

2022 学年第一学期八年级数学适应性练习

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{9}$

C. $\sqrt{12}$

D. $\sqrt{18}$

【答案】C

【解析】

【分析】先把每个二次根式进行化简, 化成最简二次根式, 后比较被开方数即可.

【详解】A. $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3}$ 的被开方数不相同, 故不是同类二次根式;

B. $\sqrt{9} = 3$, 与 $\sqrt{3}$ 不是同类二次根式;

C. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 与 $\sqrt{3}$ 被开方数相同, 故是同类二次根式;

D. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, 与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同, 故不是同类二次根式.

故选: C.

【点睛】本题考查了二次根式的化简, 同类二次根式, 熟练掌握根式化简的基本方法, 灵活运用同类二次根式的定义判断解题是求解的关键.

2. $\sqrt{x-y}$ 的有理化因式是 ()

A. $\sqrt{x-y}$

B. $\sqrt{x+y}$

C. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

D. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据有理化因式定义: 如果两个含有二次根式的非零代数式相乘, 它们的积不含有二次根式, 就说这两个非零代数式互为有理化因式, 结合代数式特征作出判断即可.

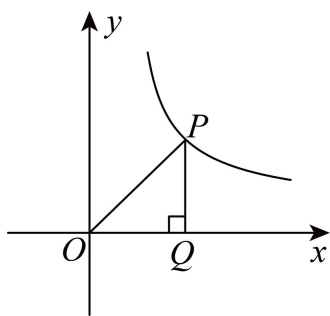
【详解】解: $\sqrt{x-y}$ 的有理化因式是 $\sqrt{x-y}$,

故选: A.

【点睛】本题考查分母有理化, 正确判断有理化因式是正确解答的前提.

3. 如图, 点 P 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 第一象限的图像上, PQ 垂直 x 轴, 垂足为 Q , 设 $\triangle POQ$ 和

面积是 s , 那么 s 与 k 之间的数量关系是 ()



A. $s = \frac{k}{4}$

B. $s = \frac{k}{2}$

C. $s = k$

D. 不能确定

【答案】 B

【解析】

【分析】根据点 P 在反比例函数图象上结合反比例函数系数 k 的几何意义就可以求出 s 与 k 之间的数量关系.

【详解】解: $\because$ 点 P 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上一点, 且 $PQ \perp x$ 轴于点 Q ,

$$\therefore S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2} |k| = s,$$

$$\text{解得: } |k| = 2s,$$

$\because$ 反比例函数在第一象限有图象,

$$\therefore k = 2s, \text{ 即 } s = \frac{k}{2},$$

故选: B.

【点睛】 本题考查了反比例函数的性质以及反比例函数系数 k 的几何意义, 解题的关键是根据反比例函数系数 k 的几何意义找出 $\triangle POQ$ 面积 s 与 k 的关系.

4. 如果 y 关于 x 的函数 $y = (k^2 + 1)x$ 是正比例函数, 那么 k 的取值范围是 ()

A. $k \neq 0$

B. $k \neq \pm 1$

C. 不能确定

D. 一切实数

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据正比例函数的定义, 列出方程求解即可.

【详解】解: $\because$ 函数 $y = (k^2 + 1)x$ 是正比例函数,

$$\therefore k^2 + 1 \neq 0,$$

$$\therefore k \text{ 取一切实数},$$

故选: D.

【点睛】 本题考查了正比例函数的定义, 掌握正比例函数的定义: 形如 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的形式, 叫正比例函数.

5. 关于 x 的方程 $kx^2 + 4x - 2 = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是 ()

A. $k \leq -2$

B. $k \geq -2$ 且 $k \neq 0$

C. $k \geq -2$

D. $k > -2$ 且 $k \neq 0$

【答案】C

【解析】

【分析】分两种情况: ① $k = 0$ 和 ② $k \neq 0$, 分别根据一元一次方程、一元二次方程根的判别式求解即可得.

【详解】解: ①当 $k = 0$ 时, 关于 x 的方程为 $4x - 2 = 0$, 有实数根, 符合题意;

②当 $k \neq 0$ 时,

$\therefore$ 关于 x 的方程为 $kx^2 + 4x - 2 = 0$ 有实数根,

$\therefore$ 这个方程的根的判别式 $\Delta = 4^2 - 4 \times (-2)k \geq 0$,

解得 $k \geq -2$;

综上, k 的取值范围是 $k \geq -2$,

故选: C.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 正确分两种情况讨论是解题关键.

