = 2CD$ 即可得到答案.

【详解】 解：根据题意，作出 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，连接 CD 并延长，使 $DE = CD$ ，连接 BE ，如图所示：



$\because$ 点 D 是斜边 AB 的中点，

$\therefore AD = BD$ ，

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDE$ 中，

$$\begin{cases} AD = BD \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ CD = ED \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDE$ (SAS),

$\therefore AC = EB, \angle A = \angle ABE$ ，

$$\therefore AC \parallel EB,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = 90^\circ,$$

在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle EBC$ 中,

$$\begin{cases} AC = BE \\ \angle ACB = \angle EBC = 90^\circ, \\ CB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACB \cong \triangle EBC (\text{SAS}),$$

$$\therefore AB = CE = 2CD,$$

$$\because CD = 3,$$

$$\therefore AB = 2 \times 3 = 6,$$

故答案为: 6.

【点睛】 本题考查利用三角形全等的判定与性质求线段长, 涉及倍长中线方法作辅助线、平行线的判定与性质, 熟练掌握三角形全等的判定与性质是解决问题的关键.

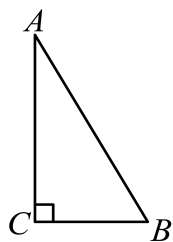
14. $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$ $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, 则 $AB =$ _____.

【答案】 $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了含 30° 度角的直角三角形的性质, 勾股定理; 根据题意画出 $\text{Rt} \triangle ABC$ 图形, 由 30° 所对直角边等于斜边的一半可知, 斜边 $AB = 2BC$, 进而勾股定理, 即可求解.

【详解】 解: 如图所示, 由题意可知, $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$,



$$\text{故 } BC = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3}BC,$$

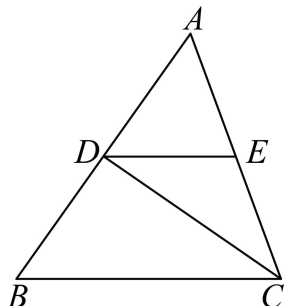
$$\text{又} \because AC = 4,$$

$$\therefore BC = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AB = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

故答案为: $\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

15. 如图, CD 平分 $\angle ACB$, $DE \parallel BC$, $\angle AED = 70^\circ$, 则 $\angle EDC =$ _____ $^\circ$.



【答案】 35

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质, 角平分线. 熟练掌握平行线的性质, 角平分线的定义是解题的关键.

由平行线的性质, 角平分线的定义可得, $\angle ACB = \angle AED$, $\angle EDC = \angle BCD = \frac{1}{2}\angle ACB$, 计算求解即可.

【详解】 解: $\because DE \parallel BC$, $\angle AED = 70^\circ$,

$$\therefore \angle ACB = \angle AED = 70^\circ, \quad \angle EDC = \angle BCD,$$

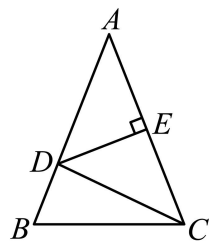
$\because CD$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle ACD = \angle BCD = \frac{1}{2}\angle ACB = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = 35^\circ,$$

故答案为: 35.

16. 如图, DE 垂直平分 AC , $AB = 10$, $BC = 6$, 则 $\triangle DBC$ 的周长为 _____.



【答案】 16

【解析】

【分析】 本题考查了垂直平分线的性质; 由于 DE 垂直平分线段 AC , 根据线段垂直平分线的性质得到 $AD = CD$, 由此得到 $\triangle BCD$ 的周长 $= BD + CD + BC = AD + BD + BC = AB + BC$, 由此即可求出 $\triangle DBC$ 的周长.

【详解】解：∵ DE 垂直平分 AC ，

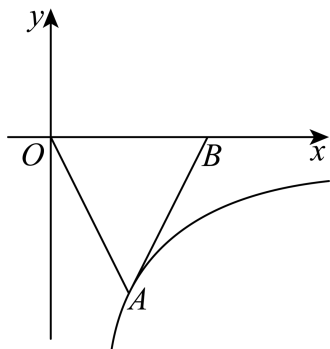
$$\therefore AD = CD,$$

$$\because AB = 10, \quad BC = 6,$$

$$\therefore \triangle BCD \text{ 的周长} = BD + CD + BC = AD + BD + BC = AB + BC = 10 + 6 = 16,$$

故答案为：16.

