

2022-2023 学年上海市静安区市西中学八年级 (上)

期中数学试卷

第 I 卷 (选择题)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 共 18.0 分. 在每小题列出的选项中, 选出符合题目的一项)

1. 下列二次根式中, 最简二次根式是 ()

- A. $\sqrt{3a^3}$ B. $\sqrt{15a}$ C. $\sqrt{\frac{a}{3}}$ D. $\sqrt{a^2 + a^3}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据最简二次根式的概念判断即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{3a^3} = |a|\sqrt{3a}$, 不是最简二次根式;

B、 $\sqrt{15a}$, 是最简二次根式;

C、 $\sqrt{\frac{a}{3}} = \frac{\sqrt{3a}}{3}$, 不是最简二次根式;

D、 $\sqrt{a^2 + a^3} = |a|\sqrt{1+a}$, 不是最简二次根式;

故选: B.

【点睛】 本题考查的是最简二次根式的概念, 被开方数不含分母, 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式的二次根式, 叫做最简二次根式.

2. 下列二次根式中, 不能与 $\sqrt{2}$ 合并的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ B. $\sqrt{2a^2} (a \neq 0)$ C. $\sqrt{18}$ D. $\sqrt{0.2}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 先把二次根式依次化简, 根据同类二次根式的定义作判断.

【详解】 $\because \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}|a|, \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$

$\therefore \sqrt{0.2}$ 不能与 $\sqrt{2}$ 合并.

故选 D.

【点睛】 本题考查了同类二次根式, 熟练掌握同类二次根式定义是解答本题的关键. 一般地,

把几个二次根式化为最简二次根式后，如果它们的被开方数相同，就把这几个二次根式叫做同类二次根式。

3. 下列方程是关于 x 的一元二次方程的是 ()。

A. $x^2 + \frac{b}{x} + c = 0$

B. $x^2 + \frac{x}{\pi} = 0$

C. $x^2 + 3x - 1 = (x + 1)^2$

D. $ax^2 + bx + c = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义，逐项判断即可求解。

【详解】解：A、不是整式方程，所以不是关于 x 的一元二次方程，故本选项不符合题意；

B、是关于 x 的一元二次方程，故本选项符合题意；

C、整理得 $x - 2 = 0$ 是一元一次方程，故本选项不符合题意；

D、当 $a \neq 0$ 时， $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元二次方程，故本选项不符合题意；

故选：B

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的定义，熟练掌握含有一个未知数，且未知数的最高次数为 2 的整式方程是一元二次方程是解题的关键。

4. 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，满足 $a - b + c = 0$ ，则方程必有一根为 ()

A. 0

B. 1

C. -1

D. ± 1

【答案】C

【解析】

【分析】由 $ax^2 + bx + c = 0$ ，可得：当 $x = 1$ 时，有 $a + b + c = 0$ ；当 $x = -1$ 时，有 $a - b + c = 0$ ，故问题可求。

【详解】解：由题意，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，满足 $a - b + c = 0$ ，

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 即为： $a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = 0$ ；

$\therefore a - b + c = 0$ ，

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时，代入方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，有 $a + b + c = 0$ ；

综上所述，方程必有一根为 -1。

故选 C。

【点睛】此类题目的解法是常常将 1 或 -1 或 0 代入方程，来推理判断方程系数的关系。

5. 下列命题中，假命题是 ()

A. 假命题的逆命题不一定是假命题

B. 所有定理都有逆命题

C. 对顶角相等的逆命题是真命题

D. 两条平行线被第三条直线所截，内错角的平分线互相平行

【答案】C

【解析】

【分析】根据命题，定理的定义，逆命题的定义一一判断即可.

【详解】解：A、假命题的逆命题不一定是假命题. 正确，是真命题，本选项不符合题意；

B、所有定理都有逆命题，正确，是真命题，本选项不符合题意；

C、对顶角相等的逆命题是真命题. 错误，是假命题，本选项符合题意；

D、两条平行线被第三条直线所截，内错角的平分线互相平行，正确，是真命题，本选项不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查命题与定理，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

6. 已知 $xy < 0$ ，化简二次根式 $\frac{\sqrt{-xy^2}}{y}$ 的值是 ().

