

2022 年第一学期八年级期中数学学习评估 (202210)

(完卷时间 90 分钟, 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 26 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列根式是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt{x^7}$ D. $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$

【答案】A

【解析】

【分析】直接根据最简二次根式的定义即可判断.

【详解】解: A. $\sqrt{6}$ 是最简二次根式, 故该选项符合题意;

B. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 不是最简二次根式, 该选项不符合题意;

C. $\sqrt{x^7} = x^3\sqrt{x}$, 故 $\sqrt{x^7}$ 不是最简二次根式, 该选项不符合题意;

D. $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$, 故 $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$ 不是最简二次根式, 该选项不符合题意;

故选: A.

【点睛】本题考查了最简二次根式, 最简二次根式必须满足: ①被开方数中不能含有开得尽方的因数或因式, ②被开方数的因数是整数, 因式是整式, 熟练掌握二次根式必须满足的条件是解题的关键.

2. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{8}$ 是同类二次根式的 ()

A. $\sqrt{0.2}$ B. $\sqrt{\frac{3}{4}}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{50}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据同类二次根式的定义进行解答即可.

【详解】解: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 被开方数是 2,

A. $\sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 的被开方数是 5，故与 $\sqrt{8}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

B. $\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的被开方数是 3，故与 $\sqrt{8}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

C. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 的被开方数是 3，故与 $\sqrt{8}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

D. $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ 的被开方数是 2，故与 $\sqrt{8}$ 是同类二次根式，故本选项符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查同类二次根式的定义，同类二次根式是化为最简二次根式后，被开方数相同的二次根式称为同类二次根式.

3. 下列方程是一元二次方程的是 ()

A. $x^2 = 2$

B. $\frac{1}{x^2} + x = 2$

C. $x^2 + 2y - 1 = 0$

D. $x^2 - 5 = x(x-1)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义（含有一个未知数，并且含有未知数的项的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程）进行判断即可.

【详解】解：A. $x^2 = 2$ 是一元二次方程，故此选项符合题意；

B. $\frac{1}{x^2} + x = 2$ 是分式方程，故此选项不符合题意；

C. $x^2 + 2y - 1 = 0$ 是二元二次方程，故此选项不符合题意；

D. $x^2 - 5 = x(x-1)$ 化简以后不含二次项，所以不是一元二次方程，故此选项不符合题意.

故选：A.

【点睛】本题考查一元二次方程的定义，解题时，要注意两个方面：(1) 一元二次方程包括三点：①是整式方程，②只含有一个未知数，③所含未知数的项的最高次数是 2；(2) 一元二次方程的一般形式是 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$. 掌握一元二次方程的定义是解题的关键.

4. 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 8x = -2$ 时，在方程两边应同时加上 ()

A. 4

B. 8

C. 16

D. 64

【答案】C

【解析】

【分析】根据配方法的步骤，利用完全平方公式 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a+b)^2$ 进行求解即可.

【详解】解： $x^2 - 8x = -2$ 进行配方，方程两边应同时加上一次项系数的一半的平方，

$$\text{即 } x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$\therefore x^2 - 8x + 16 = -2 + 16,$$

$\therefore$ 在方程两边应同时加上 16.

故选：C.

【点睛】本题考查配方法，用配方法解一元二次方程得一般步骤：（1）化二次项系数为1，当二次项系数不是1时，方程两边同时除以二次项系数；（2）加上一次项系数一半的平方，使其中的三项成为完全平方式，但又要使此方程的等式关系不变，故在右侧同时加上一次项系数一半的平方；（3）配方后将原方程化为 $a(x+m)^2 = n (a \neq 0)$ 的形式，再用直接开平方的方法解方程. 熟知配方法的步骤是解题的关键.

5. 下列 y 关于 x 的函数中，是正比例函数的为（ ）

A. $y = \frac{3}{x}$

B. $y = \frac{x}{3}$

C. $y = x^2$

D. $y = x + 3$

【答案】B

【解析】

【分析】正比例函数的定义：一般地，形如 $y = kx$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的函数叫做正比例函数，其中 k 叫做比例系数.