17. 如图，已知点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上，点 B 在 x 轴的正半轴上，且 $\triangle OAB$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，那么这个反比例函数的解析式是_____.



【答案】 $y = -\frac{\sqrt{3}}{x}$.

【解析】

【详解】 试题分析：

过点 A 作 $AC \perp OB$ 于点 C ,

设 $A(x, y)$,

∵ $\triangle OAB$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的等边三角形，

$$\therefore \frac{1}{2} \times |2x \cdot y| = \sqrt{3},$$

$$\therefore |xy| = \sqrt{3},$$

$$\therefore xy = -\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{这个反比例函数的解析式是: } y = -\frac{\sqrt{3}}{x}.$$

$$\text{故答案为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{x}.$$

考点：等边三角形的性质；反比例函数图象上点的坐标特征.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = 5$, 则 $BC =$ _____.

【答案】1或7

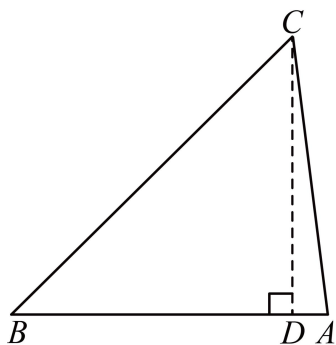
【解析】

【分析】本题主要考查勾股定理、一元二次方程的解法; 如图, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D , 由题意可设

$BD = CD = x$, 则有 $AD = 4\sqrt{2} - x$, 然后根据勾股定理可得 $x^2 + (4\sqrt{2} - x)^2 = 5^2$, 进而求出 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或

$x = \frac{7}{2}\sqrt{2}$, 最后分类求解即可.

【详解】解: 如图, 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ,



$\because \angle B = 45^\circ$,

$\therefore BD = CD$,

设 $BD = CD = x$,

则 $AD = AB - BD = 4\sqrt{2} - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 由 $CD^2 + AD^2 = AC^2$ 可得 $x^2 + (4\sqrt{2} - x)^2 = 5^2$,

解得 $x_1 = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $BD = CD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $BC = \sqrt{2} BD = 1$;

当 $x = \frac{7}{2}\sqrt{2}$, 即 $BD = CD = \frac{7}{2}\sqrt{2}$ 时, $BC = \sqrt{2} BD = 7$;

$\therefore BC$ 的长度为1或7,

故答案为: 1 或 7.

三、简答题:

19. 解方程: $\frac{x-1}{x+1} + \frac{4x}{x^2-1} = 2$.

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】先给方程两边乘以 (x^2-1) ，将分式方程化为整式方程，然后解方程即可解答.

【详解】解： $\frac{x-1}{x+1} + \frac{4x}{x^2-1} = 2$,

方程两边同乘以 (x^2-1) 得：

$$(x-1)^2 + 4x = 2(x^2-1),$$

整理得： $x^2 - 2x - 3 = 0$,

解得： $x_1 = 3, x_2 = -1$,

检验， $x_1 = 3$ 时， $x^2 - 1 = 9 - 1 = 8 \neq 0$ ， $x_1 = 3$ 是原方程的根，

$x_2 = -1$ 时， $x^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ ， $x_2 = -1$ 为增根，舍去，

所以原方程的根为 $x = 3$.

【点睛】 本题考查解分式方程，熟练掌握解分式方程的解法步骤是解答的关键，注意结果要检验.

20 解方程组： $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \textcircled{1} \\ 2x + y = 5 \textcircled{2} \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

【解析】

【分析】将①左边因式分解，化为两个二元一次方程，分别与②联立构成两个二元一次方程组求解即可.