A. $\sqrt{x}$

B. $-\sqrt{x}$

C. $\sqrt{-x}$

D. $-\sqrt{-x}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件求出 $-xy^2 \geq 0$ ，求出 x 、 y 的范围，再根据二次根式的性质进行化简即可.

【详解】解：由二次根式有意义的条件求出 $-xy^2 \geq 0$ ，

$\because xy < 0$ ，

$\therefore x < 0$ ， $y > 0$ ，

$\therefore \frac{\sqrt{-xy^2}}{y} = \frac{\sqrt{-x} \cdot y}{y} = \sqrt{-x}$.

故选：C.

【点睛】本题考查了二次根式的性质与化简和二次根式有意义的条件，能熟记二次根式的性质是解此题的关键.

第 II 卷 (非选择题)

二、填空题 (本大题共 12 小题，共 36.0 分)

7. 使 $\sqrt{2-3x}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据被开方数大于等于 0 列式计算即可得解.

【详解】解：要使二次根式 $\sqrt{2-3x}$ 有意义，需要 $2-3x \geq 0$,

解得： $x \leq \frac{2}{3}$.

故答案是： $x \leq \frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义.

8. 写出 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 的一个有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

【解析】

【分析】充分利用平方差公式，得出有理化因子即可.

【详解】解： $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

故答案为： $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

【点睛】本题考查了分子有理化，解题的关键是熟练掌握平方差公式进行求解.

9. 不等式 $(2-\sqrt{5})x \leq 1$ 的解集是_____.

【答案】 $x \geq -2-\sqrt{5}$

【解析】

【分析】先判断 $2-\sqrt{5}$ 与 0 的大小的关系，然后根据不等式的性质即可求出 x 的解集

【详解】解： $\because 2-\sqrt{5} < 0$,

$$\therefore x \geq \frac{1}{2-\sqrt{5}}$$

$$\therefore x \geq -2-\sqrt{5}$$

故答案为： $x \geq -2-\sqrt{5}$

【点睛】本题考查二次根式的运算法则以及不等式的基本性质，解题的关键是判断 $2-\sqrt{5}$ 与 0 的大小关系，本题属于基础题型.

10. 比较大小： $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ _____ $\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

【答案】 $>$

【解析】

【分析】先求出 $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ 的倒数，然后进行大小比较.

【详解】 $\because \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$$

而 $\sqrt{7}+\sqrt{5} > \sqrt{5}+\sqrt{3}$,

$\therefore \sqrt{5}-\sqrt{3} > \sqrt{7}-\sqrt{5}$.

故答案为: $>$.

【点睛】本题考查了实数大小比较: 利用平方法或倒数法进行比较大小.

11. 在实数范围内分解因式 $4x^2 - 2x - 1 =$ _____.

【答案】 $4(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4})(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4})$

【解析】

【分析】先提公因式, 再配方, 最后根据平方差公式分解因式即可.

【详解】解: 原式 $= 4(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4})$

$$= 4(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{5}{16})$$

$$= 4[(x - \frac{1}{4})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{4})^2].$$

$$= 4(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4})(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4})$$

故答案为: $4(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4})(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4})$.

【点睛】本题考查了实数范围内分解因式, 掌握 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 是解题的关键.

12. 某工程队承包了一项污水处理工程, 原计划每天铺设污水管道 1250 米, 因准备工作不充分, 第一天铺设了原计划的 80%, 从第二天开始, 该工程队加快了铺设速度, 第三天铺设了 1440 米. 若该工程队第二天、第三天每天的铺设长度比前一天增长的百分数相同, 设这个百分数为 x , 列出方程_____.

【答案】 $1250 \times 80\% \times (1+x)^2 = 1440$

【解析】

【分析】先设该工程队第二天、第三天每天的拆迁面积比前一天增长的百分数是 x , 根据增长后的量 = 增长前的量 $\times$ (1+增长率), 列出方程即可.