【详解】解：A. $y = \frac{3}{x}$ 的自变量 x 的次数是 -1，故此选项不符合题意；

B. $y = \frac{x}{3}$ 是正比例函数，故此选项不符合题意；

C. $y = x^2$ 的自变量 x 的次数是 2，故此选项不符合题意；

D. $y = x + 3$ 是一次函数，故此选项不符合题意.

故选：B.

【点睛】本题考查正比例函数的定义，掌握正比例函数的定义是解题的关键.

6. 下列问题中的两个变量是成反比例的是（ ）

A. 被除数（不为零）一定，除数与商

B. 货物的单价一定，货物的总价与货物的数量

C. 等腰三角形的周长一定，它的腰长与底边的长

D. 汽车所行的速度一定，它所行驶的路程与时间

【答案】A

【解析】

【分析】形如 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) (k 为常数, $k \neq 0$) 的函数称为反比例函数. 看两个变量是否具有反比例关系, 主要看它们的乘积是否为非零的常数. 依据判断方法逐项分析即可.

- 【详解】解: A. 被除数 (不为零) 一定, 除数与商是反比例函数的关系, 故此选项符合题意;
B. 货物的单价一定, 货物的总价与货物的数量是正比例函数的关系, 故此选项不符合题意;
C. 等腰三角形的周长一定, 它的腰长与底边的长是一次函数的关系, 故此选项不符合题意;
D. 汽车所行的速度一定, 它所行驶的路程与时间是正比例函数的关系, 故此选项不符合题意.

故选: A.

【点睛】本题考查反比例函数, 正确区分正比例函数与反比例函数是解题关键. 判断一个函数是否是反比例函数, 首先看看两个变量是否具有反比例关系.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 当 x _____ 时, 二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义.

【答案】 $x \geq 2$

【解析】

【分析】由二次根式有意义得: 被开方数为非负数列不等式可得答案.

【详解】解: 由题意得: $x-2 \geq 0$,

$\therefore x \geq 2$.

故答案为: $x \geq 2$.

【点睛】本题考查的是二次根式有意义的条件, 掌握二次根式的被开方数为非负数是解题的关键.

8. 写出二次根式 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是 _____.

【答案】 $\sqrt{x+y}$

【解析】

【分析】二次根式的有理化的目的就是去掉根号, 所以 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x+y}$.

【详解】解: $\sqrt{x+y} \times \sqrt{x+y} = (\sqrt{x+y})^2 = x+y$,

故 $\sqrt{x+y}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{x+y}$

故答案为: $\sqrt{x+y}$.

【点睛】本题考查了二次根式的有理化, 根据二次根式的乘除法法则进行二次根式有理化. 本题二次根式有理化主要利用平方公式.

9. 计算: $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=$ _____.

【答案】 $5-2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 根据完全平方公式展开, 然后利用根式的乘方和乘法法则运算即可.

【详解】 $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=5-2\sqrt{6}$

故答案为: $5-2\sqrt{6}$.

【点睛】 本题考查了完全平方公式与根式的混合运算, 解题的关键是熟练运用乘法公式.

10. 方程 $x^2=8x$ 的根是_____.

【答案】 $x_1=0, x_2=8$

【解析】

【分析】 移项后分解因式, 即可得出两个一元一次方程, 求出方程的解即可.

【详解】 解: $x^2=8x$,

$x^2-8x=0$,

$x(x-8)=0$,

$x=0, x-8=0$,

$x_1=0, x_2=8$,

故答案为 $x_1=0, x_2=8$.

【点睛】 考查了解一元二次方程, 能把一元二次方程转化成一元一次方程是解此题的关键.

11. 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x>-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质和分母不能等于0解答即可.

【详解】 解: 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ 的定义域是 $2x+1>0$,

解得: $x>-\frac{1}{2}$,

故答案为: $x>-\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查函数自变量的取值范围, 解题的关键是根据二次根式的性质和分母不能等于0解答.

