

2023-2024 学年上海市静安区市西初级中学八年级（上）期中数学试卷

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号填在括号内】

1. 下列二次根式中，最简二次根式是（ ）

A. $\sqrt{0.1a}$

B. $\sqrt{\frac{1}{2a}}$

C. $\sqrt{a^3}$

D. $\sqrt{a^2+1}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用最简二次根式定义判断即可；此题考查了最简二次根式，熟练掌握最简二次根式的定义是解本题的关键.

【详解】解：A、原式 = $\frac{\sqrt{10a}}{10}$ ，不符合题意

B、原式 = $\frac{\sqrt{2a}}{2a}$ 不符合题意

C、原式 = $a\sqrt{a}$ 不符合题意

D、 $\sqrt{a^2+1}$ 是最简二次根式，符合题意

故选：D.

2. 下列各式中，能与 $\sqrt{12}$ 合并的是（ ）

A. $\sqrt{8}$

B. $\sqrt{20}$

C. $\sqrt{27}$

D. $\sqrt{32}$

【答案】C

【解析】

【分析】将 $\sqrt{12}$ 化为最简，再将各选项的二次根式化为最简即可得出答案；

本题考查最简二次根式的知识，注意将各项化为最简后再判断是解题的关键.

【详解】解： $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3},$$

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2},$$

∴能和 $\sqrt{12}$ 合并的是 $\sqrt{27}$

故选：C.

3. 下列方程中，是关于 x 的一元二次方程的是（ ）

A. $x^2 = -1$

B. $x^2 - 2\sqrt{x} + 1 = 0$

C. $3x^2 + x = (3x - 1)(x + 2)$

D. $ax^2 + bx + c = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的定义，牢记“只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程叫一元二次方程”是解题的关键，根据一元二次方程的定义，逐一分析四个选项中的方程，即可得出结论.

【详解】解：A. $x^2 = -1$ ，是一元二次方程；

B. $x^2 - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ ，不是整式方程，选项B不符合题意；

C. 原方程可整理得： $4x - 2 = 0$ ，是一元一次方程，选项C不符合题意；

D. 当 $a = 0$ 时，选项D不符合题意.

故选：A.

4. 已知三角形两边长分别为4和8，第三边的长是一元二次方程 $x^2 - 14x + 40 = 0$ 的根，则这个三角形的周长为（ ）

A. 16

B. 22

C. 24

D. 16 或 22

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程，构成三角形的条件，正确的解一元二次方程是解题的关键. 先解一元二次方程，根据三边关系确定第三边的长，进而求得三角形的周长.

【详解】解：∵ $x^2 - 14x + 40 = 0$,

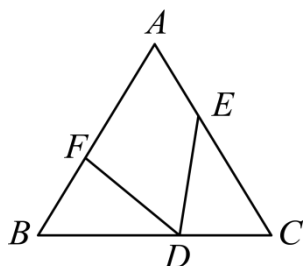
$$\therefore (x-4)(x-10) = 0,$$

解得 $x_1 = 4$, $x_2 = 10$,

∴第三边的长为二次方程 $x^2 - 14x + 40 = 0$ 的一根,

$\therefore$ 边长 4, 4, 8 不能构成三角形,
 $\therefore$ 三角形的三边为: 4, 8, 10,
 $\therefore$ 三角形的周长为 $4+8+10=22$,
 故选: B.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $CD=BF$, $BD=CE$, $\angle A=62^\circ$, 则 $\angle EDF$ 的度数为 ()



- A. 59° B. 60° C. 61° D. 62°

【答案】 A

【解析】

【分析】 此题重点考查等腰三角形的性质、三角形内角和定理、全等三角形的判定与性质等知识, 证明 $\triangle BDF \cong \triangle CED$ 是解题的关键.

由 $AB=AC, \angle A=62^\circ$, 求得 $\angle B=\angle C=59^\circ$, 再证明 $\triangle BDF \cong \triangle CED$, 得 $\angle BFD=\angle CDE$, 则
 $\angle B=180^\circ-\angle BFD-\angle BDF=180^\circ-\angle CDE-\angle BDF=\angle EDF=59^\circ$, 于是得到问题的答案.

【详解】 解: $\because AB=AC, \angle A=62^\circ$,

$$\therefore \angle B=\angle C=\frac{1}{2}\times(180^\circ-62^\circ)=59^\circ,$$

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CED$ 中,

$$\begin{cases} BF=CD \\ \angle B=\angle C, \\ BD=CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CED (SAS),$$

$$\therefore \angle BFD=\angle CDE,$$

$$\therefore 180^\circ-\angle BFD-\angle BDF=180^\circ-\angle CDE-\angle BDF,$$

$$\therefore \angle B=180^\circ-\angle BFD-\angle BDF, \angle EDF=180^\circ-\angle CDE-\angle BDF,$$

$$\therefore \angle B=\angle EDF=59^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = 59^\circ,$$

故选：A.