【详解】解: 设该工程队第二天、第三天每天的拆迁面积比前一天增长的百分数是 x , 根据

题意得:

$$1250 \times 80\% \times (1+x)^2 = 1440,$$

故答案为: $1250 \times 80\% \times (1+x)^2 = 1440$

【点睛】此题考查了一元二次方程的应用, 关键是读懂题意, 找出关键描述语, 列出方程.

13. 命题“等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是_____.

【答案】有两个角相等的三角形是等腰三角形;

【解析】

【分析】先找到原命题的题设和结论, 在将题设和结论互换, 即可得到答案.

【详解】解: 原命题的题设是: “一个三角形是等腰三角形”, 结论是: “这个三角形两底角相等”,

所以命题“等腰三角形的两个底角相等”的逆命题是“有两个角相等的三角形是等腰三角形”.

【点睛】本题考查命题的转化, 准确找到命题的题设和结论进行转化是解题的关键.

14. 等腰三角形一腰上的高与另一边的夹角为 80° , 则顶角的度数为_____.

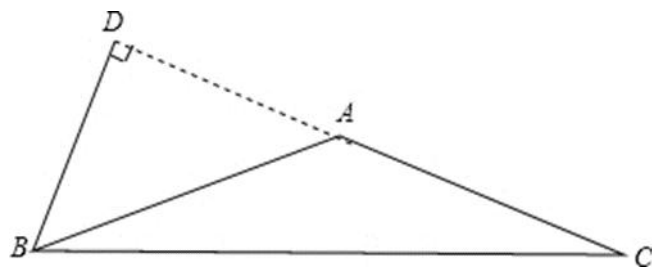
【答案】 160° 或 10° 或 170°

【解析】

【分析】等腰三角形一腰上的高与底边的夹角为 80° , 根据直角三角形两锐角互余求出底角的度数, 再根据等腰三角形两底角相等列式进行计算即可得解;

等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 80° , 首先根据题意画出图形, 一种情况等腰三角形为锐角三角形, 即可推出顶角的度数为 10° ; 另一种情况等腰三角形为钝角三角形, 由题意, 即可推出顶角的度数为 170° .

【详解】解: 如图, $AB=AC$,



$\therefore$ 一腰上的高与底边的夹角为 $\angle DBC=80^\circ$,

$\therefore$ 底角 $\angle C=90^\circ-80^\circ=10^\circ$,

$\therefore$ 顶角 $\angle BAC=180^\circ-2 \times 10^\circ=180^\circ-20^\circ=160^\circ$.

故答案为 160° ;

如图, 等腰三角形为锐角三角形,

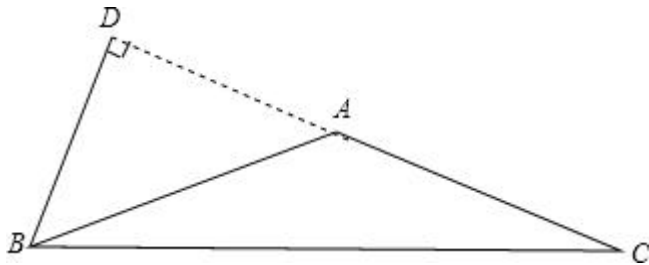


$\because BD \perp AC, \angle ABD = 80^\circ,$

$\therefore \angle A = 10^\circ,$

即顶角的度数为 10° ;

如图, 等腰三角形为钝角三角形,



$\because BD \perp AC, \angle DBA = 80^\circ,$

$\therefore \angle BAD = 10^\circ,$

$\therefore \angle BAC = 170^\circ.$

故答案为 160° 或 10° 或 170° .

【点睛】本题考查了等腰三角形两底角相等的性质, 直角三角形两锐角互余的性质, 解题的关键在于正确的画出图形, 结合图形, 利用数形结合思想求解.

