

2023-2024 学年上海市长宁区延安中学八年级（上）期中

数学试卷

一、选择题（每题 2 分，共 12 分）

1. 下列根式中，与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{8a}$ B. $\sqrt{\frac{3}{a}}$ C. $\sqrt{a^2}$ D. $\sqrt{4a^3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查同类二次根式的概念，同类二次根式是化为最简二次根式后，被开方数相同的二次根式称为同类二次根式。根据定义解题即可。

【详解】解：A、 $\sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$ ，与 $\sqrt{a}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

B、 $\sqrt{\frac{3}{a}} = \frac{\sqrt{3a}}{a}$ ，与 $\sqrt{a}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

C、 $\sqrt{a^2} = |a|$ ，与 $\sqrt{a}$ 不是同类二次根式，故本选项不符合题意；

D、 $\sqrt{4a^3} = 2a\sqrt{a}$ ，与 $\sqrt{a}$ 是同类二次根式，故本选项符合题意。

故选：D。

2. 下列关于 x 的方程中，一定是一元二次方程的是（ ）

- A. $(x-3)(x+4) = x^2 - x$ B. $x^2 - \frac{1}{x} + 2 = 0$
C. $ax^2 - x + 2 = 0$ D. $|a|x^2 - bx + c = -x^2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的定义，掌握“只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 2 次的整式方程叫做一元二次方程”是解题的关键。

【详解】解：A、是一元一次方程，故此选项不符合题意；

B、不是整式方程，故此选项不符合题意；

C、当 $a=0$ 时，不是一元二次方程，故此选项不符合题意；

D、是一元二次方程，故此选项符合题意；

故选：D。

3. 下列函数, y 随 x 增大而增大的是 ()

A. $y = \frac{x}{2}$

B. $y = \frac{2}{x}$

C. $y = -2x$

D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查的是正比例函数、反比例函数的性质, 根据题意判断出各函数的增减性是解答此题的关键. 分别根据正比例函数、反比例函数的性质进行逐一判断即可.

【详解】 解: A. $\because$ 正比例函数 $y = \frac{x}{2}$ 中, $k = \frac{1}{2} > 0$, $\therefore y$ 随 x 的增大而增大, 故本选项正确;

B. $\because$ 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 中 $k = 2 > 0$, $\therefore$ 函数的图象在第一、三象限, 此时在每一象限内 y 随 x 的增大而减小, 故本选项错误;

C. $\because$ 一次函数 $y = -2x$ 中 $k = -2 < 0$, $\therefore y$ 随 x 的增大而减小, 故本选项错误;

D. $\because$ 反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 中 $k = -2 < 0$, 函数的图象在第二、四象限, 此时在每一象限内 y 随 x 的增大而增大, 故本选项错误;

故选: A

4. 下列关于 x 的一元二次方程, 一定有两个不相等的实数根的是 ()

A. $x^2 + kx - 1 = 0$

B. $x^2 + kx + 1 = 0$

C. $x^2 + x - k = 0$

D. $x^2 + x + k = 0$

【答案】 A

【解析】

【分析】 先求出 Δ 的值, 再比较出其与 0 的大小即可求解.

【详解】 解: A、 $\Delta = k^2 - 4 \times 1 \times (-1) = k^2 + 4 > 0$, 一定有两个不相等的实数根, 符合题意;

B、 $\Delta = k^2 - 4 \times 1 \times 1 = k^2 - 4$, 可能小于等于 0, 不一定有两个不相等的实数根, 不符合题意;

C、 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-k) = 1 + 4k$, 可能小于等于 0, 不一定有两个不相等的实数根, 不符合题意;

D、 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times k = 1 - 4k$, 可能小于等于 0, 不一定有两个不相等的实数根, 不符合题意.

故选: A.

【点睛】 本题考查的是根的判别式, 熟知一元二次方程的根与 Δ 的关系是解答此题的关键.