6. 下列命题中，真命题是（ ）

- A. 两边及一个角对应相等的两个三角形全等
- B. 两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等
- C. 两边及其中一边上的高对应相等的两个三角形全等
- D. 两边及第三边上的高对应相等的两个三角形全等

【答案】B

【解析】

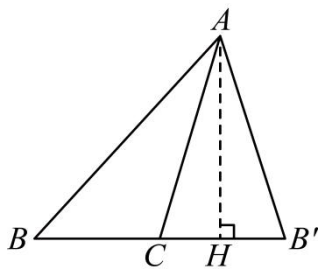
【分析】本题考查了命题与定理，解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定方法.

【详解】解：A、两边及一个角对应相等的两个三角形全等，不符合 SAS ，应是两边及夹角对应相等的两个三角形全等，此选项错误，是假命题，故不符合题意；

B、有两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等，符合 SSS ，此选项正确，是真命题，故符合题意；

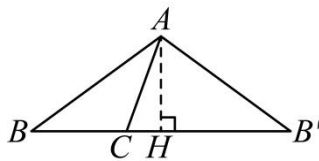
C、两边及其中一边上的高对应相等的两个三角形全等，是假命题，故不符合题意；

反例：如下图，在 $AB'C$ 和 $\triangle ABC$ 中， $AC = AC$, $BC = B'C$ 高 $AH = AH$ ， $AB'C$ 和 $\triangle ABC$ 不一定全等；



D、两边及第三边上的高对应相等的两个三角形不一定全等，是假命题，故不符合题意，

反例：如下图，在 $AB'C$ 和 $\triangle ABC$ 中， $AB = AB'$, $AC = AC$ 高 $AH = AH$ ， $AB'C$ 和 $\triangle ABC$ 不一定全等，



故选：B.

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

7. 二次根式 $\sqrt{3x-5}$ 有意义, 则 x 满足的条件是_____;

【答案】 $x \geq \frac{5}{3}$

【解析】

【分析】二次根式有意义的条件为: 二次根式中的被开方数是非负数; 本题主要考查了二次根式有意义的条件, 如果一个式子中含有多个二次根式, 那么它们有意义的条件是: 各个二次根式中的被开方数都必须是非负数.

【详解】解: $\because$ 二次根式 $\sqrt{3x-5}$ 有意义,

$$\therefore 3x-5 \geq 0,$$

解得 $x \geq \frac{5}{3}$

即 x 满足的条件是 $x \geq \frac{5}{3}$

故答案为: $x \geq \frac{5}{3}$.

8. 化简: $\sqrt{(3-\pi)^2} =$ _____.

【答案】 $\pi-3$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质即可求出答案.

【详解】解: 原式 $= |3-\pi| = \pi-3$

故答案为: $\pi-3$.

【点睛】本题考查二次根式的性质与化简, 解题的关键是熟练运用二次根式的性质, 本题属于基础题型.

9. 化简: $\sqrt{20a^3b^2} (b > 0) =$ _____.

【答案】 $2ab\sqrt{5a}$

【解析】

【分析】利用最简二次根式定义解答即可; 此题考查了最简二次根式, 熟练掌握最简二次根式的定义是解本题的关键.

【详解】解: $\because b > 0, 20a^3b^2 \geq 0,$

$$\therefore a \geq 0,$$

$$\therefore \text{原式} = 2ab\sqrt{5a}$$

故答案为: $2ab\sqrt{5a}$.

10. 不等式 $\sqrt{3}x - 2 < x$ 的解集是_____.

【答案】 $x < \sqrt{3} + 1$

【解析】

【分析】 移项、合并同类项、系数化为 1 即可求解.

【详解】 解: $\sqrt{3}x - 2 < x$,

$$\sqrt{3}x - x < 2,$$

$$(\sqrt{3} - 1)x < 2$$

$$x < \frac{2}{\sqrt{3} - 1},$$

$$\text{即 } x < \sqrt{3} + 1,$$

故答案为: $x < \sqrt{3} + 1$.

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式, 解题的关键是熟练掌握不等式的性质.

11. 方程 $x^2 = 2x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 2$

【解析】

【分析】 此题考查了解一元二次方程, 解题的关键是方程移项变形后, 利用因式分解法求出解即可.

【详解】 解: $x^2 = 2x$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2,$$

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = 2$.

12. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 3x + 2m = 0$ 有实数根, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq \frac{9}{8}$

【解析】

【分析】一元二次方程有实数根，则根据根的判别式可得 $b^2 - 4ac \geq 0$ ，由此建立关于 m 的不等式，即可求出 m 的取值范围.

【详解】解：一元二次方程 $x^2 - 3x + 2m = 0$ 有实数根， $a = 1, b = -3, c = 2m$ ，

$$\therefore b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2m = 9 - 8m \geq 0,$$

$$\text{解得： } m \leq \frac{9}{8},$$

$$\text{故答案为： } m \leq \frac{9}{8}$$

【点睛】本题考查了一元二次方程根的情况，熟练使用根的判别式是解题的关键.

13. 命题“全等三角形的对应角相等”的逆命题是_____命题. (填“真”或“假”)

【答案】假

【解析】

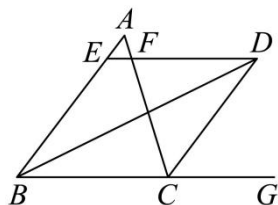
【分析】首先分清题设是：两个三角形全等，结论是：对应角相等，把题设与结论互换即可得到逆命题，然后判断正误即可.

【详解】解：“全等三角形的对应角相等”的题设是：两个三角形全等，结论是：对应角相等，因而逆命题是：对应角相等的三角形全等. 是一个假命题.

故答案为：假.

【点睛】本题考查了互逆命题的知识，两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题. 命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

14. 如图， $\angle ABC$ 的平分线 BD 与外角 $\angle ACG$ 的平分线 CD 交于点 D ，过点 D 作 BC 的平行线交 AB 于点 E ，交 AC 于点 F ， $BE = 10$ ， $CF = 8$ ，则 $EF =$ _____.



【答案】2

【解析】

【分析】先根据平行线的性质和角平分线的定义证明 $\angle EBD = \angle EDB$ 得到 $ED = EB = 10$ ，证明 $\angle FCD = \angle FDC$ 得到 $FD = FC = 8$ ，然后计算即可；

本题考查了角平分线的定义：角的平分线把角分成相等的两部分；也考查了平行线的性质和等腰三角形的

判定与性质.

【详解】解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle EDB = \angle GBD, \angle EDC = \angle GCD,$$

$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle GBD,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB,$$

$$\therefore ED = EB = 10,$$

$$\because CD \text{ 平分 } \angle ACG,$$

$$\therefore \angle FCD = \angle GCD,$$

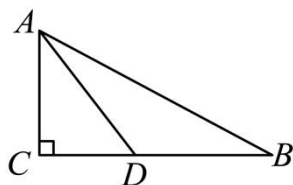
$$\therefore \angle FCD = \angle FDC,$$

$$\therefore FD = FC = 8,$$

$$\therefore EF = ED - FD = 10 - 8 = 2.$$

故答案为: 2.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, AD 平分 $\angle CAB$, $BC = 8$, $BD = 5$, 则点 D 到 AB 的距离是 _____.

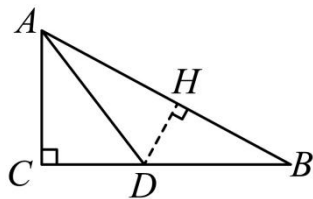


【答案】3

【解析】

【分析】此题考查了角平分线的性质定理, 熟记角平分线上的点到角的两边距离相等是解题的关键. 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H , 先求出 $CD = BC - BD = 3$, 由角平分线上的点到角的两边距离相等可得 $DH = DC = 3$, 即可得到点 D 到 AB 的距离.

【详解】解: 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H ,



$$\because BC = 8, \quad BD = 5,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 3,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore DC \perp AC,$$

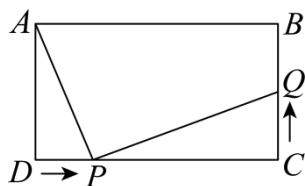
$\because AD$ 平分 $\angle CAB$,

$\therefore DH = DC = 3$,

$\therefore$ 点 D 到 AB 的距离是 3,

故答案为: 3.

16. 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AD = 6\text{cm}$, $DC = 8\text{cm}$, 点 P 从点 D 出发, 以 1cm/s 的速度在线段 DC 上运动, 点 Q 从点 C 出发以 $x\text{cm/s}$ 速度在线段 CB 上运动, 若点 P 、点 Q 同时出发, 当 $x = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $\triangle ADP$ 与 $\triangle PCQ$ 全等.



【答案】 1 或 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的性质, 分 $\triangle ADP \cong \triangle PCQ$ 和 $\triangle ADP \cong \triangle QCP$, 两种情况, 进行讨论求解即可.