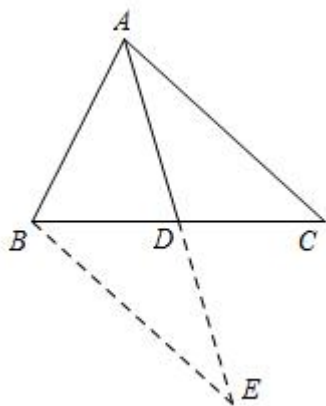
15. 若 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4, AC = 7$, 则中线 AD 的取值范围是_____.

【答案】 $\frac{3}{2} < AD < \frac{11}{2}$

【解析】

【分析】延长 AD 到 E , 使 $AD = DE$, 连接 BE , 证 $ADC \cong EDB$, 推出 $EB = AC$, 根据三角形的三边关系求出即可.

【详解】解: 延长 AD 到 E , 使 $AD = DE$, 连接 BE



$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore BD = CD$,

在 $\triangle ADC$ 与 $\triangle EDB$ 中,

$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle ADC = \angle BDE, \\ AD = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB (SAS)$,

$\therefore EB = AC$,

根据三角形的三边关系得: $BE - AB < AE < BE + AB$,

$\therefore 3 < AE < 11$,

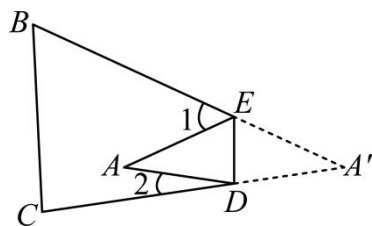
$\therefore AE = 2AD$,

$\therefore \frac{3}{2} < AD < \frac{11}{2}$,

故答案为: $\frac{3}{2} < AD < \frac{11}{2}$.

【点睛】 本题主要考查对全等三角形的性质和判定, 三角形的三边关系定理等知识点的理解和掌握, 能推出 $3 < 2AD < 11$ 是解此题的关键.

16. 如图, 把 $\triangle ABC$ 纸片沿 DE 折叠, 当点 A 落在四边形 $BCDE$ 内部时, 则 $\angle A$ 、 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 之间的数量关系是_____.

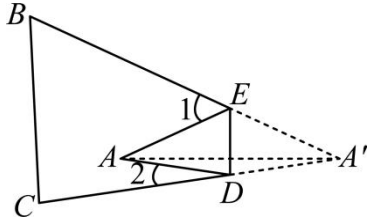


【答案】 $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$

【解析】

【分析】此题主要考查的是三角形的外角性质和图形的翻折变换，理清图中角与角的关系是解决问题的关键. 可连接 AA' ，分别在 $\triangle AEA'$ 、 $\triangle ADA'$ 中，利用三角形的外角性质表示出 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ ；两者相加联立折叠的性质即可得到所求的结论.

【详解】解：连接 AA' ，



则 $\triangle A'ED$ 即为折叠前的三角形,

由折叠的性质知: $\angle DAE = \angle DA'E$.

由三角形的外角性质知:

$$\angle 1 = \angle EAA' + \angle EA'A, \quad \angle 2 = \angle DAA' + \angle DA'A;$$

则 $\angle 1 + \angle 2 = \angle DAE + \angle DA'E = 2\angle DAE$,

即 $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$.

故答案为: $\angle 1 + \angle 2 = 2\angle A$.

【点睛】 本题考查了折叠的性质和三角形外角性质的应用，主要考查学生的推理能力.

17. 对于两个不相等的实数 a, b , 我们规定符号 $\text{Max}\{a, b\}$ 表示 a, b 中的较大值, 如: $\text{Max}\{2, 4\}=4$, 按照这个规定, 方程 $\text{Max}\{x, -x\}=x^2-2$ 的解为_____.

【答案】 2 或-2.

【解析】

【分析】分类讨论 x 与 $-x$ 的范围，利用题中的新定义方程的解即可.

【详解】当 $x > -x$, 即 $x > 0$ 时, 方程为 $x = x^2 - 2$,

解得: $x_1 = -1, x_2 = 2,$

$$\therefore x=2,$$

当 $x < -x$, 即 $x < 0$ 时, 方程为 $-x = x^2 - 2$,

解得: $x_1 = 1, x_2 = -2,$

$$\therefore x = -2,$$

故答案为 2 或-2.