5. 下列从左到右的变形不一定正确的是 ()

A. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$

B. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

C. $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

D. $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{|a|}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查的是二次根式的化简，二次根式的乘法与除法运算，本题根据二次根式的乘法与除法运算，结合化为最简二次根式的知识逐一分析即可.

【详解】 解: $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$, 运算正确, 故 A 不符合题意;

当 $a < 0$, $b < 0$ 时, $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ 不成立, 故 B 符合题意,

$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, 运算正确, 故 C 不符合题意;

$\sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{|a|}$, 运算正确, 故 D 不符合题意;

故选 B

6. 平面直角坐标系内有两点 $A(-2,1)$ 、 $B(3,1)$, 如果正比例函数 $y = kx$ 的图象与线段 AB 有交点, 那么 k 的取值范围是()

A. $-2 \leq k \leq 3$

B. $k \leq -2$ 或 $k \geq 3$

C. $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{3}$

D. $k \leq -\frac{1}{2}$ 或 $k \geq \frac{1}{3}$

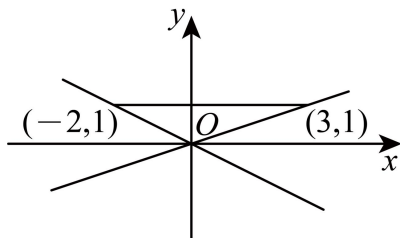
【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数的图象与性质. 数形结合是解题的关键.

如图, 由题意知, 根据 $A(-2,1)$ 、 $B(3,1)$, 确定此时的 k 值, 然后根据正比例函数 $y = kx$ 的图象越靠近 y 轴, $|k|$ 的值越大, 进行作答即可.

【详解】 解: 如图,



将 $A(-2,1)$ 、 $B(3,1)$ 分别代入 $y = kx$,

解得, $k = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{3}$,

由题意知, 正比例函数 $y = kx$ 的图象越靠近 y 轴, $|k|$ 的值越大,

∴ 正比例函数 $y = kx$ 的图象与线段 AB 有交点，则 $k \leq -\frac{1}{2}$ 或 $k \geq \frac{1}{3}$ ；

故选：D.

二、填空题（每题 3 分，共 36 分）

7. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ 的定义域是 ____.

【答案】 $x > 3$

【解析】

【分析】 本题考查了求函数自变量的取值范围，根据分式有意义的条件与二次根式有意义的条件得出不等式组，解不等式组即可求解，掌握分式有意义的条件与二次根式有意义的条件是解题的关键.

【详解】 解：由 $y = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ ，

∴ $x-3 > 0$ ，解得： $x > 3$ ，

故答案为： $x > 3$.

8. 写出 $\sqrt{a-2b}$ 的一个有理化因式_____

【答案】 $\sqrt{a-2b}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质 $(\sqrt{a})^2 = a$ 解答即可.

【详解】 解：∵ $\sqrt{a-2b} \times \sqrt{a-2b} = (\sqrt{a-2b})^2 = a-2b$ ，

∴ $\sqrt{a-2b}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{a-2b}$ ，

故答案为： $\sqrt{a-2b}$.

【点睛】 本题考查二次根式的性质，熟知 $(\sqrt{a})^2 = a$ 是解答的关键.

9. 已知反比例函数 $y = \frac{2k-3}{x}$ 的图像位于第二、四象限，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据反比例函数的性质得 $2k-3 < 0$ ，然后解不等式即可.

【详解】 根据题意得 $2k-3 < 0$ ，

解得 $k < \frac{3}{2}$.

故答案是: $k < \frac{3}{2}$.

【点睛】考查了反比例函数的性质，反比例函数的性质：反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象是双曲线；当 $k > 0$ ，双曲线的两支分别位于第一、第三象限，在每一象限内 y 随 x 的增大而减小；当 $k < 0$ ，双曲线的两支分别位于第二、第四象限，在每一象限内 y 随 x 的增大而增大.

10. 化简: $\sqrt{18a^5b} =$ _____.