【详解】 解: 设运动时间为 ts ,

则: $DP = t$, $CQ = xt$,

$\therefore CP = CD - DP = 8 - t$;

当: $\triangle ADP \cong \triangle PCQ$ 时:

则: $AD = CP$, $DP = CQ$,

$$\therefore \begin{cases} 6 = 8 - t \\ t = tx \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} t = 2 \\ x = 1 \end{cases},$$

②当 $\triangle ADP \cong \triangle QCP$ 时, 则: $AD = CQ$, $DP = CP$,

$$\therefore \begin{cases} 6 = tx \\ t = 8 - t \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ t = 4 \end{cases}$

综上 $x = 1$ 或 $x = \frac{3}{2}$.

故答案为: 1 或 $\frac{3}{2}$.

17. 已知 p 、 q 是实数, 有且只有三个不同的 x 满足方程 $|x^2 + px + q| = 3$, 则 q 的最小值是_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解以及根的判别式, 由 $|x^2 + px + q| = 3$ 得到 $x^2 + px + q - 3 = 0$ ①, $x^2 + px + q + 3 = 0$ ②, 根据根的判别式得到 $\Delta_1 = p^2 - 4q + 12$, $\Delta_2 = p^2 - 4q - 12$, 依此 $\Delta_2 = 0$, $\Delta_1 = 24$, 可得 $p^2 - 4q - 12 = 0$, 根据题意由根的判别式得到 $p^2 - 4q - 12 = 0$ 是解题的关键.

【详解】 解: $\because |x^2 + px + q| = 3$,

$$\therefore x^2 + px + q - 3 = 0 \text{ ①}, \quad x^2 + px + q + 3 = 0 \text{ ②},$$

$$\therefore \Delta_1 = p^2 - 4q + 12, \quad \Delta_2 = p^2 - 4q - 12,$$

$$\therefore \Delta_1 > \Delta_2,$$

$$\therefore \text{有且只有三个不同的 } x \text{ 值满足方程 } |x^2 + px + q| = 3,$$

$$\therefore \Delta_2 = 0, \quad \Delta_1 = 24,$$

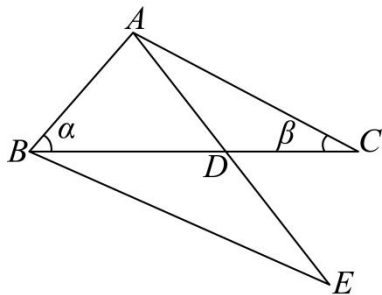
$$\therefore p^2 - 4q - 12 = 0,$$

$$\therefore q = \frac{1}{4}p^2 - 3,$$

当 $p = 0$ 时, q 的最小值 -3,

故答案为: -3.

18. 如图, 在钝角 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC > 90^\circ$, $AB < AC$, 设 $\angle ABC = \alpha$, $\angle C = \beta$, 过点 A 的射线 l 交 BC 于点 D, 点 E 在 AD 延长线上, 且 $BC = BE$, $\angle E = \angle C$, 请写出 $\angle BAE$ 、 α 和 β 满足的数量关系: _____.



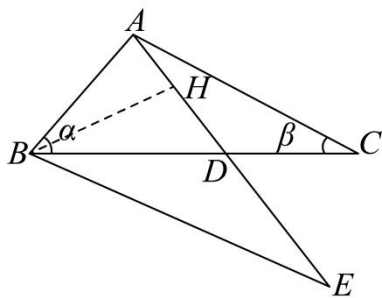
【答案】 $\angle BAE = \alpha + \beta$

【解析】

【分析】此题主要考查了全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，在 AE 上截取 $HE = AC$ ，连接 BH ，先证 $\triangle HBE \cong \triangle ABC$ ，从而得到 $AB = BH$ ， $\angle HBE = \angle ABC = \alpha$ ，进而得 $\angle BAE = \angle BHA$ ，由此可得 $\angle BAE$ 、 α 和 β 满足的数量关系，熟练掌握全等三角形的判定和性质，正确地作出辅助线构造全等三角形是解决问题的关键.

【详解】解： $\angle BAE$ 、 α 和 β 满足的数量关系是： $\angle BAE = \alpha + \beta$ ，

在 AE 上截取 $HE = AC$ ，连接 BH ，



$$\because \angle ABC = \alpha, \angle C = \beta, \angle E = \angle C,$$

$$\therefore \angle E = \angle C = \beta,$$

在 $\triangle HBE$ 和 $\triangle ABC$ 中，

$$\begin{cases} HE = AC \\ \angle C = \angle E, \\ BC = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle HBE \cong \triangle ABC (\text{SAS})$$

$$\therefore AB = BH, \angle HBE = \angle ABC = \alpha,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BHA,$$

$$\therefore \angle BHA = \angle HBE + \angle E = \alpha + \beta$$

$$\therefore \angle BAE = a + \beta.$$

三、计算题 (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

19. 计算: $27^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{2} - 1)^2 - (\frac{1}{2})^{-1} + \frac{2}{\sqrt{2} - 1}.$

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据实数的运算法则计算 .