【详解】 $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \textcircled{1} \\ 2x + y = 5 \textcircled{2} \end{cases}$

由①得 $(x+y)(x-2y) = 0$ ，即 $x+y=0$ 或 $x-2y=0$ ，

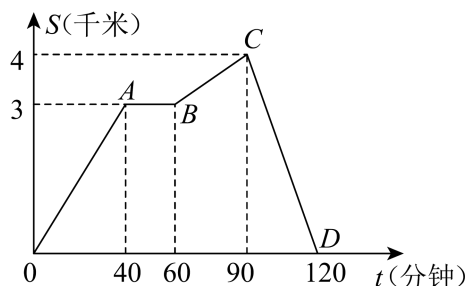
$\therefore$ 原方程组可化为 $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y=5 \end{cases}$.

解 $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=5 \\ y=-5 \end{cases}$ ；解 $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=5 \\ y=-5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

21. 某人沿一条直路行走, 此人离出发地的距离 S (千米)与行走时间 t (分钟)的函数关系如图所示, 请根据图象提供的信息回答下列问题:

- (1) 此人离开出发地最远距离是_____千米;
- (2) 此人在这次行走过程中, 停留所用的时间为_____分钟;
- (3) 由图中线段 OA 可知, 此人在这段时间内行走的速度是每小时_____千米;
- (4) 此人在 120 分钟内共走了_____千米.



【答案】 (1) 4; (2) 20; (3) 4.5; (4) 8.

【解析】

- 【分析】** (1) 此人最远到达了 C 处, 所以此人离开出发地最远距离是 4 千米;
 (2) 此人到达 A 处时开始休息, 在 B 处又开始出发, 所以用了 20 分钟;
 (3) 求速度用距离与时间的比即可, 注意把分钟化为小时;
 (4) 把每段的距离相加即可.

【详解】 由图象得: (1) 此人离开出发地最远距离是 4 千米;

(2) 此人在这次行走过程中, 停留所用的时间为 $60 - 40 = 20$ 分钟;

(3) $\because 40$ 分钟 $= \frac{2}{3}$ 小时,

$$\therefore 3 \div \frac{2}{3} = 4.5 \text{ (千米/时)}$$

$\therefore$ 此人在这段时间内行走的速度是每小时 4.5 千米;

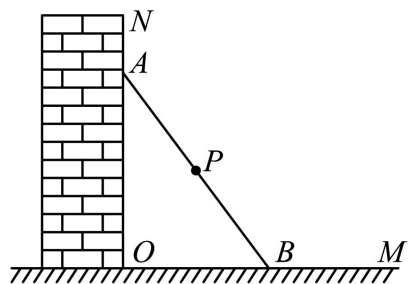
(4) 此人在 120 分钟内共走了 $3 + 0 + 1 + 4 = 8$ (千米).

故答案为 (1) 4, (2) 20, (3) 4.5, (4) 8.

【点睛】 本题考查了利用函数的图象解决实际问题, 解本题的要点在于正确理解函数图象横纵坐标表示的意义, 理解问题的过程, 就能够通过图象得到函数问题的相应解决, 需注意计算单位的统一.

22. 如图所示, 一根长 2.5 米的木棍 AB 斜靠在与地面垂直的墙上, 此时墙角 O 与木棍 B 端的距离为 1.5 米,

设木棍的中点为 P ，若木棍 A 端沿墙不滑，则 B 端沿地面向右滑行.



(1) 木棍在滑动过程中，线段 OP 的长度发生改变了吗？请说明理由；若不变，求 OP 的长.

(2) 如果木棍的底端 B 向外滑出 0.9 米，那么木棍的顶端 A 沿墙下滑多少米？

【答案】 (1) 1.25 米；(2) 1.3 米

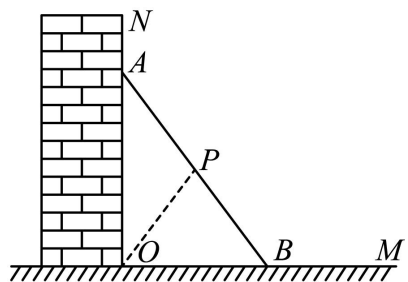
【解析】

【分析】 (1) 根据直角三角形斜边上中线性质的得出即可；

(2) 根据勾股定理求出 OA ，求出 OA' ，即可得到结论.

【详解】 (1) OP 的长不变.

连接 OP ，如图.