【点睛】 此题考查了解一元二次方程，解题的关键是根据题意列出方程求解.

18. 如果一元二次方程的两根相差 1, 那么该方程成为“差 1 方程”. 例如 $x^2 + x = 0$ 是“差 1 方程”. 若关于 x 的方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ (a, b 是常数, $a > 0$) 是“差 1 方程”设 $t = 10a - b^2$, t 的最大值为_____.

【答案】 9

【解析】

【分析】根据新定义得方程的大根与小根的差为1，列出 a 与 b 的关系式，再由 $t = 10a - b^2$ ，得 t 与 a 的关系，从而得出最后结果.

【详解】解：由题可得： $\Delta = b^2 - 4a \times 1 = b^2 - 4a \geq 0$

$$\therefore \text{解方程得 } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a},$$

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + 1 = 0$ (a, b 是常数, $a > 0$)是“差1方程”，

$$\therefore \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} = 1,$$

$$\therefore b^2 = a^2 + 4a,$$

$$\therefore t = 10a - b^2,$$

$$\therefore t = 6a - a^2 = -(a - 3)^2 + 9,$$

$$\therefore (a - 3) \geq 0,$$

$$\therefore a = 3 \text{ 时, } t \text{ 的最大值为 } 9.$$

故答案为：9

【点睛】本题考查了一元二次方程，解题的关键是熟练运用一元二次方程的解法以及正确理解“差1方程”的定义.

三、解答题（本大题共8小题，共66.0分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

19. 计算： $(2 - \sqrt{3})^2 + |\sqrt{12} - \sqrt{18}| - \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} - (\sqrt{5} - 1)^0$.

【答案】 $4 - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】根据二次根式的运算法则以及零指数幂的意义即可求出答案.

【详解】解：原式 $= 4 - 4\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} - 1$

$$= 4 - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}.$$

【点睛】本题考查学生的运算能力，解题的关键是熟练运用运算法则，本题属于基础题型.

20. 已知 $x = \frac{1}{\sqrt{3} + 2}$ ，求 $\frac{x+3}{x^2+3x} + \frac{2x^2+x-1}{2x-1}$ 的值.

【答案】5

【解析】

【分析】化简原式，分母有理化后再代入求值.

【详解】解：原式 $= \frac{x+3}{x(x+3)} + \frac{(2x-1)(x+1)}{2x-1} = \frac{1}{x} + x + 1$,

将 $x = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = 2-\sqrt{3}$ 代入得：

原式 $= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3}) + 1 = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + 3 - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} = 5$.

【点睛】本题考查了二次根式化简求值及分母有理化，熟练掌握分母有理化的方法是解题的关键.

21. (1) $(3x-1)^2 - x^2 = 0$.

(2) $\sqrt{2}x(x-3) = 9-3x$.

(3) $\frac{x^2-2}{3} - \frac{x}{6} = \frac{x}{2}$

(4) $x^2 - 8x - 9984 = 0$.

【答案】(1) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ (2) $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (3) $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ (4)

$x_1 = 104$, $x_2 = -96$

【解析】

【分析】(1) 用因式分解法即可解得答案

(2) 用因式分解法即可解得答案

(3) 先化简再用配方法可得答案;

(4) 用配方法可得答案.

【详解】解：(1) $(3x-1)^2 - x^2 = 0$

$(4x-1)(2x-1) = 0$,

$\therefore 4x-1=0$ 或 $2x-1=0$,

$\therefore x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

(2) $\sqrt{2}x(x-3) = 9-3x$,

$\sqrt{2}x(x-3) + 3(x-3) = 0$

$(x-3)(\sqrt{2}x+3) = 0$

$\therefore x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$(3) \frac{x^2-2}{3} - \frac{x}{6} = \frac{x}{2}$$

$$2x^2 - 4 - x = 3x$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 3 \text{ 即 } (x-1)^2 = 3$$

$$x-1 = \pm\sqrt{3}$$

$$\therefore x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3};$$

$$(4) x^2 - 8x - 9984 = 0,$$

$$x^2 - 8x = 9984,$$

$$x^2 - 8x + 16 = 9984 + 16, \text{ 即 } (x-4)^2 = 10000,$$

$$\therefore x-4 = \pm 100,$$

$$\therefore x_1 = 104, x_2 = -96;$$

【点睛】本题考查解一元二次方程，解题的关键是掌握解一元二次方程的一般方法：直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法，并掌握选用较简便的方法解一元二次方程.

22. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m+1)x^2 + 2x = 1$ (m 为实数).

(1) 如果该方程有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围.

(2) 如果该方程有两个相等的实数根，求 m 的取值范围.

(3) 如果该方程没有实数根，求 m 的取值范围.

【答案】(1) $m > -2$ 且 $m \neq -1$

(2) $m = -2$

(3) $m < -2$

【解析】

【分析】(1) 先根据一元二次方程的定义可得 $m \neq -1$ ，再根据一元二次方程的根的判别式 $\Delta > 0$ 即可得；

(2) 先根据一元二次方程的定义可得 $m \neq -1$ ，再根据一元二次方程的根的判别式 $\Delta = 0$ 即可得；

(3) 先根据一元二次方程的定义可得 $m \neq -1$ ，再根据一元二次方程的根的判别式 $\Delta < 0$ 即可得.

【小问 1 详解】

$\therefore$ 方程 $(m+1)x^2 + 2x = 1$ 是关于 x 的一元二次方程，

$\therefore m+1 \neq 0,$

解得 $m \neq -1,$

如果该方程有两个不相等的实数根,

则其根的判别式 $\Delta = 2^2 - 4 \times (m+1) \times (-1) > 0$,

解得 $m > -2$,

故此时 m 的取值范围为 $m > -2$ 且 $m \neq -1$;

【小问 2 详解】

如果该方程有两个相等的实数根,

则其根的判别式 $\Delta = 2^2 - 4 \times (m+1) \times (-1) = 0$,

解得 $m = -2$;

【小问 3 详解】

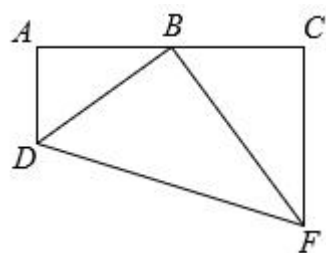
如果该方程没有实数根,

则其根的判别式 $\Delta = 2^2 - 4 \times (m+1) \times (-1) < 0$,

解得 $m < -2$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的定义和根的判别式, 熟练掌握根的判别式是解题关键.

23. 已知: 如图, $AD \parallel CF$, DB 平分 $\angle ADF$, $AD + CF = DF$. 求证: FB 平分 $\angle CFD$.

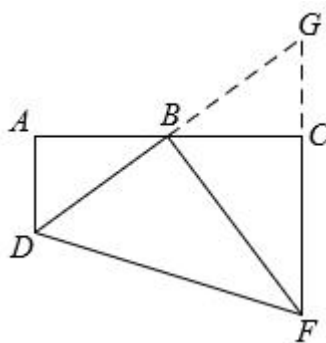


【答案】 见解析

【解析】

【分析】 延长 DB 交 FC 的延长线于点 G , 根据等腰三角形的性质, 要证明 FB 平分 $\angle CFD$, 只需证明 $DB = GB$ 即可.

【详解】 证明: 如图,



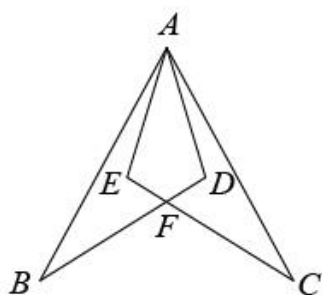
延长 DB 交 FC 的延长线于点 G ,

$\because DB$ 平分 $\angle ADF$,

$\therefore \angle ADB = \angle FDB$,
 $\because AD \parallel CF$,
 $\therefore \angle ADB = \angle G$, $\angle A = \angle GCB$,
 $\therefore \angle G = \angle FDB$,
 $\therefore GF = DF$,
 $\because GF = CG + CF$, $DF = AD + CF$,
 $\therefore CG = AD$,
 $\therefore \triangle ADB \cong \triangle CGB$ (ASA) ,
 $\therefore DB = GB$,
 $\therefore FB$ 平分 $\angle CFD$ (等腰三角形, 三线合一)

【点睛】本题考查了等腰三角形的判定和性质, 角平分线的定义, 全等三角形的判定与性质, 添加合适的辅助线构造等腰三角形是解题的关键.