【详解】 解: 原式 $= 3 + 3 - 2\sqrt{2} - 2 + \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}$

$$= 3 + 3 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} + 2$$

$$= 6.$$

【点睛】 本题考查实数的混合运算, 熟练掌握与实数有关的立方根、完全平方公式、二次根式的运算及负整数指数运算等是解题关键.

20. $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} (x \neq y)$

【答案】 0

【解析】

【分析】 利用二次根式的性质和平方差、完全平方公式将二次根式化简, 然后约分后合并即可.

【详解】 解: $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$= \sqrt{x} - \sqrt{y} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$= \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$= 0.$$

【点睛】 本题考查了平方差公式, 完全平方公式, 分式的化简, 二次根式的加减计算, 解题的关键在于能够熟练掌握平方差公式和完全平方公式将二次根式化简.

四、解方程 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

21 解方程: $4(1-x)^2 = 25$

【答案】 $x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 此题主要考查了利用平方根解方程. 直接利用平方根的定义解方程即可得出答案, 熟练掌握平方根的定义是解此题的关键.

【详解】 解: $\because 4(1-x)^2 = 25,$

$$\therefore (1-x)^2 = \frac{25}{4},$$

$$\text{则 } 1-x = \pm \frac{5}{2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -\frac{3}{2}.$$

22. $\sqrt{3}x(x-5)+4(5-x)=0.$

【答案】 $x_1 = 5, x_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 利用因式分解法求解即可; 本题主要考查解一元二次方程, 解题的关键是根据方程的特点选择简便的方法.

【详解】 解: $\because \sqrt{3}x(x-5)+4(5-x)=0$

$$\therefore \sqrt{3}x(x-5)-4(x-5)=0$$

$$\therefore (x-5)(\sqrt{3}x-4)=0$$

$$\text{则 } x-5=0 \text{ 或 } \sqrt{3}x-4=0$$

$$\text{解得 } x_1 = 5, x_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

23. $x^2+10x-9975=0.$

【答案】 $x_1 = 95, x_2 = -105$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元二次方程, 先把常数项移到方程右边, 再把方程左右两边同时加上一项系数一半的平方进行配方, 进而解方程即可得到答案.

【详解】解： $\because x^2 + 10x - 9975 = 0$,

$$\therefore x^2 + 10x = 9975,$$

$$\therefore x^2 + 10x + 25 = 9975 + 25, \text{ 即 } (x+5)^2 = 10000,$$

$$\therefore x+5 = \pm 100,$$

解得 $x_1 = 95, x_2 = -105$.

24. 解方程: $2x^2 - 3x - 4 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{3+\sqrt{41}}{4}, x_2 = \frac{3-\sqrt{41}}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的解法，掌握公式法是解题的关键.

【详解】解： $\because a = 2, b = -3, c = -4$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 32 = 41 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根,

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2 \times 2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{3+\sqrt{41}}{4}, x_2 = \frac{3-\sqrt{41}}{4}.$$

五、解答题（本大题共 5 小题，25、26、27 每题 6 分，28、29 每题 9 分，满分 36 分）

25. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + \frac{1}{4} = 0 (a \neq 0)$.

(1) 若方程有两个相等的实数根，试写出一组满足条件的 a 、 b 的值；

(2) 当 $a > 1, 0 < b < 1$ 时，试判断方程根的情况.

【答案】 25 $b = 1, a = 1$ (答案不唯一)

26. 原方程没有实数解

【解析】

【分析】 (1) 利用根的判别式的意义得到 $\Delta = b^2 - 4a \times \frac{1}{4} = b^2 - a = 0$ ，然后 b 取一值，从而得到

对应 a 的值；

(2) 利用 a 和 b 的范围可判断 $\Delta < 0$ ，从而根据根的判别式的意义可判断根的情况；

本题考查了根的判别式：一元二次方程的根与 Δ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根。

【小问 1 详解】

解：根据题意得 $\Delta = b^2 - 4a \times \frac{1}{4} = b^2 - a = 0$ ，

即 $a = b^2$ ，

当 $b = 1$ 时， $a = 1$ （答案不唯一）；

【小问 2 详解】

$\because a > 1, 0 < b < 1$

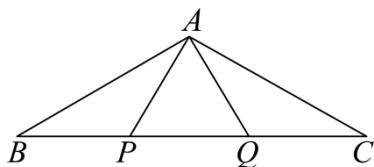
$\therefore b^2 - a < 0$ ，

即 $\Delta < 0$ ，

$\therefore$ 原方程没有实数解。

26. 已知：如图， P 、 Q 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上两点，且 $AB = AC$ ， $AP = AQ$ 。