12. 已知 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, 则 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 3

【解析】

【分析】 直接将 $x=2$ 代入 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 计算即可.

【详解】 解: $\because f(x) = \frac{x+1}{x-1}$,

$$\therefore f(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3.$$

故答案为: 3.

【点睛】 本题考查求函数值, 解题的关键就是将自变量所赋的值代入函数解析式中进行计算.

13. 不等式 $\sqrt{2}x - 3 > \sqrt{3}x$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x < -3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 利用不等式的基本性质, 将不等式未知项和常数项各移到一边, 解得 x 的解集.

【详解】 解: 由 $\sqrt{2}x - 3 > \sqrt{3}x$, 得

$$\sqrt{2}x - \sqrt{3}x > 3,$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})x > 3,$$

$$\therefore x < \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}, \text{ 即 } x < -3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}.$$

故答案是: $x < -3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的应用. 解题的关键是熟悉不等式的基本性质: 不等式的两边同时除以负数, 不等号的方向发生改变.

14. 在实数范围内分解因式: $x^2 - 6x - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x - 3 + \sqrt{10})(x - 3 - \sqrt{10})$

【解析】

【分析】 根据完全平方公式将原式变形为 $(x-3)^2 - 10$, 再利用平方差公式分解即可求得答案.

【详解】 解: $x^2 - 6x - 1$

$$= x^2 - 6x + 9 - 1 - 9$$

$$= (x-3)^2 - 10$$

$$= (x-3)^2 - (\sqrt{10})^2$$

$$= (x-3+\sqrt{10})(x-3-\sqrt{10}),$$

故答案为: $(x-3+\sqrt{10})(x-3-\sqrt{10})$.

【点睛】 本题考查实数范围内的因式分解, 运用了完全平方公式和平方差公式. 将原式变形为 $(x-3)^2 - 10$ 是解题的关键.

15. 直线 $y = -2x$ 经过第_____象限.

【答案】 二、四

【解析】

【分析】 根据正比例函数的图象即可解答.

【详解】 解: $\because y = -2x$ 的 $k = -2 < 0$,

$\therefore$ 直线 $y = -2x$ 经过第二、四象限,

故答案为: 二、四.

【点睛】 本题考查了正比例函数的图象, 当 $k > 0$ 时, 函数经过一、三象限, 当 $k < 0$ 时, 函数经过二、四象限.

16. 反比例函数 $y = \frac{1-m}{x}$ 图像经过 $A(1, y_1)$ 、 $B(2, y_2)$, 且 $y_1 > y_2$, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 1$

【解析】

【分析】 直接利用反比例函数的增减性得出 $1-m > 0$, 进而求出答案.

【详解】 解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{1-m}{x}$ 图像经过 $A(1, y_1)$ 、 $B(2, y_2)$, 且 $y_1 > y_2$,

$\therefore$ 每个象限内, y 随 x 的增大而减小,

$$\therefore 1-m > 0,$$

解得: $m < 1$,

$\therefore m$ 的取值范围是 $m < 1$.

故答案为: $m < 1$.

【点睛】 本题考查反比例函数的增减性. 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的增减性: 当 $k < 0$ 时, 函数的图像在第二、四象限, 在每一象限内 y 随 x 的增大而增大; 当 $k > 0$ 时, 函数的图像在第一、三象限, 在每一象限

内 y 随 x 的增大而减小. 正确得出关于 m 的不等式是解题关键.

17. 随着新冠病毒的疫情好转, 市场经济得到复苏, 某店铺连续两个月的销额从 2 万猛增到为 10 万, 且连续两个月销售额的增长率是相同的, 那么这个增长率是 x , 根据题意可列方程: ____.

【答案】 $2(1+x)^2 = 10$

【解析】

【分析】 设这个增长率是 x , 根据“某店铺连续两个月的销额从 2 万猛增到为 10 万, 且连续两个月销售额的增长率是相同的,” 列出一元二次方程即可得到答案.