6. 容器内盛满 60 升纯酒精, 倒出一部分后用水加满, 第二次倒出比第一次多 14 升的溶液, 再用水加满. 这时容器内纯酒精和水正好各占一半, 则第一次倒出了多少升酒精 ()

A. 10 或 96

B. 10

C. 96

D. 26

【答案】B

【解析】

【分析】设第一次倒出了酒精 x 升, 则第二次倒出溶液 $(x+14)$ 升, 根据倒出两次后容器内纯酒精还剩下 $60 \times \frac{1}{2}$ 升, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 解之取其符合题意的值, 即可得出结论.

【详解】解: 设第一次倒出了酒精 x 升, 则第二次倒出溶液 $(x+14)$ 升,

根据题意得: $\frac{60-x}{60} \cdot [60 - (x+14)] = 60 \times \frac{1}{2}$,

整理得: $x^2 - 106x + 960 = 0$,

解得: $x_1 = 10$, $x_2 = 96$ (不符合题意, 舍去),

$\therefore$ 第一次倒出了酒精 10 升.

故选: B

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 计算: $\sqrt{8a} \div \sqrt{2a} =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 先化为最简二次根式, 再进行二次根式除法计算即可.

【详解】 解: $\sqrt{8a} \div \sqrt{2a}$

$$= 2\sqrt{2a} \div \sqrt{2a}$$

$$= 2,$$

故答案为: 2.

【点睛】 本题考查二次根式的运算, 解题的关键是掌握二次根式相关运算的法则.

8. 函数 $y = \sqrt{2x-6}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq 3$

【解析】

【分析】 根据二次根式 $\sqrt{a} (a \geq 0)$, 可得 $2x-6 \geq 0$ 然后进行计算即可解答.

【详解】 解: 由题意得: $2x-6 \geq 0$,

解得: $x \geq 3$,

故答案为: $x \geq 3$.

【点睛】 本题考查了函数自变量的取值范围, 熟练掌握二次根式 $\sqrt{a} (a \geq 0)$ 是解题的关键.

9. 在实数范围内分解因式: $x^2 - 3x + 1 =$ _____.

【答案】 $\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 先解方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 然后把已知的多项式写成 $a(x-x_1)(x-x_2)$ 的形式即可.

【详解】 解: 解方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$, 得 $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$,

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

故答案为: $\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

【点睛】 本题考查了利用解一元二次方程分解因式，掌握解答的方法是解题的关键.

10. 如果 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$ ，那么 $f(4) =$ _____.

【答案】 $-\sqrt{3}-2$

【解析】

【分析】 将 $x=4$ 代入 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$ 计算即可得.

【详解】 解： $\because f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$ ，

$$\therefore f(4) = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = -\sqrt{3}-2,$$

故答案为： $-\sqrt{3}-2$.

【点睛】 本题考查了求函数的值、二次根式的分母有理化，熟练掌握求函数值的方法是解题关键.

11. 当 $2 < a < 3$ 化简： $\sqrt{(2-a)^2} - \sqrt{(a-3)^2} =$ _____.

【答案】 $2a-5$

【解析】

【分析】 利用二次根式的性质化简求值即可.

【详解】 解： $\because 2 < a < 3$ ，

$$\therefore 2-a < 0, \quad a-3 < 0,$$

$$\therefore \sqrt{(2-a)^2} - \sqrt{(a-3)^2} = |2-a| - |a-3| = (a-2) - (3-a) = 2a-5.$$

故答案为： $2a-5$.

【点睛】 本题考查了二次根式化简求值，解题关键是掌握二次根式的性质、二次根式的化简计算.

12. 若最简二次根式 $\sqrt{x+3}$ 与 $\sqrt[3]{3x-5}$ 是同类二次根式，则 $x+y =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 根据同类二次根式的定义（把几个二次根式化为最简二次根式以后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式叫做同类二次根式）即可得.

【详解】 解： $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{x+3}$ 与 $\sqrt[3]{3x-5}$ 是同类二次根式，

$$\therefore x+3=3x-5, \quad y+1=2,$$

$$\text{解得 } x=4, \quad y=1,$$

$$\therefore x+y=4+1=5,$$

故答案为: 5.

【点睛】 本题主要考查了同类二次根式, 熟练掌握同类二次根式的定义是解题关键.