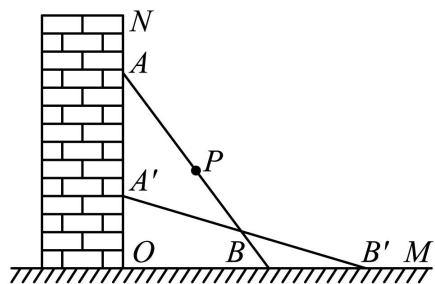
$\therefore P$ 是 AB 的中点,

$\therefore AP = BP$.

$\because \angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore OP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2.5 = 1.25$ (米).

(2) 如图.



由题意得 $BB' = 0.9$ 米.

$\because \angle MON = 90^\circ$,

$$\therefore OA = \sqrt{2.5^2 - 1.5^2} = 2 \text{ (米)},$$

$$\text{又 } OB' = 1.5 + 0.9 = 2.4 \text{ (米)},$$

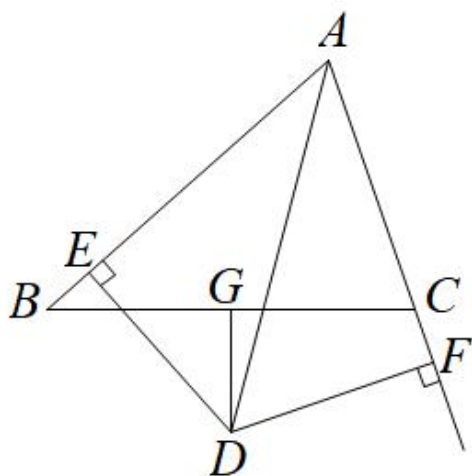
$$\therefore OA' = \sqrt{2.5^2 - 2.4^2} = 0.7 \text{ (米)},$$

$$\therefore AA' = 2 - 0.7 = 1.3 \text{ (米)}.$$

$\therefore$ 木棍的顶端 A 沿墙下滑 1.3 米.

【点睛】 本题考查了勾股定理和直角三角形斜边上中线性质的应用，能根据勾股定理求出各个边的长是解此题的关键，注意：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

23. 如图， $\triangle ABC$ 中， AD 平分 $\angle BAC$ ， $DG \perp BC$ 且平分 BC ， $DE \perp AB$ 于 E ， $DF \perp AC$ 于 F .



(1) 证明： $BE = CF$ ；

(2) 如果 $AB = 5$ ， $AC = 3$ ，求 AE 、 BE 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $AE=4$ ， $BE=1$

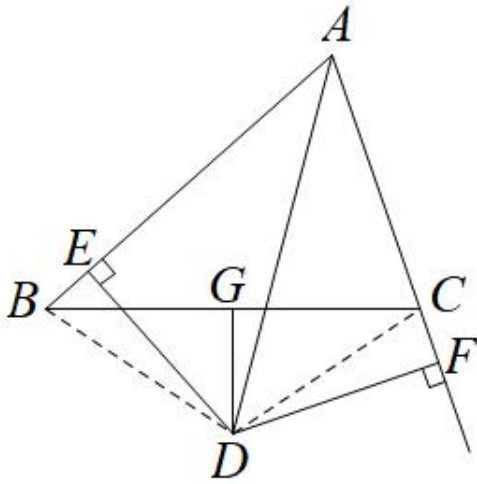
【解析】

【分析】 (1) 连接 BD 、 CD ，先由垂直平分线性质得 $BD=CD$ ，再由角平分线性质得 $DE=CF$ ，然后证 $Rt\triangle BED \cong Rt\triangle CFD$ (HL)，即可得出结论；

(2) 证明 $Rt\triangle AED \cong Rt\triangle AFD$ (HL)，得 $AE=AF$ ，则 $CF=AF-AC=AE-AC$ ，又因为 $BE=AB-AE$ ，由 (1) 知 $BE=CF$ ，则 $AB-AE=AE-AC$ ，代入 AB 、 AC 值即可求得 AE 长，继而求得 BE 长.