24. 已知如图, $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle BAE = \angle CAD$, BD 与 CE 相较于点 F , 求证:
 $FB = FC$



【答案】证明见详解

【解析】

【分析】连接 BC , 由已知条件证得 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 从而证得 $\angle ABD = \angle ACE$. 要证 $FB = FC$, 可利用等式性质来证得.

【详解】证明: 连接 BC .

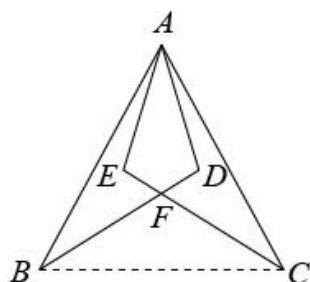
$\because \angle BAE = \angle CAD$,
 $\therefore \angle BAE + \angle EAD = \angle CAD + \angle DAE$,
 即 $\angle BAD = \angle CAE$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

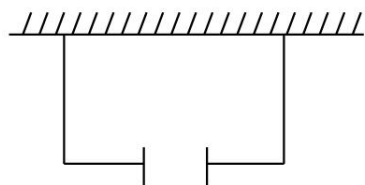
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS) .

$\therefore \angle ABD = \angle ACE$.
 $\because AB = AC$,
 $\therefore \angle ABC = \angle ACB$.
 $\because \angle ABD = \angle ACE$,
 $\therefore \angle ABC - \angle ABD = \angle ACB - \angle ACE$,
 即 $\angle FBC = \angle FCB$.
 $\therefore FB = FC$.



【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的性质以及全等三角形的判定和性质，证得 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 而得到 $\angle ABD = \angle ACE$ 是解题的关键.

25. 如图，小明家要建一个面积为150平方米的养鸡场，养鸡场的一边靠墙，另三边（门除外）用竹篱笆围成．这堵墙长18米，在与墙平行的一边，要开一扇2米宽的门．已知围建养鸡场的竹篱笆总长为33米（没有剩余材料，接头忽略不计），那么小明家养鸡场的长和宽应分别为多少米？



【答案】 小明家养鸡场的长和宽应分别为15米，10米

【解析】

【分析】 设垂直于墙的一边长为 x 米，结合题意可得到平行于墙的一边长为 $(33 - 2x + 2)$ 米，再通过面积150平方米列出方程，从而计算得到答案.

【详解】 设垂直于墙的一边长为 x 米，则平行于墙的一边长为 $(33 - 2x + 2)$ 米，

由题意得 $x \times (33 - 2x + 2) = 150$

$$\therefore 2x^2 - 35x + 150 = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{15}{2}, \quad x_2 = 10$$

当 $x = 10$ 时， $33 - 2x + 2 = 15 < 18$

当 $x = \frac{15}{2}$ 时, $33 - 2x + 2 = 20 > 18$ ($x = \frac{15}{2}$ 不符合题意, 舍去)

$\therefore$ 这个养鸡场与墙垂直的一边应长 10 米.

则 $33 - 2 \times 10 + 2 = 15$ 米

$\therefore$ 小明家养鸡场的长和宽应分别为 15 米, 10 米.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用; 求解的关键是熟练掌握一元二次方程的解法并运用到实际问题的求解过程中, 即可得到答案.

26. 如图①, 点 M 为锐角三角形 ABC 内任意一点, 连接 AM 、 BM 、 CM . 以 AB 为一边向外作等边三角形 $\triangle ABE$, 将 BM 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BN , 连接 EN .