【答案】 $3a^2\sqrt{2ab}$ ## $3a^2\sqrt{2ba}$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的性质，据此化简作答即可，会利用二次根式的性质正确化简是解答的关键.

【详解】 解：依题意， $\sqrt{18a^5b} = \sqrt{9 \times 2 \times a^4 \times ab} = 3a^2\sqrt{2ab}$,

故答案为: $3a^2\sqrt{2ab}$.

11. 方程 $\sqrt{5}x^2 = x$ 的根为 _____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法解一元二次方程. 熟练掌握因式分解法解一元二次方程是解题的关键. 利用因式分解法解一元二次方程即可.

【详解】 解: $\sqrt{5}x^2 = x$,

$$\sqrt{5}x^2 - x = 0,$$

$$x(\sqrt{5}x - 1) = 0,$$

$$\therefore x = 0, \sqrt{5}x - 1 = 0,$$

$$\text{解得, } x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{故答案为: } x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

12. 已知点 $A(2, -3)$ 与点 $B(t-1, t-2)$ 在同一条经过原点的直线上, 那么 t 的值为 _____.

【答案】 $\frac{7}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式以及一次函数图象上点的坐标特征，根据点 A ，原点 O 的坐标，利用待定系数法求一次函数解析式 AB ，再代入 $B(t-1, t-2)$ ，即可作答.

【详解】 解：设直线 AB 的函数解析式为 $y=kx+b(k \neq 0)$ ，

因为点 $A(2, -3)$ 与点 $B(t-1, t-2)$ 在同一条经过原点的直线上，

将 $A(2, -3)$ ， $O(0, 0)$ 代入 $y=kx+b(k \neq 0)$ ，

$$\text{得} \begin{cases} -3 = 2k + b \\ 0 = k \times 0 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = -\frac{3}{2}, \\ b = 0 \end{cases}$$

所以直线 AB 的函数解析式为 $y = -\frac{3}{2}x$ ，

把 $B(t-1, t-2)$ 代入 $y = -\frac{3}{2}x$ 中，

$$\text{得 } t-2 = -\frac{3}{2}(t-1),$$

解得 $t = \frac{7}{5}$ ，

故答案为： $\frac{7}{5}$.

13. 在实数范围内因式分解： $a^2 - 3ab - b^2 =$ _____.

【答案】 $(a - \frac{3-\sqrt{13}}{2}b)(a - \frac{3+\sqrt{13}}{2}b)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了实数内的因式分解、综合运用平方差公式和完全平方公式等知识，熟练掌握相关运算公式是解题关键. 利用配方法将原式整理为 $(a - \frac{3}{2}b)^2 - \frac{13}{4}b^2$ ，然后利用平方差公式进行因式分解即可.

【详解】 解： $a^2 - 3ab - b^2$

$$= a^2 - 3ab + (\frac{3}{2}b)^2 - (\frac{3}{2}b)^2 - b^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(a - \frac{3}{2}b\right)^2 - \frac{13}{4}b^2 \\
&= \left(a - \frac{3}{2}b + \frac{\sqrt{13}}{2}b\right)\left(a - \frac{3}{2}b - \frac{\sqrt{13}}{2}b\right) \\
&= \left(a - \frac{3 - \sqrt{13}}{2}b\right)\left(a - \frac{3 + \sqrt{13}}{2}b\right).
\end{aligned}$$

故答案为: $\left(a - \frac{3 - \sqrt{13}}{2}b\right)\left(a - \frac{3 + \sqrt{13}}{2}b\right)$.

14. 比较大小: $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ _____ $\sqrt{13} - \sqrt{11}$. (填“<”、“>”或“=”)

【答案】>

【解析】

【分析】本题主要考查了分母有理化，二次根式的大小比较. 分别求出 $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$, 即可求解.