13. 已知关于 x 的方程 $x^2 + mx - 6 = 0$ 的一个根为 2, 则这个方程的另一个根是__.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 设方程的另一根为 a , 由一个根为 2, 利用根与系数的关系求出两根之积, 列出关于 a 的方程, 求出方程的解得到 a 的值, 即为方程的另一根.

【详解】 $\because$ 方程 $x^2 + mx - 6 = 0$ 的一个根为 2,

设另一个根为 a ,

$$\therefore 2a = -6,$$

解得: $a = -3$.

故答案为: -3

【点睛】 此题考查了一元二次方程根与系数的关系, 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$), 当 $b^2-4ac \geq 0$ 时方程有解, 此时设方程的解为 x_1, x_2 , 则有 $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

14. 方程 $x(x-1) = 2(x-1)$ 的根为_____.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 2$

【解析】

【分析】 利用因式分解法解一元二次方程即可得.

【详解】 $x(x-1) = 2(x-1)$,

$$x(x-1) - 2(x-1) = 0,$$

$$(x-1)(x-2) = 0,$$

$$x-1=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$x=1 \text{ 或 } x=2,$$

$$\text{即 } x_1 = 1, x_2 = 2,$$

故答案为: $x_1 = 1, x_2 = 2$.

【点睛】 本题考查了解一元二次方程, 主要解法包括: 直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法、换元法等, 熟练掌握各解法是解题关键.

15. 已知 $6 - \sqrt{6}$ 的整数部分是 x , 小数部分是 y , 则 $(x+y)(x-y)$ 的值是_____.

【答案】 $6\sqrt{6} - 6$

【解析】

【分析】 先估算出 $\sqrt{6}$ 的值的范围, 从而可得 $6 - \sqrt{6}$ 的值范围, 进而求出 x, y 的值, 然后代入式子中, 进行计算即可解答.

【详解】 解: $\because 4 < 6 < 9$,

$$\therefore 2 < \sqrt{6} < 3,$$

$$\therefore -3 < -\sqrt{6} < -2,$$

$$\therefore 3 < 6 - \sqrt{6} < 4,$$

$$\therefore 6 - \sqrt{6} \text{ 的整数部分} = 3, \text{ 小数部分} = 6 - \sqrt{6} - 3 = 3 - \sqrt{6},$$

$$\therefore x = 3, y = 3 - \sqrt{6},$$

$$\therefore (x+y)(x-y) = (3+3-\sqrt{6})[3-(3-\sqrt{6})]$$

$$= (6-\sqrt{6})(3-3+\sqrt{6})$$

$$= (6-\sqrt{6}) \times \sqrt{6}$$

$$= 6\sqrt{6} - 6,$$

故答案为: $6\sqrt{6} - 6$.

【点睛】 本题考查了估算无理数的大小, 熟练掌握估算无理数的大小是解题的关键.

16. 已知 $y = y_1 + y_2$, 其中 y_1 与 x 成反比例, 且比例系数为 k_1 , y_2 与 x^2 成正比例, 且比例系数为 k_2 , 当 $x = -1$ 时, $y = 0$, 那么 k_1 与 k_2 之间的数量关系是_____.

【答案】 $k_1 = k_2$

【解析】

【分析】 根据题意表示出 y_1 与 y_2 , 进而表示出 y 与 x 的函数解析式, 把 $x = -1, y = 0$ 代入即可确定出 k_1 与

k_2 的关系.

【详解】解：根据题意得： $y_1 = \frac{k_1}{x}$, $y_2 = k_2 x^2$,

$$\therefore y = y_1 + y_2 = \frac{k_1}{x} + k_2 x^2,$$

把 $x = -1$, $y = 0$ 代入得:

$$-k_1 + k_2 = 0, \text{ 即 } k_1 = k_2,$$

故答案为: $k_1 = k_2$.

【点睛】此题考查了待定系数法求二次函数解析式, 以及待定系数法求反比例函数解析式, 熟练掌握待定系数法是解本题的关键.

17. 如果 $y = (a^2 - 1)x^{a^2 - a - 1}$ 是正比例函数, 那么 a 的值是_____.

【答案】2

【解析】

【分析】根据正比例函数的定义可得 $a^2 - a - 1 = 1$ 且 $a^2 - 1 \neq 0$, 然后进行计算即可解答.