求证： $BP = CQ$ 。

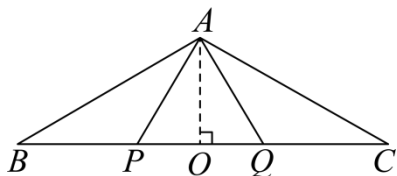


【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形三线合一的性质，过点 A 作 $AO \perp BC$ 于 O ，根据等腰三角形的性质可得 $BO = CO$ ， $PO = QO$ ，根据等式的性质，可得答案。

【详解】解：过点 A 作 $AO \perp BC$ 于 O 。



$\because AB = AC$ ， $AO \perp BC$ ，

$\therefore BO = CO$ ，

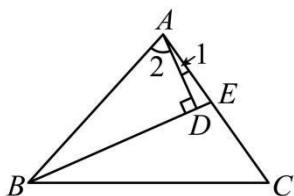
$$\therefore AP = AQ, AO \perp BC,$$

$$\therefore PO = QO,$$

$$\therefore BO - PO = CO - QO,$$

$$\therefore BP = CQ.$$

27. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, BE 是 $\angle ABC$ 的平分线, $AD \perp BE$, 垂足为 D . 求证: $\angle 2 = \angle 1 + \angle C$.

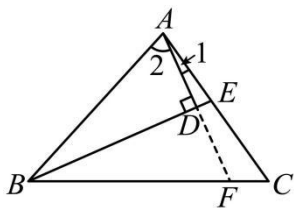


【答案】 详见解析

【解析】

【分析】 延长 AD 交 BC 于点 F , BE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线且 $AD \perp BE$, 得到 $\triangle ABD \cong \triangle FBD$ (ASA), 则 $\angle 2 = \angle DFB$, 由三角形外角的性质得到 $\angle DFB = \angle 1 + \angle C$, 即可得到结论.

【详解】 证明: 如图所示, 延长 AD 交 BC 于点 F .



$$\because AD \perp BE,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle FDB = 90^\circ.$$

$$\because BE \text{ 是 } \angle ABF \text{ 的平分线},$$

$$\therefore \angle ABD = \angle FBD.$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle FBD$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle FBD, \\ BD = BD, \\ \angle ADB = \angle FDB, \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle FBD \text{ (ASA)},$$

$$\therefore \angle 2 = \angle DFB.$$

$$\because \angle DFB = \angle 1 + \angle C,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 1 + \angle C.$$

【点睛】此题考查了全等三角形的判定和性质、三角形外角的性质等知识，证明 $\triangle ABD \cong \triangle FBD$ (ASA) 是解题的关键.

28. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 AC 的中点.

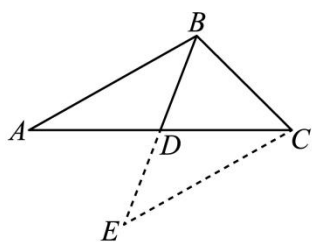


图1

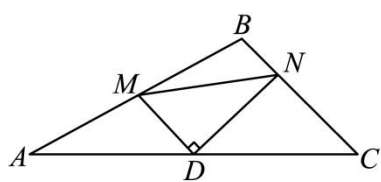


图2

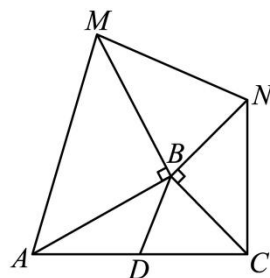


图3

(1) 如图1，连接 BD ，若 $AB = 6$ ， $BC = 4$ 求中线 BD 的取值范围. 小明是这样思考的：延长 BD 至 E ，使 $DE = BD$ ，连接 CE ，利用三角形全等将边 AB 转化到 CE ，在 $\triangle BCE$ 中利用三角形三边关系即可求出中线 BD 的取值范围. 在这个过程中，小明证明三角形全等用到的判定方法是：_____；中线 BD 的取值范围是_____；

(2) 如图2，点 M 在边 AB 上，点 N 在边 BC 上，若 $DM \perp DN$ ，试猜想线段 AM 、 CN 、 MN 能否构成三角形，并证明你的结论；

(3) 如图3， $AB = MB$ ， $BC = BN$ ， $\angle ABM = \angle NBC = 90^\circ$ ，连接 MN ，探索 BD 与 MN 的关系，并说明理由.