【详解】解: $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{13} + \sqrt{11}}{(\sqrt{13} - \sqrt{11})(\sqrt{13} + \sqrt{11})} = \sqrt{13} + \sqrt{11},$$

$$\therefore \sqrt{5} + \sqrt{3} < \sqrt{13} + \sqrt{11},$$

$$\therefore \sqrt{5} - \sqrt{3} > \sqrt{13} - \sqrt{11}.$$

故答案为: >

15. 已知关于 x 的方程 $(x - 3m)(x + m + 3) = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值为 _____.

【答案】 $-\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】本题考查了解一元二次方程. 掌握因式分解法解一元二次方程是解题的关键. 先利用因式分解法解方程, 然后根据原方程有两个相等的实数根得出关于 m 的方程, 然后求解即可.

【详解】解: $(x - 3m)(x + m + 3) = 0$,

$$\therefore x - 3m = 0 \text{ 或 } x + m + 3 = 0,$$

$$\therefore x = 3m \text{ 或 } x = -m - 3,$$

$$\therefore \text{方程 } (x - 3m)(x + m + 3) = 0 \text{ 有两个相等的实数根,}$$

$$\therefore 3m = -m - 3,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{3}{4}.$$

16. 某型号的手机原来每台售价 800 元, 经过两次降价, 且每次降价的百分率相同, 现在每台售价为 578 元, 则每次降价的百分率是_____.

【答案】 15%

【解析】

【分析】 设每次降价百分率为 x , 根据原来每台售价 800 元, 经过两次降价, 且每次降价的百分率相同, 现在每台售价为 578 元, 列方程即可.

【详解】 解: 设每次降价百分率为 x ,

$$\text{由题意得: } 800(1-x)^2 = 578,$$

$$\text{解得: } x_1 = 0.15 = 15\%, x_2 = 1.85 \text{ (舍)},$$

$\therefore$ 每次降价的百分率是 15%,

故答案为: 15%.

【点睛】 本题考查理一元二次方程的应用, 是个增长率问题, 根据两次降价前的结果, 和现在的价格, 列出方程是关键.

17. 定义: 如果两个一元二次方程分别有两个实数根, 且至少有一个公共根, 那么称这两个方程互为“联根方程”. 已知关于 x 的两个一元二次方程 $x^2 - (2+a)x + 2a = 0$ 和 $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 0$ 互为联根方程, 那么 a 的值为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的解的意义: 能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解. 也考查了利用因式分解法解方程, 先利用因式分解法解方程 $x^2 - (2+a)x + 2a = 0$, 得到 $x = 2$ 或 $x = a$. 再分别将 $x = 2$, $x = a$ 代入 $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 0$, 求出 a 的值即可. 求出方程 $x^2 - (2+a)x + 2a = 0$ 的两个解是解题的关键.

$$\text{【详解】 解: } x^2 - (2+a)x + 2a = 0,$$

$$\text{分解因式为 } (x-2)(x-a) = 0,$$

解得 $x=2$ 或 $x=a$

①当 $x=2$ 时, $(a-1)x^2 - a^2x - a + 2 = 4(a-1) - 2a^2 - a + 2 = 0$,

整理得 $2a^2 - 3a + 2 = 0$,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0$, $\therefore$ 方程无解;

②当 $x=a$ 时, $(a-1)a^2 - a^3 - a + 2 = -a^2 - a + 2 = 0$

$(a+2)(a-1) = 0$,

$\therefore a = -2$ 或 $a = 1$ (舍去)

故答案为: -2 .

18. 点 A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图象上一点, 连接 OA , 并将线段 OA 绕点 A 旋转 90° , 此时点 O 的对应点 B 恰也落在这个反比例函数图象上, 已知点 A 的横坐标为 4 , 那么 k 的值为 _____.