【详解】解: 由题意得:

$$a^2 - a - 1 = 1 \text{ 且 } a^2 - 1 \neq 0,$$

$$\therefore a = 2 \text{ 或 } a = -1 \text{ 且 } a \neq \pm 1,$$

$$\therefore a = 2,$$

故答案为: 2.

【点睛】本题考查了正比例函数的定义, 熟练掌握正比例函数的定义是解题的关键.

18. 在函数 $y = \frac{|k|+1}{x}$ 的图像上有三点 $A_1(x_1, y_1)$ 、 $A_2(x_2, y_2)$ 、 $A_3(x_3, y_3)$, 且 $x_1 < x_2 < 0 < x_3$. 用 “<”

连接 y_1 、 y_2 、 y_3 为_____.

【答案】 $y_2 < y_1 < y_3$

【解析】

【分析】先根据反比例函数的系数 $|k|+1 > 0$ 判断出函数图象在一、三象限, 在每个象限内, y 随 x 的增大而减小, 再根据 $x_1 < x_2 < 0 < x_3$, 判断出 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小.

【详解】解: $\because |k|+1 > 0$, 函数图象在一三象限,

$\therefore$ 图象在第一、三象限，在每个象限内， y 随 x 的增大而减小， $\therefore x_1 < x_2 < 0 < x_3$ ，

$\therefore y_2 < y_1 < y_3$ ．

故答案为： $y_2 < y_1 < y_3$ ．

【点睛】 本题考查了由反比例函数的图象和性质确定 y_2 ， y_1 ， y_3 的关系，注意是在每个象限内， y 随 x 的增大而减小，不能直接根据 x 的大小关系确定．

三、简答题（本大题共 5 题，每题 6 分，满分 30 分）

19. 计算： $\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{0.5}$

【答案】 $\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 先化简各个二次根式，再合并同类二次根式即可．

【详解】 解： $\sqrt{12} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + 4\sqrt{0.5}$

$$= 2\sqrt{3} - \sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2}$$

【点睛】 此题考查了二次根式的加减法，熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键．

20. 化简： $ab\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} (a > 0)$

【答案】 $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质进行化简即可求解．

【详解】 解： $ab\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} (a > 0)$

$$= \pm\sqrt{a^2b^2 \cdot \frac{1}{a^2} + a^2b^2 \cdot \frac{1}{b^2}}$$
$$= \pm\sqrt{a^2 + b^2} ,$$

故答案为： $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$ ．

【点睛】 本题考查了二次根式的化简，熟练掌握二次根式的化简方法，注意 a 、 b 取值范围是解题关键.

21. 解不等式: $\sqrt{3}x + 2 < 2x - \sqrt{3}$.

【答案】 $x > 7 + 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据一元一次不等式的解法、二次根式分母有理化的方法即可得.

【详解】 解: $\sqrt{3}x + 2 < 2x - \sqrt{3}$,

$$\sqrt{3}x - 2x < -2 - \sqrt{3},$$

$$(\sqrt{3} - 2)x < -2 - \sqrt{3},$$

$$(2 - \sqrt{3})x > 2 + \sqrt{3},$$

$$x > \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}},$$

$$x > 7 + 4\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式和二次根式的分母有理化，熟练掌握一元一次不等式的解法是解题关键.

22. 用配方法解方程: $3x^2 - 8x + 3 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$.

【解析】

【分析】 利用完全平方公式进行配方，解一元二次方程即可得.

【详解】 解: $3x^2 - 8x + 3 = 0$,

$$3(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}) - \frac{16}{3} + 3 = 0,$$

$$3(x - \frac{4}{3})^2 - \frac{7}{3} = 0, \text{ 即 } 3(x - \frac{4}{3})^2 = \frac{7}{3},$$

$$(x - \frac{4}{3})^2 = \frac{7}{9},$$

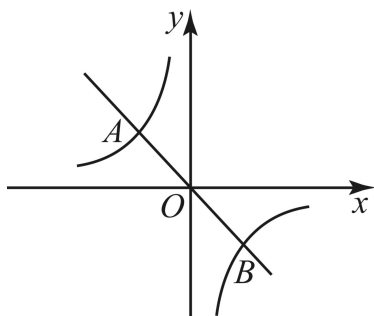
$$x - \frac{4}{3} = \pm \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$x = \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$\text{即 } x_1 = \frac{4+\sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{4-\sqrt{7}}{3}.$$

【点睛】 本题考查了利用配方法解一元二次方程，熟练掌握配方法是解题关键.