【详解】 解: 设这个增长率是 x ,
根据题意得:

$$2(1+x)^2 = 10,$$

故答案为: $2(1+x)^2 = 10$.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的应用, 读懂题意, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

18. 已知 P 是反比例函数图象上的点, 若 $PA \perp x$ 轴, 且 $\triangle PAO$ 的面积是 3, 那么反比例函数的解析式是 ____.

【答案】 $y = \frac{6}{x}$ 或 $y = -\frac{6}{x}$

【解析】

【分析】 根据反比例函数系数 k 的几何意义可知, $\triangle PAO$ 的面积 $= \frac{1}{2}|k|$, 再根据图象所在象限 求出 k 的值既可.

【详解】 解: 依据比例系数 k 的几何意义可得, $\triangle PAO$ 的面积 $= \frac{1}{2}|k|$,
即 $\frac{1}{2}|k| = 3$,

解得, $k = \pm 6$,

函数解析式为 $y = \frac{6}{x}$ 或 $y = -\frac{6}{x}$

故答案为: $y = \frac{6}{x}$ 或 $y = -\frac{6}{x}$

【点睛】 考查反比例函数系数 k 的几何意义, 过双曲线上的任意一点分别向两条坐标轴作垂线, 与坐标轴围成的矩形面积就等于 $|k|$. 本知识点是中考的重要考点, 同学们应高度关注.

三、简答题 (本大题共 4 题, 每题 6 分, 共 24 分)

19. 计算: $\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{6}}$.

【答案】 $3\sqrt{3}-2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 先把各二次根式化为最简二次根式，然后合并同类二次根式即可.

【详解】 解： $\sqrt{12}-2\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{27}-6\sqrt{\frac{1}{6}}$

$$=2\sqrt{3}-2\times\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}-6\times\frac{\sqrt{6}}{6}$$
$$=2\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{6}$$
$$=3\sqrt{3}-2\sqrt{6}.$$

【点睛】 本题考查二次根式的加减运算，二次根式的性质. 掌握二次根式的性质和二次根加减运算法则是解题的关键.

20. 计算： $\sqrt{15m^3}\cdot\sqrt{\frac{2}{5m}}\div\sqrt{20m}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{30m}}{10}$

【解析】

【分析】 直接根据二次根式乘除混合运算的法则进行计算即可.

【详解】 解： $\sqrt{15m^3}\cdot\sqrt{\frac{2}{5m}}\div\sqrt{20m}=\sqrt{15m^3\cdot\frac{2}{5m}\div20m}=\frac{\sqrt{30m}}{10}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的乘除混合运算，熟练掌握二次根式乘除混合运算的法则是解题的关键.

21. 解方程： $\frac{1}{2}x^2-3x+4=0$

【答案】 $x_1=4$ ， $x_2=2$

【解析】

【分析】 根据因式分解法求解即可.

【详解】 解： $\frac{1}{2}x^2-3x+4=0$ ，

$$x^2-6x+8=0,$$

$$(x-4)(x-2)=0,$$

$$\therefore x-4=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

解得: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

【点睛】 本题考查解一元二次方程, 解一元二次方程方法有: 直接开平方法, 配方法, 公式法, 因式分解法. 灵活运用所学方法解方程是解题的关键.

22. 解方程: $(x-1)(x+2)=1$

【答案】 $x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$

【解析】

【分析】 先将原方程化为一般形式, 然后用公式法解方程即可.

【详解】 解: $(x-1)(x+2)=1$,

将原方程化为一般形式: $x^2 + x - 3 = 0$

$$\therefore \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 13 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2},$$

$$\text{即 } x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查了解一元二次方程, 解题的关键是熟练掌握一元二次方程的求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

四、解答题 (本大题共 4 题, 共 34 分)

23. 已知关于 x 的方程 $(k+1)x^2 - 2(k-1)x + k - 1 = 0$

(1) 当 k 取什么值时, 方程只有一个根?