【答案】 $-8 + 8\sqrt{5}$ 或 $8\sqrt{5} - 8$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的图象和性质, 旋转的性质, 全等三角形的判定和性质, 解一元二次方程,

过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D , 过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E , 得出 $A\left(4, \frac{k}{4}\right)$, 则 $OD = 4, AD = \frac{k}{4}$, 通过证明

$\triangle OAD \cong \triangle ABE$, 得出 $B\left(4 - \frac{k}{4}, 4 + \frac{k}{4}\right)$, 把 $B\left(4 - \frac{k}{4}, 4 + \frac{k}{4}\right)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 得 $\left(4 - \frac{k}{4}\right)\left(4 + \frac{k}{4}\right) = k$,

求解即可.

【详解】 解: 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D , 过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ,

$\therefore$ 点 A 横坐标为 4 , 且点 A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图象上一点,

$\therefore A\left(4, \frac{k}{4}\right)$,

$\therefore OD = 4, AD = \frac{k}{4}$,

$\therefore$ 将线段 OA 绕点 A 旋转 90° , 此时点 O 的对应点 B 恰也落在这个反比例函数图象上,

$\therefore \angle OAB = 90^\circ, OA = AB$,

$\therefore \angle OAD + \angle BAE = 90^\circ$,

$\therefore AD \perp x$ 轴,

$\therefore \angle OAD + \angle AOD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AOD = \angle BAE,$$

$$\because \angle AOD = \angle BAE, \quad OA = AB, \quad \angle AEB = \angle ODA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OAD \cong \triangle ABE,$$

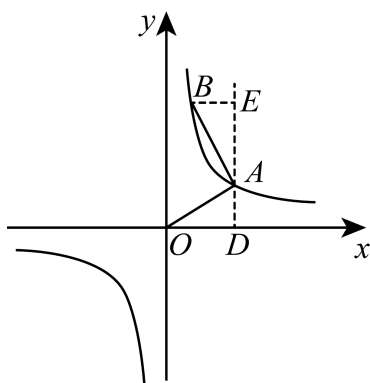
$$\therefore BE = AD = \frac{k}{4}, AE = OD = 4,$$

$$\therefore B\left(4 - \frac{k}{4}, 4 + \frac{k}{4}\right),$$

$$\text{把 } B\left(4 - \frac{k}{4}, 4 + \frac{k}{4}\right) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} (k > 0) \text{ 得: } \left(4 - \frac{k}{4}\right)\left(4 + \frac{k}{4}\right) = k,$$

$$\text{整理得: } x_1 = -8 + 8\sqrt{5}, x_2 = -8 - 8\sqrt{5} \quad (\text{舍去}),$$

$$\text{故答案为: } -8 + 8\sqrt{5}.$$



三、解答题 (6+12+6+6+6+8+8 分 = 52 分)

$$19. \text{ 计算: } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\frac{7}{2}} \div \sqrt{1\frac{5}{9}} - \sqrt{18}.$$

【答案】 $\frac{7}{2} - 4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算、分母有理化，熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

先化简，将分母有理化，然后合并同类二次根式得到答案.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\frac{7}{2}} \div \sqrt{1\frac{5}{9}} - \sqrt{18} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{14}}{2} \div \frac{\sqrt{14}}{3} - 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + \frac{\sqrt{14}}{2} \times \frac{3}{\sqrt{14}} - 3\sqrt{2} \\
&= 2 - \sqrt{2} + \frac{3}{2} - 3\sqrt{2} \\
&= \frac{7}{2} - 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

20. (1) 解方程: $(x-1)^2 = 9(2x+5)^2$;

(2) 用配方法解方程: $3x^2 - 6x + 1 = 0$.

【答案】 (1) $x_1 = -\frac{16}{5}$, $x_2 = -2$; (2) $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了直接开平方、配方法解一元二次方程. 熟练掌握直接开平方、配方法是解题的关键.

(1) 直接开平方解一元二次方程即可;

(2) 配方法解一元二次方程即可.