23. 如图，正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 与反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图像交于点 $A(-1, m)$ 和点 B . 求 k 的值和点 B 的坐标.



【答案】 $k=-2$, $B(1, -2)$

【解析】

【分析】 将点 $A(-1, m)$ 代入反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 可得 m 的值，再将点 A 的坐标代入正比例函数的解析式即可得 k 的值，然后根据反比例函数与正比例函数的性质即可得点 B 的坐标.

【详解】 解：将点 $A(-1, m)$ 代入反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 得： $m=-\frac{2}{-1}=2$,

$\therefore A(-1, 2)$,

将点 $A(-1, 2)$ 代入正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 得： $-k=2$ ，即 $k=-2$ ，

$\therefore$ 正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 与反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图像交于点 $A(-1, 2)$ 和点 B ，

$\therefore$ 点 A 与点 B 关于原点对称，

$\therefore B(1, -2)$.

【点睛】 本题考查了反比例函数与正比例函数的综合，熟练掌握反比例函数与正比例函数的图像与性质是解题关键.

四、解答题 (本大题共 2 题，每题 7 分，满分 14 分)

24. 已知： $x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, 求 $x^2 + xy + y^2$ 的平方根.

【答案】 $\pm 3\sqrt{11}$

【解析】

【分析】先将 x 、 y 化简，然后即可得到 $x+y$ 、 xy 的值，从而可以求得所求式子的值.

$$\text{【详解】解：} \because x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = 5 + 2\sqrt{6},$$

$$y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = 5 - 2\sqrt{6},$$

$$\therefore x + y = 5 + 2\sqrt{6} + 5 - 2\sqrt{6} = 10, \quad xy = (5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 25 - 24 = 1,$$

$$\therefore x^2 + xy + y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2 - xy$$

$$= (x + y)^2 - xy$$

$$= 10^2 - 1$$

$$= 100 - 1$$

$$= 99.$$

$$\therefore 99 \text{ 的平方根为 } \pm\sqrt{99} = \pm 3\sqrt{11}$$

$$\therefore x^2 + xy + y^2 \text{ 的平方根为 } \pm 3\sqrt{11}.$$

【点睛】本题考查二次根式的化简求值，求一个数的平方根，解答本题的关键是明确二次根式化简求值的方法.

25. 已知关于 x 的方程 $x^2 + 2x - a + 1 = 0$ 没有实数根，试判断关于 y 的方程 $y^2 + ay + a = 1$ 实数根的情况，并说明理由.

【答案】一定有两个不相等的实数根. 理由见解析.

【解析】

【分析】根据关于 x 的方程 $x^2 + 2x - a + 1 = 0$ 没有实数根，求出 a 的求值范围；再表示关于 y 的方程 $y^2 + ay + a = 1$ ， $\Delta_2 = a^2 - 4(a - 1) = (a - 2)^2$ ，即可判断该方程根的情况.

【详解】解： $\because$ 方程 $x^2 + 2x - a + 1 = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta_1 = 4 - 4(-a + 1) = 4a < 0,$$

$$\therefore a < 0, \text{ 对于关于 } y \text{ 的方程 } y^2 + ay + a = 1,$$

$$\Delta_2 = a^2 - 4(a-1) = (a-2)^2,$$

$$\because a < 0,$$

$$\therefore (a-2)^2 > 0, \text{ 即 } \Delta_2 > 0,$$

$\therefore$ 方程 $y^2 + ay + a = 1$ 一定有两个不相等的实数根.

【点睛】 本题考查一元二次方程根的判别式，熟练掌握一元二次方程根的判别式与根的情况之间的关系是解题关键.

五、解答题（本大题共 2 题，第 26 题 8 分，第 27 题 12 分，满分 20 分）

26. 某商店从厂家以每件 21 元的价格购进一批商品，该店可以自行定价，若每件商品售价为 a 元，则可以卖出 $(350 - 10a)$ 件；但物价局限定每件商品加价不能超过进价的 20%，如果商店计划要赚 400 元，那么每件商品售价是多少元？

【答案】 25 元

【解析】

【分析】 本题的等量关系是商品的单件利润 = 售价 - 进价. 然后根据商品的单价利润 $\times$ 销售的件数 = 总利润，设商品的售价为 a ，列出方程求出未知数的值后，根据“物价局限定每件商品加价不能超过进价的 20%”将不合题意的舍去，进而求出卖的商品的件数.