【小问 1 详解】

证明：如图，连接 BD 、 CD ，



$\therefore DG \perp BC$ 且平分 BC ,

$\therefore BD=CD$,

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F ,

$\therefore DE=CF$, $\angle DEB=\angle DFC=90^\circ$,

在 $Rt\triangle BED$ 与 $Rt\triangle CFD$ 中,

$$\begin{cases} BD = CD \\ DE = DF \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle BED \cong Rt\triangle CFD$ (HL),

$\therefore BE=CF$;

【小问 2 详解】

解: $\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F ,

$\therefore DE=CF$, $\angle DEB=\angle DFC=90^\circ$,

在 $Rt\triangle AED$ 与 $Rt\triangle AFD$ 中,

$$\begin{cases} AD = AD \\ DE = DF \end{cases},$$

$\therefore Rt\triangle AED \cong Rt\triangle AFD$ (HL),

$\therefore AE=AF$,

$\therefore CF=AF-AC=AE-AC$,

由 (1) 知: $BE=CF$,

$\therefore AB-AE=AE-AC$

即 $5-AE=AE-3$,

$\therefore AE=4$,

$$\therefore BE=AB-AE=5-4=1,$$

【点睛】本题考查角平分线的性质，线段垂直平分线的性质，全等三角形的判定与性质，熟练掌握角平分线的性质定义和线段垂直平分线的性质定理是解题的关键.

24. 某公司生产的新产品需要精加工后才能投放市场，为此王师傅承担了加工 300 个新产品的任务. 在加工了 80 个新产品后，王师傅接到通知，要求加快新产品加工的进程，王师傅在保证加工零件质量的前提下，平均每天加工新产品的个数比原来多 15 个，这样一共用 6 天完成了任务. 问接到通知后，王师傅平均每天加工多少个新产品.

【答案】55 个.

【解析】

【分析】根据关键句子“王师傅在保证加工零件质量的前提下，平均每天加工新产品的个数比原来多 15 个，这样一共用 6 天完成了任务”找到等量关系列出方程求解即可.

【详解】解：设接到通知后，王师傅平均每天加工 x 个新产品.

根据题意，得 $\frac{220}{x} + \frac{80}{x-15} = 6$.

$$x^2 - 65x + 550 = 0,$$

$$x_1 = 55, x_2 = 10.$$

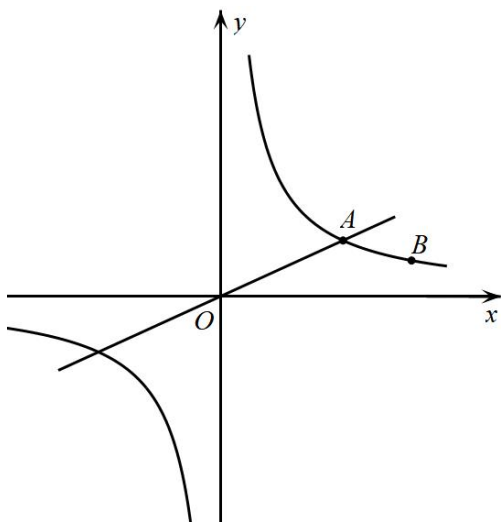
经检验： $x_1 = 55$ ， $x_2 = 10$ 都是原方程的解，但 $x_2 = 10$ 不符合题意，舍去.

答：接到通知后，王师傅平均每天加工 55 个新产品.

【点睛】此题考查了分式方程的应用，分析题意，找到关键描述语，找到合适的等量关系是解决问题的关键.

25. 在平面直角坐标系平面中，直线 $y = \frac{1}{2}x$ 经过点 $A(m, 2)$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像经过点 A 和点 $B(8, n)$.

- (1) 求反比例函数的解析式；
- (2) 在 x 轴上找一点 C ，当 $AC = BC$ 时，求点 C 的坐标；
- (3) 在 (2) 的条件下，求 $\triangle ACB$ 的面积.