【详解】 (1) 解: $(x-1)^2 = 9(2x+5)^2$,

$$x-1 = 3(2x+5) \text{ 或 } x-1 = -3(2x+5),$$

解得, $x_1 = -\frac{16}{5}$, $x_2 = -2$;

(2) 解: $3x^2 - 6x + 1 = 0$,

$$x^2 - 2x = -\frac{1}{3},$$

$$x^2 - 2x + 1 = -\frac{1}{3} + 1,$$

$$(x-1)^2 = \frac{2}{3},$$

$$\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3},$$

解得, $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$.

21. 当 $a = \frac{2}{3}$, 化简代数式 $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{a^2+1}{a}} - 2$, 并求值.

【答案】 $\frac{1}{a}\sqrt{a} + 1$, $\frac{\sqrt{6}}{2} + 1$

【解析】

【分析】 本题考查二次根式的化简求值，首先判断出 $a-1 < 0$ ，然后对二次根式进行化简，代入数值计算是解题的关键.

【详解】 解： $\because a = \frac{2}{3}$,

$$\therefore 0 < a < 1,$$

$$\therefore a-1 < 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{a^2+1}{a}} - 2 \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1} + \sqrt{\frac{(a-1)^2}{a}} \\ &= \sqrt{a}+1 + \frac{1-a}{a}\sqrt{a} \\ &= \sqrt{a}+1 + \frac{1-a}{a}\sqrt{a} \\ &= \frac{1}{a}\sqrt{a}+1, \end{aligned}$$

$$\text{当 } a = \frac{2}{3} \text{ 时, 原式} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}+1 = \frac{\sqrt{6}}{2}+1.$$

22. 已知关于 x 的一元二次方程 $(k+1)x^2 - \sqrt{2k-1}x + 3-k = 0$ 的根的判别式为 27, 求 k 的值和方程的根.

【答案】 k 的值为 4, 方程的根为 $x_1 = \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{10}$, $x_2 = \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{10}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的判别式，二次根式有意义的条件，公式法解一元二次方程. 熟练掌握一元二次方程的判别式，公式法解一元二次方程是解题的关键. 由题意知， $k+1 \neq 0$ ， $2k-1 \geq 0$ ，解得， $k \geq \frac{1}{2}$ ， $\Delta = (-\sqrt{2k-1})^2 - 4(k+1)(3-k) = 27$ ，计算求出满足要求的解即可；一元二次方程为 $5x^2 - \sqrt{7}x - 1 = 0$ ，公式法求解即可.

【详解】 解：由题意知， $k+1 \neq 0$ ， $2k-1 \geq 0$ ，

解得， $k \geq \frac{1}{2}$ ，

$$\Delta = (-\sqrt{2k-1})^2 - 4(k+1)(3-k) = 27,$$

整理得， $2k^2 - 3k - 20 = 0$ ，

$$(k-4)(2k+5)=0,$$

$$\therefore k-4=0 \text{ 或 } 2k+5=0,$$

$$\text{解得, } k=4 \text{ 或 } k=-\frac{5}{2} \text{ (舍去),}$$

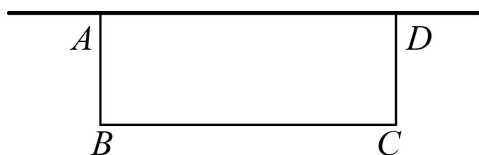
$$\therefore 5x^2 - \sqrt{7}x - 1 = 0,$$

$$\therefore x_{1,2} = \frac{-(-\sqrt{7}) \pm \sqrt{27}}{2 \times 5} = \frac{\sqrt{7} \pm 3\sqrt{3}}{10},$$

$$\text{解得, } x_1 = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{10}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{10},$$

$$\therefore k \text{ 的值为 } 4, \text{ 方程的根为 } x_1 = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{10}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{10}.$$

23. 如图, 学校准备用 40 米长的铁栅栏, 靠一面 26 米长的墙围一个占地面为长方形的生态实验园, 铁栅栏围三边, 如果生态实验园的占地面积为 150 平方米, 那么长方形相邻两边的长分别是多少米?