【详解】 解：设每件商品售价是 x 元，

由题意，得 $(x - 21)(350 - 10x) = 400$;

化简，得 $x^2 - 56x + 775 = 0$;

解得 $x_1 = 25$, $x_2 = 31$;

又 $21 \times (1 + 0.2) = 25.2$,

$\therefore x = 31$ 不合题意，舍去.

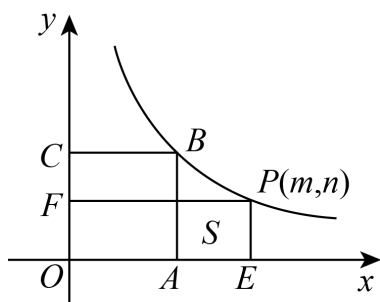
答：每件商品售价是 25 元.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用. 可根据题意列出方程，判断所求的解是否符合题意，舍去不合题意的解. 找到关键描述语，找到等量关系准确地列出方程是解决问题的关键.

27. 如图，已知正方形 $OABC$ 的面积为 9，点 O 为坐标原点，点 A 在 x 轴上，点 C 在 y 轴上，点 B 在函数 $y = \frac{k}{x}$

($k > 0$, $x > 0$) 图象上，点 P 是函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$, $x > 0$) 图象上异于点 B 的任意一点，过点 P 分别

作 x 轴、 y 轴的垂线，垂足分别为点 E 、 F . 设矩形 $OFPE$ 和正方形 $OABC$ 不重合部分的面积为 S .



(1) 点 B 的坐标是_____, k =_____;

(2) 当 $S = \frac{9}{2}$, 求点 P 的坐标;

(3) 求出 S 关于 m 的函数关系式.

【答案】 (1) $(3, 3)$, 9

(2) 点 P 的坐标 $(\frac{3}{2}, 6)$ 或 $(6, \frac{3}{2})$

(3) $S = \begin{cases} 9 - 3m & (0 < m < 3) \\ 9 - \frac{27}{m} & (m \geq 3) \end{cases}$

【解析】

【分析】 (1) 由正方形的面积公式求出正方形的边长, 确定出 OA 及 OC 的长, 得到点 B 的坐标, 将 B 的坐标代入反比例函数解析式中即可求出 k 值;

(2) 分两种情况考虑: ①当点 P 在点 B 的左边时, 不重合部分为矩形 $PMCF$, 将 P 的坐标代入第一问确定出的反比例函数解析式中, 得到 mn 的值, 根据 P 及 B 的坐标, 表示出 PM 与 CM , 利用矩形的面积公式表示出矩形 $PMCF$ 的面积, 将 mn 的值及已知的面积代入, 即可求出 m 的值, 进而得到 n 的值, 确定出此时 P 的坐标; ②当点 P 在点 B 的右边时, 不重合部分为矩形 $ANPE$, 由 P 及 B 的坐标表示出 AE 及 PE , 利用矩形的面积公式表示出矩形 $ANPE$ 的面积, 将 mn 的值及已知的面积代入求出 n 的值, 进而求出 m 的值, 确定出此时 P 的坐标, 综上, 得到所有满足题意的 P 的坐标.

(3) 分两种情况考虑: ①当点 P 在点 B 的左边时, 不重合部分为矩形 $PMCF$, 将 P 的坐标代入第一问确定出的反比例函数解析式中, 得到 mn 的值, 根据 P 及 B 的坐标, 表示出 PM 与 CM , 利用矩形的面积公式表示出矩形 $PMCF$ 的面积, 化简即可得到 S 关于 m 的函数关系式; ②当点 P 在点 B 的右边时, 不重合部分为矩形 $ANPE$, 由 P 及 B 的坐标表示出 AE 及 PE , 利用矩形的面积公式表示出矩形 $ANPE$ 的面积, 化简即可得到 S 关于 m 的函数关系式, 综上, 可得到 S 关于 m 的函数关系式.

【小问 1 详解】

$\because$ 正方形 $OABC$ 的面积为 9,

$\therefore OA = OC = 3$,

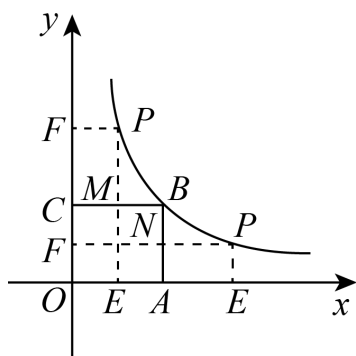
$$\therefore B(3,3).$$

又 $\because$ 点 $B(3,3)$ 在函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 的图象上,

$$\therefore k = 9.$$

故答案为: $(3,3), 9$.