(2) 若方程有两个不相等的实数根, 求 k 的取值范围.

【答案】 (1) $k = -1$

(2) $k < 1$ 且 $k \neq -1$

【解析】

【分析】 (1) 先根据方程只有一个根可知此方程是一元一次方程, 故可得出 k 的值;

(2) 根据方程有两个相等的实数根可知 $\begin{cases} k+1 \neq 0 \\ [-2(k-1)]^2 - 4(k+1)(k-1) > 0 \end{cases}$, 由此即可得出 k 的取值范围.

【小问 1 详解】

解：当 $k+1=0$ 时，得： $k=-1$ ，

此时 $-2(k-1) = -2 \times (-1-1) = 4 \neq 0$ ，

则方程 $4x-2=0$ 为一元一次方程，它的根是 $x=\frac{1}{2}$ ，此时方程只有一个根，

$\therefore$ 当 $k=-1$ 时，方程只有一个根；

【小问2详解】

$\therefore$ 关于 x 的方程 $(k+1)x^2 - 2(k-1)x + k-1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

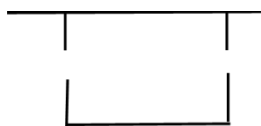
$$\therefore \begin{cases} k+1 \neq 0 \\ [-2(k-1)]^2 - 4(k+1)(k-1) > 0 \end{cases}$$

解得： $k < 1$ 且 $k \neq -1$ ，

$\therefore k$ 的取值范围是 $k < 1$ 且 $k \neq -1$ 。

【点睛】本题考查一元一次方程，一元二次方程的定义及根的判别式。一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的情况与判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的关系： $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根； $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根； $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根。掌握一元二次方程根的情况与根的判别式的关系是解题的关键。

24. 某小区居委会为了方便居民的电瓶车充电，准备利用一边靠墙（墙长15米）的空旷场地利用栅栏围城一个面积为80平方米的电瓶车充电区，如图，为了方便进出，在两边空出两个宽各为2.5米的出入口，一共用去栅栏21米，请问长方形的充电区的相邻两边长分别是多少米？



解：设这个长方形电瓶车充电区垂直于墙的一边是 x 米，平行于墙的一边为 $\underline{\hspace{1cm}}$ 米。

根据题意得：（完成填空后继续解题）

【答案】 $(26-2x)$ ；长方形的充电区的相邻两边长分别是8米和10米

【解析】

【分析】令这个长方形垂直于墙的一边为宽，平行于墙的一边为长；设这个长方形的宽为 x 米，则长为 $(21+2.5+2.5-2x)$ 米，根据工作人员围成的这个长方形等候区的面积为80平方米，可得出关于 x 的一元二次方程，解之即可得出 x 的值，再结合墙长15米，即可确定结论。

【详解】解：设这个长方形电瓶车充电区垂直于墙的一边是 x 米，平行于墙的一边为 $(26-2x)$ 米，
故答案为： $(26-2x)$ ；

根据题意得: $x(26-2x)=80$,

解得: $x_1=5$, $x_2=8$,

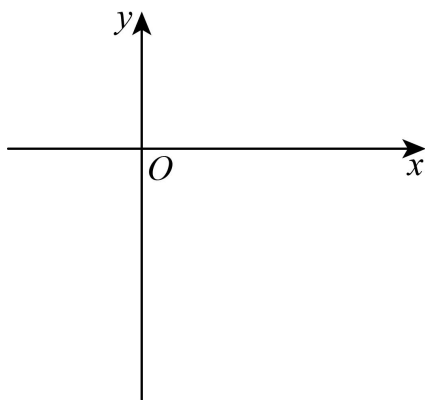
当 $x=5$ 时, $26-2x=16>15$ (不合题意, 舍去);

当 $x=8$ 时, $26-2x=10$.

答: 长方形的充电区的相邻两边长分别是8米和10米.