【答案】10 米、15 米

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的应用. 正确表示长方形的边长是解题的关键.

设平行于墙的一边长为 x 米, 则垂直于墙的一边长为 $\frac{40-x}{2}$ 米, $x \leq 26$, 依题意得, $\frac{40-x}{2} \cdot x = 150$, 计算出满足要求的解, 然后作答即可.

【详解】解: 设平行于墙的一边长为 x 米, 则垂直于墙的一边长为 $\frac{40-x}{2}$ 米, $0 < x \leq 26$,

依题意得, $\frac{40-x}{2} \cdot x = 150$, 整理得, $x^2 - 40x + 300 = 0$,

$$(x-10)(x-30)=0,$$

解得, $x=10$ 或 $x=30$ (舍去),

$$\therefore \frac{40-x}{2} = \frac{40-10}{2} = 15,$$

$\therefore$ 长方形相邻两边的长分别为 10 米、15 米.

24. 小李在一网上购物平台购物, 恰逢周年庆, 平台推出优惠活动, 如图广告所示:

三重惊喜!!!

◇免运费!

◇全部商品七折

◇购物金额 (折后) 满 56 元减 10 元

(1) 请写出小李的实付金额 y (元) 关于购物的商品总价 x (元) 的函数解析式及其定义域;

(2) 小李和好朋友小于拼单购物, 小李和小于所购商品的总价分别为 60 元和 40 元, 那么小李和小于应如何分配实付金额? 请写出你的理由.

【答案】(1) $y = \begin{cases} 0.7x, & (0 < x < 80) \\ 0.7x - 10, & (x \geq 80) \end{cases}$

(2) 小李和小于分别应实付金额 36 元和 24 元.

【解析】

【分析】 本题主要考查一元一次方程的实际应用,

(1) 分情况: 当商品总价折后小于 56 元时可以求得实付金额; 当商品总价折后大于等于 56 元时可以求得实付金额;

(2) 判断小李和小于拼单购物商品总价, 根据第一问的函数解析式算的拼单后实付金额, 再按比例求得每人所付实际金额;

【小问 1 详解】

解: 根据题意得: 商品总价 x 打折之后为 $0.7x$, 且满 56 减 10, 根据情况分类得:

当 $0.7x < 56$, 得 $0 < x < 80$, 实付金额 $y = 0.7x$;

当 $0.7x \geq 56$, 得 $x \geq 80$, 实付金额 $y = 0.7x - 10$;

$$\text{则 } y = \begin{cases} 0.7x, & (0 < x < 80) \\ 0.7x - 10, & (x \geq 80) \end{cases}.$$

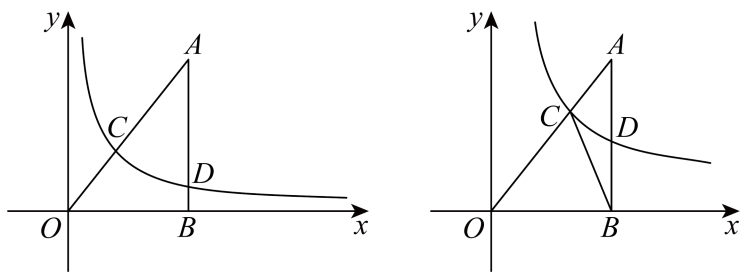
【小问 2 详解】

小李和小于所购商品的总价分别为 60 元和 40 元, 商品总价为 100 元.

因为商品总价大于 80, 代入: $y = 0.7x - 10$, 则 $y = 0.7 \times 100 - 10 = 60$,

则小李应实付 $\frac{60}{100} \times 60 = 36$ (元), 小于应实付 $\frac{60}{100} \times 40 = 24$ (元).

25. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中, 直角顶点 B 在 x 轴正半轴上, 反比例函数 $y = \frac{n}{x}$ ($n > 0$) 的图象分别与边 AO 、边 AB 交于点 C 、 D .