【答案】(1) SAS； $1 < BD < 5$

(2) 线段 AM 、 CN 、 MN 能构成三角形. 证明见解析

(3) $MN = 2BD$ ， $BD \perp MN$. 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由SAS证明 $\triangle ABD \cong \triangle CED$ 得出 $CE = AB = 6$ ，在 $\triangle BCE$ 中，由三角形的三边关系即可得出结论；

(2) 延长 ND 至点 F ，使 $FD = ND$ ，连接 AF 、 MF ，同(1)得： $\triangle AFD \cong \triangle CND$ ，由全等三角形的性质得出 $AF = CN$ ，由线段垂直平分线的性质得出 $MF = MN$ ，在 $\triangle AFM$ 中，由三角形的三边关系即可得出结论；

(3) 延长 BD 至 E ，使 $DE = BD$ ，连接 CE ，由(1)得： $\triangle ABD \cong \triangle CED$ ，由全等三角形的性质得出 $\angle ABD = \angle E$ ， $AB = CE$ ，证出 $\angle BCE = \angle MBN$ ，证明 $\triangle BCE \cong \triangle NBM$ 得出 $BE = MN$ ， $\angle EBC = \angle MNB$ ，则 $2BD = MN$ ，延长 DB 交 MN 于 G ，证出 $\angle BGN = 90^\circ$ ，得出结论即可.

【小问1 详解】

解： $\because BD$ 是 AC 边上的中线，

$$\therefore AD = CD,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CED$ 中,

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADB = \angle CDE, \\ BD = ED \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CED (\text{SAS}),$$

$$\therefore CE = AB = 6,$$

在 $\triangle CBE$ 中, 由三角形的三边关系得: $CE - BC < BE < CE + BC$,

$$\therefore 6 - 4 < BE < 6 + 4, \text{ 即 } 2 < BE < 10,$$

$$\therefore 1 < BD < 5;$$

故答案为: SAS ; $1 < BD < 5$;

【小问 2 详解】

线段 AM 、 CN 、 MN 能构成三角形

证明: 延长 ND 至点 F , 使 $FD = ND$, 连接 AF 、 MF

如图 2 所示:

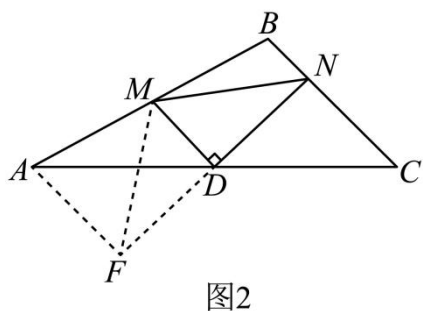


图2

同 (1) 得: $\triangle AFD \cong \triangle CND (\text{SAS}),$

$$\therefore AF = CN,$$

$$\because DM \perp DN, FD = ND,$$

$$\therefore MF = MN,$$

在 $\triangle AFM$ 中, 由三角形的三边关系得: $AM + AF > MF$,

$$\therefore AM + CN > MN,$$

$\therefore$ 线段 AM 、 CN 、 MN 能构成三角形.

【小问 3 详解】

$$2BD = MN, BD \perp MN$$

理由如下:

由 (1) 得: $\triangle ABD \cong \triangle CED$,

$$\therefore \angle ABM = \angle NBC = 90^\circ,$$

即 $\angle ABD + \angle CBD + \angle MBN = 180^\circ$,

$$\therefore \angle BCE = \angle MBN,$$

$$\therefore AB = MB, \quad BC = BN,$$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle NBM$ 中,

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle NBM \text{ (SAS)},$$

$$\therefore 2BD = MN.$$

$$\therefore \angle NBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MNB + \angle NBG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BGN = 90^\circ,$$

$\therefore BD \perp MN$,

即 $MN = 2BD$, $BD \perp MN$.

【点睛】此题是三角形综合题，主要考查了全等三角形的判定与性质、三角形的三边关系、线段垂直平分线的性质、等腰直角三角形的性质、角的关系等知识；本题综合性强，有一定难度，通过作辅助线证明三角形全等是解决问题的关键.

29. 阅读材料：若关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根均为整数，则称方程为“快乐方程”. 通过计算发现，任意一个“快乐方程”的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 一定为完全平方数. 现规定

$F(a, b, c) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ 为该“快乐方程”的“快乐数”. 例如“快乐方程” $x^2 - 3x - 4 = 0$ ，的两根均

为整数，其“快乐数” $F(1, -3, -4) = \frac{4 \times 1 \times (-4) - (-3)^2}{4 \times 1} = -\frac{25}{4}$ ，若有另一个“快乐方

程” $px^2 + qx + r = 0 (p \neq 0)$ 的“快乐数” $F(p, q, r)$ ，且满足 $|r \cdot F(a, b, c) - c \cdot F(p, q, r)| = 0$ ，

则称 $F(a, b, c)$ 与 $F(p, q, r)$ 互为“开心数”.