【点睛】 本题考查一元二次方程的应用, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

25. 已知正比例函数的图像经过点 $A(2, -4)$ 和点 $B(a, a-3)$.



(1) 求正比例函数的解析式和 a 的值.

(2) 点 C 在 x 轴上, $OC=4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(3) 如果一个正比例函数的比例系数与一个反比例函数的比例系数相同, 那么其中一个函数叫做另一个函数的伴随函数, 请写出这个正比例函数的伴随函数.

【答案】 (1) 正比例函数的解析式为 $y=-2x$, a 的值为1

(2) 4

(3) $y=-\frac{2}{x}$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法可确定正比例函数的解析式, 再根据点 $B(a, a-3)$ 在正比例函数图像上, 将点 B 的坐标代入正比例函数解析式即可得出 a 的值;

(2) 根据题意可得出点 C 的坐标为 $(4, 0)$ 或 $(-4, 0)$, 然后根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC}$, 分两种情况计算即可;

(3) 根据伴随函数定义即可得出这个正比例函数的伴随函数.

【小问1详解】

解：设正比例函数的解析式为 $y = kx (k \neq 0)$,

$\because$ 正比例函数的图像经过点 $A(2, -4)$,

$$\therefore -4 = 2k,$$

解得: $k = -2$,

$\therefore$ 正比例函数的解析式为 $y = -2x$,

$\because$ 正比例函数 $y = -2x$ 的图像经过点 $B(a, a-3)$,

$$\therefore a - 3 = -2a,$$

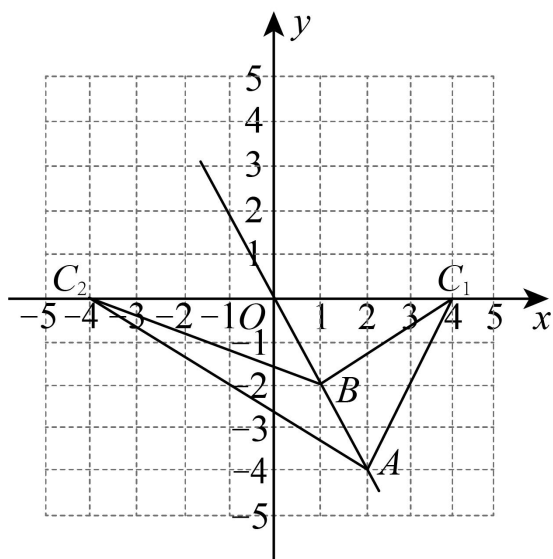
解得: $a = 1$,

$$\therefore B(1, -2),$$

$\therefore$ 正比例函数的解析式为 $y = -2x$, a 的值为 1;

【小问 2 详解】

如图,



$\because$ 点 C 在 x 轴上, $OC = 4$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(4, 0)$ 或 $(-4, 0)$,

$\therefore A(2, -4)$, $B(1, -2)$,

当点 C 在 x 轴正半轴时, 则 $C_1(4, 0)$,

$$\therefore S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle AOC_1} - S_{\triangle BOC_1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \\
&= 8 - 4 \\
&= 4,
\end{aligned}$$

当点 C 在 x 轴负半轴时, 则 $C_2(-4, 0)$,

$$\begin{aligned}
\therefore S_{\triangle ABC_2} &= S_{\triangle AOC_2} - S_{\triangle BOC_2} \\
&= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \\
&= 8 - 4 \\
&= 4,
\end{aligned}$$

综上所述, $\triangle ABC$ 的面积为 4;

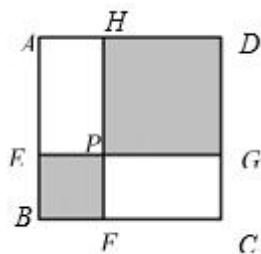
【小问 3 详解】

$\therefore$ 正比例函数 $y = -2x$ 的比例系数是 -2 ,

$\therefore$ 这个正比例函数的伴随函数为 $y = -\frac{2}{x}$.