(1) 如果点 C 的坐标为 $(2,3)$ ，且 $AD=8$ ，求 n 的值及点 B 的坐标；

(2) 连结 CB ，如果 $AD=DB$ ，求 $S_{\triangle OAB} : S_{\triangle OCB}$ 的值.

【答案】 (1) $n=6$, $B(6,0)$

(2) $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 (1) 将 $(2,3)$ 代入 $y = \frac{n}{x}$ 得，解得 $n=6$ ；待定系数法求直线 OA 的解析式为 $y = \frac{3}{2}x$ ，设 $B(m,0)$ ，则 $A\left(m, \frac{3}{2}m\right)$ ， $D\left(m, \frac{6}{m}\right)$ ，由 $AD = \frac{3}{2}m - \frac{6}{m} = 8$ ，计算求出满足要求的解，然后作答即可；

(2) 设 $C\left(a, \frac{n}{a}\right)$ ，同理 (1) 可得直线 OA 的解析式 $y = \frac{n}{a^2}x$ ，设 $B(m,0)$ ，则 $A\left(m, \frac{n}{a^2}m\right)$ ， $D\left(m, \frac{n}{m}\right)$ ，由 $AD = \frac{n}{a^2}m - \frac{n}{m}$ ， $BD = \frac{n}{m}$ ，可得 $\frac{n}{a^2}m - \frac{n}{m} = \frac{n}{m}$ ，计算求出 m ，然后根据 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OB \cdot AB$ ， $S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2}OB \cdot \frac{n}{a}$ ，计算求解即可.

【小问 1 详解】

解：将 $(2,3)$ 代入 $y = \frac{n}{x}$ 得， $3 = \frac{n}{2}$ ，解得 $n=6$ ；

设直线 OA 的解析式为 $y = kx$ ，

将 $(2,3)$ 代入得， $3 = 2k$ ，解得 $k = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore y = \frac{3}{2}x$ ，

设 $B(m,0)$ ，则 $A\left(m, \frac{3}{2}m\right)$ ， $D\left(m, \frac{6}{m}\right)$ ，

$\therefore AD = \frac{3}{2}m - \frac{6}{m} = 8$ ，整理得， $3m^2 - 16m - 12 = 0$ ，

$\therefore (m-6)(3m+2) = 0$ ，

解得, $m=6$ 或 $m=-\frac{2}{3}$ (舍去),

经检验, $m=6$ 是分式方程的解,

$$\therefore B(6, 0),$$

$$\therefore n=6, B(6,0);$$

【小问2 详解】

$$\text{解: 设 } C\left(a, \frac{n}{a}\right),$$

同理 (1) 可得直线 OA 的解析式 $y=\frac{n}{a^2}x$,

$$\text{设 } B(m,0), \text{ 则 } A\left(m, \frac{n}{a^2}m\right), D\left(m, \frac{n}{m}\right),$$

$$\therefore AD=\frac{n}{a^2}m-\frac{n}{m}, BD=\frac{n}{m},$$

$$\because AD=DB,$$

$$\therefore \frac{n}{a^2}m-\frac{n}{m}=\frac{n}{m}, \text{ 整理得, } 2a^2=m^2,$$

解得, $m=\sqrt{2}a$ 或 $m=-\sqrt{2}a$ (舍去),

$$\therefore AB=\frac{n}{a^2}m=\frac{\sqrt{2}n}{a},$$

$$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OB \cdot AB, S_{\triangle OCB}=\frac{1}{2}OB \cdot \frac{n}{a},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCB}}=\frac{\frac{1}{2}OB \cdot \frac{\sqrt{2}n}{a}}{\frac{1}{2}OB \cdot \frac{n}{a}}=\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle OAB}: S_{\triangle OCB} \text{ 的值为 } \sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查了反比例函数与一次函数综合, 反比例函数与几何综合, 一次函数解析式, 反比例函数解析式, 分式方程的应用. 熟练掌握反比例函数与几何综合是解题的关键.