【答案】 (1) $y = \frac{8}{x}$; (2) $C(\frac{45}{8}, 0)$; (3) $\frac{51}{16}$

【解析】

【分析】 (1) 先把 $A(m, 2)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$ 求出 m , 再把 $A(m, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 求出 k 即可;

(2) 先求出点 B 的坐标, 设 $C(x, 0)$, 根据两点间的距离公式求出 x 即可;

(3) 连接 AC , BC , 作 $AE \perp x$ 轴于 E , 作 $BF \perp x$ 轴于 F , 根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\text{梯形} ABFE} - S_{\triangle ACE} - S_{\triangle BCF}$ 求解即可;

【详解】 解: (1) 把 $A(m, 2)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$, 得

$$2 = \frac{1}{2}m,$$

$$\therefore m = 4,$$

把 $A(4, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得

$$2 = \frac{k}{4},$$

$$\therefore k = 8,$$

$$\therefore y = \frac{8}{x};$$

(2) 把 $B(8, n)$ 代入 $y = \frac{8}{x}$, 得

$$n = \frac{8}{8} = 1,$$

$$\therefore B(8, 1),$$

设 $C(x, 0)$,

$$\therefore AC = BC,$$

$$\therefore \sqrt{(4-x)^2 + 2^2} = \sqrt{(8-x)^2 + 1^2},$$

$$\therefore x = \frac{45}{8},$$

经检验 $x = \frac{45}{8}$ 是原方程的根,

$$\therefore C\left(\frac{45}{8}, 0\right);$$

(3) 连接 AC , BC , 作 $AE \perp x$ 轴于 E , 作 $BF \perp x$ 轴于 F ,

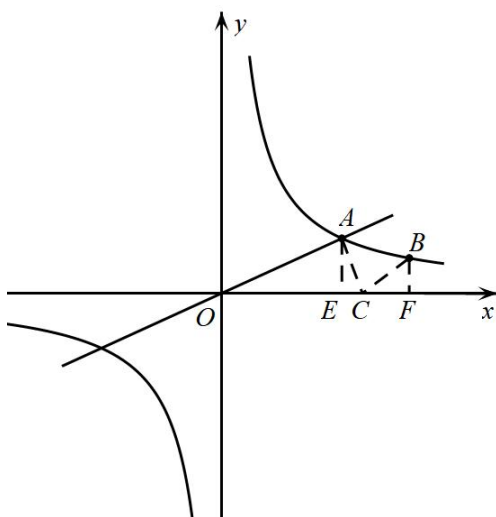
$$\therefore A(4, 2), B(8, 1), C\left(\frac{45}{8}, 0\right),$$

$$\therefore AE=2, BF=1, EF=8-4=4, CE=\frac{45}{8}-4=\frac{13}{8}, CF=8-\frac{45}{8}=\frac{19}{8},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\text{梯形} ABFE} - S_{\triangle ACE} - S_{\triangle BCF}$$

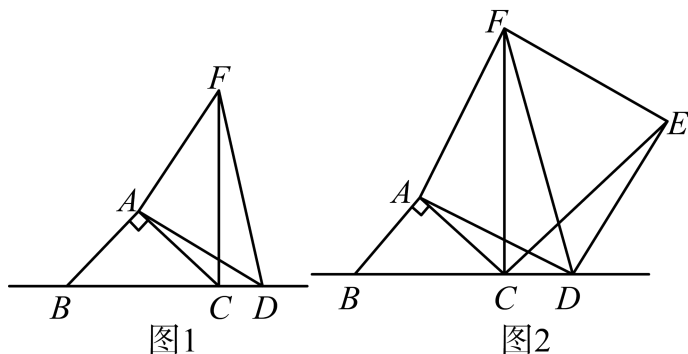
$$= \frac{1}{2} \times (1+2) \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{13}{8} - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{19}{8}$$

$$= \frac{51}{16}.$$



【点睛】 本题考查了待定系数法求反比例函数解析式，反比例函数图像上点的坐标特征，坐标与图形的性质，两点间的距离公式，以及割补法求图形的面积等知识，求出反比例函数解析式是解答本题的关键.

26. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 为线段 BC 延长线上一点，以 AD 为腰作等腰直角 $\triangle DAF$ ，使 $\angle DAF = 90^\circ$ ，连接 CF .