(1) “快乐方程” $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的“快乐数”为_____;

(2) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ (m 为整数, 且 $1 < m < 6$) 是“快乐方程”，求 m 的值，并求该方程的“快乐数”；

(3) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + m + 1 = 0$ 与 $x^2 - (n+2)x + 2n = 0$ (m, n 均为整数) 都是“快乐方程”，且其“快乐数”互为“开心数”，求 n 的值.

【答案】(1) -4 (2) $-\frac{25}{4}$

(3) 0 或 3 或 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程根的判别式以及“快乐方程”的定义，读懂题目中“快乐方程”，“快乐数”的定义是解题的关键.

(1) 根据“快乐数”的定义即可求出“快乐方程” $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的“快乐数”；

(2) 先计算 $\Delta = b^2 - 4ac = 4m + 13$ ，根据“快乐方程”的定义，得到 $4m + 13$ 为完全平方数，根据 $1 < m < 6$ ，得到 $17 < 4m + 13 < 37$ ，即可求出 $4m + 13 = 25$ 或 36 ，根据 m 为整数，即可求出 m 的值，即可求其“快乐数”；

(3) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + m + 1 = 0$ 是“快乐方程”，即可求出 m 的值，

求出方程 $x^2 - (n+2)x + 2n = 0$ 的“快乐数”，根据“开心数”的定义即可求出 n 的值.

【小问 1 详解】

解：方程： $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的“快乐数 $F(1, -2, -3) = \frac{4 \times 1 \times (-3) - (-2)^2}{4 \times 1} = -4$ ，

故答案为： -4 ；

【小问 2 详解】

解：方程 $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4m + 13,$$

$$\therefore 1 < m < 6,$$

$$\therefore 17 < 4m + 13 < 37,$$

又方程 $x^2 - (2m-1)x + m^2 - 2m - 3 = 0$ 是“快乐方程”，

$$\therefore 4m + 13 = 25 \text{ 或 } 36,$$

$$\therefore m = 3, \quad m = \frac{23}{4} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore \text{方程为: } x^2 - 5x = 0,$$

$$\text{则 } F(1, -5, 0) = \frac{4 \times 1 \times 0 - (-5)^2}{4 \times 1} = -\frac{25}{4},$$

故其“快乐数”数是 $-\frac{25}{4}$ ；

【小问 3 详解】

解： $x^2 - mx + m + 1 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = (-m)^2 - 4(m+1) = (m-2)^2 - 8,$$

设 $\Delta = a^2$ ，

$$\text{则 } (m-2+a)(m-2-a) = 8,$$

又 $m-2+a$ 与 $m-2-a$ 同奇偶，

$$\therefore \begin{cases} m-2+a=4 \\ m-2-a=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m-2+a=2 \\ m-2-a=4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m-2+a=-4 \\ m-2-a=-2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m-2+a=-2 \\ m-2-a=-4 \end{cases}$$

解得 $m = 5$ 或 -1 ，

$$\therefore \text{方程为: } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ 或 } x^2 + x = 0;$$

$$x^2 - (n+2)x + 2n = 0,$$

$$\therefore \Delta = (n-2)^2,$$

$$F(1, -n-2, 2n) = \frac{4 \times 1 \times 2n - (-n-2)^2}{4 \times 1} = -\frac{(n-2)^2}{4},$$

$$\text{当 } m=5 \text{ 时, } F(1, -5, 6) = \frac{4 \times 1 \times 6 - (-5)^2}{4 \times 1} = -\frac{1}{4}$$

$\therefore$ 两方程的“快乐数”互为“开心数”，

$$\therefore \left| -\frac{1}{4} \times 2n - 6 \times \left[-\frac{(n-2)^2}{4} \right] \right| = 0,$$

$$\text{解得: } n = 3 \text{ 或 } \frac{3}{4},$$

$$\text{当 } m=-1 \text{ 时, } F(1, 1, 0) = \frac{4 \times 1 \times 0 - 1^2}{4 \times 1} = -\frac{1}{4},$$

$\therefore$ 两方程的“快乐数”互为“开心数”，

$$\therefore \left| -\frac{1}{4} \times 2n - 0 \times \left[-\frac{(n-2)^2}{4} \right] \right| = 0,$$

$$\text{解得 } n = 0,$$

综上, n 的值为 0 或 3 或 $\frac{3}{2}$.