【小问 2 详解】



分两种情况:

①当点 P 在点 B 的左侧时, 矩形 $OEPM$ 和正方形 $OABC$ 不重合部分为矩形 $PFCM$.

$\because P(m,n)$ 在函数 $y = \frac{9}{x}$ 上,

$$\therefore mn = 9.$$

$$\because PE = n, ME = BA = 3,$$

$$\therefore PM = PE - ME = n - 3,$$

$$\text{又 } CM = OE = m,$$

$$\therefore S = CM \cdot PM = m(n - 3) = mn - 3m = 9 - 3m = \frac{9}{2},$$

解得: $m = \frac{3}{2}$, 可得 $n = 6$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1.5, 6)$;

②当点 P 在点 B 的右侧时, 矩形 $OEPM$ 和正方形 $OABC$ 不重合部分为矩形 $ANPE$.

$\because P(m,n)$ 在函数 $y = \frac{9}{x}$ 上,

$$\therefore mn = 9.$$

$$\because OE = PF = m, NF = AO = 3,$$

$$\therefore AE = OE - OA = m - 3,$$

$$\text{又 } PE = n,$$

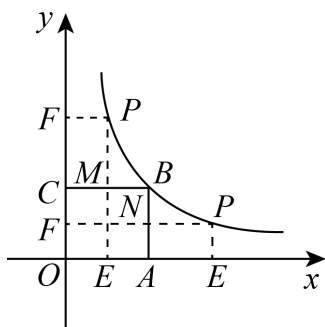
$$\therefore S = AE \cdot PE = n(m-3) = mn - 3n = 9 - 3n = \frac{9}{2},$$

解得 $n = \frac{3}{2}$, 可得 $m = 6$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(6, \frac{3}{2}\right)$.

综上所述: P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, 6\right)$ 或 $\left(6, \frac{3}{2}\right)$.

【小问 3 详解】



分两种情况:

①当点 P 在点 B 的左侧时, 即 $0 < m < 3$ 时, 矩形 $OEPM$ 和正方形 $OABC$ 不重合部分为矩形 $PFCM$.

$\because P(m, n)$ 在函数 $y = \frac{9}{x}$ 上,

$$\therefore mn = 9.$$

$$\because PE = n, ME = BA = 3,$$

$$\therefore PM = PE - ME = n - 3,$$

$$\text{又 } CM = OE = m,$$

$$\therefore S = CM \cdot PM = m(n - 3) = mn - 3m = 9 - 3m,$$

即 S 关于 m 的函数关系式为 $S = 9 - 3m$ ($0 < m < 3$)

②当点 P 在点 B 及点 B 的右侧, 即 $m \geq 3$ 时, 矩形 $OEPM$ 和正方形 $OABC$ 不重合部分为矩形 $ANPE$.

$\because P(m, n)$ 在函数 $y = \frac{9}{x}$ 上,

$$\therefore mn = 9, \text{ 即 } n = \frac{9}{m}.$$

$$\because OE = PF = m, NF = AO = 3,$$

$$\therefore AE = OE - OA = m - 3,$$

$$\text{又 } PE = n,$$

$$\therefore S = AE \cdot PE = n(m - 3) = mn - 3n = 9 - 3n = 9 - 3 \cdot \frac{9}{m} = 9 - \frac{27}{m},$$

即 S 关于 m 的函数关系式为 $S = 9 - \frac{27}{m}$ ($m \geq 3$)

综上所述: S 关于 m 的函数关系式为 $S = \begin{cases} 9 - 3m & (0 < m < 3) \\ 9 - \frac{27}{m} & (m \geq 3) \end{cases}$.

【点睛】 本题主要考查了反比例函数的系数与矩形的面积的关系, 把线段的长的问题转化为点的坐标问题是解决本题的关键, 需要注意分点 P 在点 B 的左边与右边两种情况进行讨论求解, 避免漏解而导致出错.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>) 致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群出品的《老师请开讲》私享直播课等增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>) 是学科网旗下智能题库，拥有小初高全学科超千万精品试题，提供智能组卷、拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能