- (1) 请判断 CF 与 BC 的位置关系，并说明理由；
- (2) 若 $BC=8$ ， $4CD=BC$ ，求线段 AD 的长；
- (3) 如图 2，在 (2) 的条件下，将 $\triangle DAF$ 沿线段 DF 翻折，使点 A 与点 E 重合，连接 CE ，求线段 CE 的长。

【答案】(1) $CF \perp BC$ ，理由见解析

(2) $2\sqrt{13}$

(3) $6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACF$ (SAS)，则 $\angle ADB = \angle AFC$ ，如图 1，记 AD 、 CF 的交点为 O ，根据 $\angle FAO + \angle AFO + \angle AOF = 180^\circ = \angle DCO + \angle CDO + \angle COD$ ， $\angle AOF = \angle COD$ ，可得 $\angle FAO = \angle DCO = 90^\circ$ ，进而可得 $CF \perp BC$ ；

(2) 如图 2，过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，则 $BH = CH = AH = \frac{1}{2}BC = 4$ ， $DH = 6$ ，由勾股定理得， $AD = \sqrt{AH^2 + DH^2}$ ，计算求解即可；

(3) 由翻折的性质可知， $DE = AD$ ， $\angle EDF = \angle ADF = 45^\circ$ ， $\angle ADE = 90^\circ$ ，如图 3，过 A 作 $AM \perp BC$ 于 M ，过 E 作 $EN \perp BC$ 于 N ，证明 $\triangle ADM \cong \triangle DEN$ (AAS)，则 $DN = AM = 4$ ， $EN = DM = 6$ ， $CN = 6$ ，由勾股定理得， $CE = \sqrt{CN^2 + EN^2}$ ，计算求解即可。

【小问 1 详解】

解： $CF \perp BC$ ，理由如下：

$\because$ 等腰直角 $\triangle DAF$ ， $\angle DAF = 90^\circ$ ，

$\therefore AD = AF$ ，

又 $\because \angle BAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAF + \angle CAD$ ，即 $\angle BAD = \angle CAF$ ，

$$\because AB = AC, \angle BAD = \angle CAF, AD = AF,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AFC,$$

如图 1, 记 AD 、 CF 的交点为 O ,

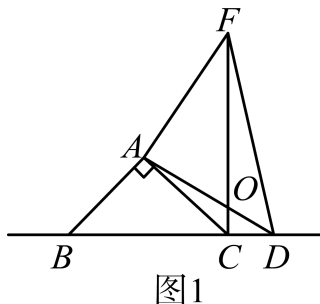


图1

$$\because \angle FAO + \angle AFO + \angle AOF = 180^\circ = \angle DCO + \angle CDO + \angle COD, \angle AOF = \angle COD,$$

$$\therefore \angle FAO = \angle DCO = 90^\circ,$$

$$\therefore CF \perp BC;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because BC = 8, 4CD = BC,$$

$$\therefore CD = 2,$$

如图 2, 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ,

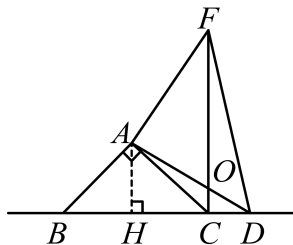


图2

$$\because \triangle ABC \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore BH = CH = AH = \frac{1}{2} BC = 4,$$

$$\therefore DH = 6,$$

$$\text{由勾股定理得, } AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore \text{线段 } AD \text{ 的长为 } 2\sqrt{13};$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: 由翻折的性质可知, } DE = AD, \angle EDF = \angle ADF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle AMD &= 90^\circ = \angle DNE, \\ \text{同理 (2) 可知, } AM &= 4, \quad MD = 6, \\ \therefore \angle ADM + \angle EDN &= 90^\circ = \angle EDN + \angle DEN, \\ \therefore \angle ADM &= \angle DEN, \\ \therefore \angle AMD &= 90^\circ = \angle DNE, \quad \angle ADM = \angle DEN, \quad AD = DE, \\ \therefore \triangle ADM &\cong \triangle DEN \text{ (AAS)}, \\ \therefore DN &= AM = 4, \quad EN = DM = 6, \\ \therefore CN &= 6, \end{aligned}$$

∴ 线段 CE 的长为 $6\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，三角形内角和定理，勾股定理，折叠的性质，等腰三角形的性质. 熟练掌握全等三角形的判定与性质，折叠的性质是解题的关键.