【点睛】 本题考查用待定系数法确定正比例函数的解析式, 函数图像上点的坐标特征, 求三角形的面积, 运用了分类讨论的思想. 正确理解题意并利用数形结合的思想是解题的关键.

26. 如图, 正方形 $ABCD$ 分割成两个小正方形和两个长方形.



(1) 若正方形 $ABCD$ 边长为 10, 正方形 $BFPE$ 的面积是正方形 $PGDH$ 的一半, 求正方形 $BFPE$ 的边 BF 的长.

(2) 若正方形 $ABCD$ 面积为 10, 设 $BF = x$, 四边形 $APGD$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域.

(3) 四边形 $APGD$ 的面积是否能够等于正方形 $ABCD$ 面积的一半, 如果能, 请求出 BF 长, 如果不能请说明理由.

【答案】 (1) $10\sqrt{2} - 10$

$$(2) \quad y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{10}}{2}x + 10 \quad (0 < x < \sqrt{10})$$

$$(3) \text{ 能, } BF = \frac{3\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 设 $BF = a$ ，可得 $PG = FC = 10 - a$ ，根据：正方形 $BFPE$ 的面积是正方形 $PGDH$ 的一半，可列出关于 a 的一元二次方程，求解并根据题意可得答案；

(2) 设 $BF = x$ ，可得 $AD = BC = \sqrt{10}$ ， $PH = PG = FC = \sqrt{10} - x$ ，然后根据 $y = \frac{1}{2}(PG + AD)PH$ 代入化简即可；

(3) 根据题意可知 $y = 5$ ，得到方程 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{10}}{2}x + 10 = 5$ ，求解并根据题意可得答案.

【小问 1 详解】

解：设 $BF = a$ ，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 边长为 10，正方形 $ABCD$ 分割成两个小正方形 $PEBF$ 、 $PGDH$ 和两个长方形 $AEPH$ 、 $PFCG$ ，

$$\therefore PG = FC = 10 - a,$$

根据题意列方程得： $2a^2 = (10 - a)^2$ ，

解得： $a_1 = 10\sqrt{2} - 10$ ， $a_2 = -10\sqrt{2} - 10$ (不合题意，舍去)，

$\therefore BF$ 的长是 $10\sqrt{2} - 10$.

【小问 2 详解】

$\because$ 正方形 $ABCD$ 面积为 10，

$$\therefore AD = BC = \sqrt{10},$$

设 $BF = x$ ($0 < x < \sqrt{10}$)，则 $PH = PG = FC = \sqrt{10} - x$ ，

$$\therefore y = \frac{1}{2}(PG + AD)PH = \frac{1}{2}(\sqrt{10} - x + \sqrt{10})(\sqrt{10} - x),$$

整理得： $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{10}}{2}x + 10$ ($0 < x < \sqrt{10}$).

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{10}}{2}x + 10$ ($0 < x < \sqrt{10}$).

【小问 3 详解】

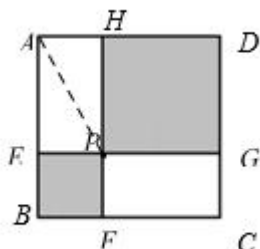
根据题意可知: $y = 5$,

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 - \frac{3\sqrt{10}}{2}x + 10 = 5,$$

整理得: $x^2 - 3\sqrt{10}x + 10 = 0$,

$$\text{解得: } x_1 = \frac{3\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{3\sqrt{10} + 5\sqrt{2}}{2} \quad (\text{不合题意, 舍去}),$$

$\therefore$ 当 BF 的长为 $\frac{3\sqrt{10} - 5\sqrt{2}}{2}$ 时, 四边形 $APGD$ 的面积能够等于正方形 $ABCD$ 面积的一半.



【点睛】 本题考查列一元二次方程解决简单的实际问题, 列函数的解析式

并根据函数解析式和实际意义求定义域. 根据题意列出一元二次方程和函数解析式是解题的关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能