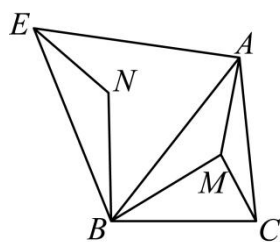


图1

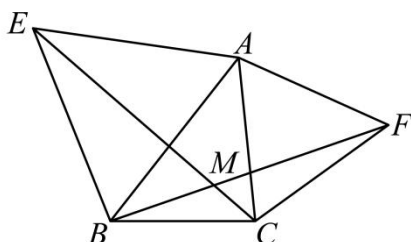


图2

(1) 求证: $\triangle AMB \cong \triangle ENB$;

(2) 若 $AM + BM + CM$ 的值最小, 则称点 M 为 $\triangle ABC$ 的费马点, 若点 M 为 $\triangle ABC$ 的费马点, 试求此时 $\angle AMB$ 、 $\angle BMC$ 、 $\angle CMA$ 的度数;

(3) 小翔受以上启发, 得到一个作锐角三角形费马点的简便方法: 如图②, 分别以 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 为一边向外作等边 $\triangle ABE$ 和等边 $\triangle ACF$, 连接 CE 、 BF , 设交点为 M , 则点 M 即为 $\triangle ABC$ 的费马点, 试说明这种作法的依据.

【答案】(1) 见解析;

(2) $\angle BMC = 120^\circ$, $\angle AMB = 120^\circ$, $\angle AMC = 120^\circ$;

(3) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 结合等边三角形的性质, 根据 SAS 可证 $\triangle AMB \cong \triangle ENB$;

(2) 连接 MN , 由 (1) 的结论证明 $\triangle BMN$ 为等边三角形, 所以 $BM = MN$, 即 $AM + BM + CM = EN + MN + CM$, 所以当 E 、 N 、 M 、 C 四点共线时, $AM + BM + CM$ 的值最小, 从而可求此时 $\angle AMB$ 、 $\angle BMC$ 、 $\angle CMA$ 的度数;

(3) 根据 (2) 中费马点的定义, 又 $\triangle ABC$ 的费马点在线段 EC 上, 同理也在线段 BF 上. 因此线段 EC 与 BF 的交点即为 $\triangle ABC$ 的费马点.

【小问 1 详解】

证明: $\because \triangle ABE$ 为等边三角形,

$\therefore AB = BE$, $\angle ABE = 60^\circ$.

而 $\angle MBN = 60^\circ$,

$$\therefore \angle ABM = \angle EBN.$$

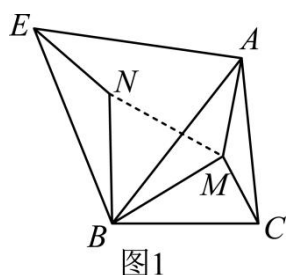
在 $\triangle AMB$ 与 $\triangle ENB$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AB = BE \\ \angle ABM = \angle EBN, \\ BM = BN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AMB \cong \triangle ENB (\text{SAS})$$

【小问 2 详解】

连接 MN .



由(1)知, $AM = EN$.

$$\because \angle MBN = 60^\circ, \quad BM = BN,$$

$\therefore \triangle BMN$ 为等边三角形.

$$\therefore BM = MN.$$

$$\therefore AM + BM + CM = EN + MN + CM.$$

$\therefore$ 当 E 、 N 、 M 、 C 四点共线时, $AM + BM + CM$ 的值最小.

此时, $\angle BMC = 180^\circ - \angle NMB = 120^\circ$;

$$\angle AMB = \angle ENB = 180^\circ - \angle BNM = 120^\circ;$$

$$\angle AMC = 360^\circ - \angle BMC - \angle AMB = 120^\circ.$$

【小问 3 详解】

由(2)知, $\triangle ABC$ 的费马点在线段 EC 上, 同理也在线段 BF 上.

因此线段 EC 与 BF 的交点即为 $\triangle ABC$ 的费马点.

【点睛】本题考查全等三角形的判定与性质以及等边三角形的性质, 是一道综合性的题目难度很大.