

2023 学年八年级第一学期数学学科期终质量监测试卷

(完卷时间: 90 分钟, 满分 100 分)

一、填空题 (本题共 14 小题, 每小题 2 分, 满分 28 分)

1. 化简: $\sqrt{8x^3y^2} (y > 0) =$ _____.

【答案】 $2xy\sqrt{2x}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质进行化简根式即可.

【详解】 解: $\sqrt{8x^3y^2} = 2x|y|\sqrt{2x}$,

$\because y > 0$,

$\therefore \sqrt{8x^3y^2} = 2xy\sqrt{2x}$;

故答案为 $2xy\sqrt{2x}$.

【点睛】 本题主要考查二次根式的化简, 熟练掌握二次根式的性质是解题的关键.

2. 一元二次方程 $x^2 + x = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$

【解析】

【分析】 本题考查的是一元二次方程的解法, 先把方程化为 $x(x+1) = 0$, 再解两个一次方程即可, 掌握因式分解的方法解一元二次方程的解本题的关键.

【详解】 解: $x^2 + x = 0$,

$\therefore x(x+1) = 0$,

$\therefore x = 0$ 或 $x+1 = 0$,

解得: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$;

故答案为: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$

3. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 的根的判别式的值为 -4 , 则 m 的值为_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式, 利用根的判别式

$\Delta = b^2 - 4ac = -4$ ，建立关于 m 的方程求得 m 的值是解题的关键.

【详解】解： $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4m = -4$ ，

解得： $m = 5$ ，

故答案为： 5.

4. 在实数范围内分解因式： $x^2 - 2x - 1 =$ _____.

【答案】 $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

【解析】

【分析】根据完全平方式进行配方，再运用平方差公式在实数范围内因式分解.

【详解】 $x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 1 = (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

故答案为： $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

【点睛】考核知识点：在实数范围内分解因式，运用配方法和平方差公式进行因式分解是关键.

5. 函数 $y = 2x + \frac{x}{x+1}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq -1$

【解析】

【分析】本题考查函数有意义的条件，掌握分式的分母不为零是解题的关键.

【详解】解：由题可得： $x+1 \neq 0$ ，

解得： $x \neq -1$ ，

故答案为： $x \neq -1$.

6. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x}$ ，那么 $f(6) =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】本题考查了函数值的求解，涉及二次根式的化简，把 $x = 6$ 代入函数解析式进行计算即可，理解题中的函数解析式是解题的关键.

【详解】当 $x = 6$ 时， $f(6) = \frac{\sqrt{6+2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

7. 已知函数 $y = (2a-3)x$ 的图象经过第二、四象限, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】根据正比例函数图象的位置与系数的关系可得 k 值范围, 得 $2a-3 < 0$, 求解即可.

【详解】解: $\because$ 函数 $y = (2a-3)x$ 的图象经过第二、四象限,

$$\therefore 2a-3 < 0,$$

$$\therefore a < \frac{3}{2}.$$

故答案为: $a < \frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查正比例函数的图象位置与系数的关系, 由位置确定系数的符号特征, 即数形结合是解答此题的关键.

8. 某件商品原价为 100 元, 经过两次涨价后的价格为 y 元, 如果每次涨价的百分率都是 x , 那么 y 关于 x 的函数关系式为_____.

【答案】 $y = 100(1+x)^2$

【解析】

【分析】本题考查了根据实际问题列函数关系式, 根据现在的价格等于原价乘以 $(1+\text{涨价的百分率})$ 的平方, 即可得解.

【详解】由题意得: $y = 100(1+x)^2$,

故答案为: $y = 100(1+x)^2$.

9. 命题“直角三角形两锐角互余”的逆命题是: _____.

【答案】 两个锐角互余的三角形是直角三角形

【解析】

【分析】找出原命题的条件和结论, 再把原命题的条件变为逆命题的结论, 把原命题的结论变为逆命题的条件即可求解.

【详解】解: 命题“直角三角形两锐角互余”的逆命题是: 两个锐角互余的三角形是直角三角形,

故答案为: 两个锐角互余的三角形是直角三角形.

【点睛】本题考查了写出原命题的逆命题, 熟练掌握命题的条件和结论是解题的关键.

10. 平面内到点 A 的距离等于 5cm 的点的轨迹是_____.

【答案】以 A 为圆心 5cm 为半径的圆

【解析】

【分析】根据圆的定义：平面内到一定点的距离等于定长的所有点的集合，即可解题.

【详解】解：由圆的定义可知，平面内到点 A 的距离等于 5cm 的点的轨迹是以 A 为圆心 5cm 为半径的圆.

【点睛】本题考查了圆的定义，属于简单题，熟悉圆的概念是解题关键.

11. 如果点 A 的坐标为 $(2, -1)$ ，点 B 的坐标为 $(5, 3)$ ，那么 A 、 B 两点的距离等于 ____.

【答案】5

【解析】

【分析】利用两点之间的距离公式即可得.

【详解】解： $\because A(2, -1), B(5, 3)$,

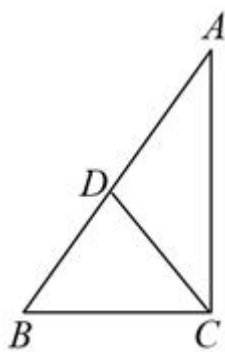
$$\therefore AB = \sqrt{(5-2)^2 + (3+1)^2} = 5,$$

即 A 、 B 两点的距离等于 5,

故答案为：5.

【点睛】本题考查了两点之间的距离公式，熟记两点之间的距离公式是解题关键.

12. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 是 AB 的中点， $CD = 5$ ， $AC = 8$ ，则 $BC =$ ____.



【答案】6

【解析】

【分析】利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得 AB 的长，再直接利用勾股定理得出 BC 的长.

【详解】解： $\because$ 点 D 是斜边 AB 的中点， $CD = 5$,

$$\therefore AB = 2CD = 10.$$

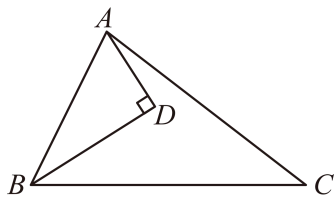
$$\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 8,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

故答案为：6.

【点睛】此题主要考查了勾股定理以及直角三角形的性质，正确掌握直角三角形的性质是解题关键.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线, 点 D 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $AD \perp BD, \angle DAC = 20^\circ, \angle C = 38^\circ$, 那么 $\angle BAD = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】 58

【解析】

【分析】 本题考查三角形外角性质, 等角的余角相等, 解题的关键是作辅助线构造等腰三角形.

【详解】 解: 延长 AD 交 BC 于点 E ,

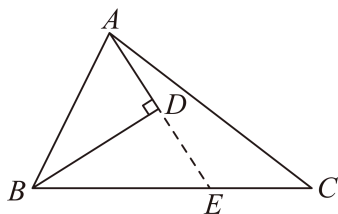
$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线,

$\therefore \angle ABD = \angle EBD$,

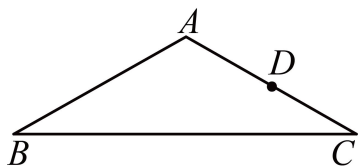
$\because AD \perp BD$,

$\therefore \angle BAD = \angle BED = \angle DAC + \angle C = 20^\circ + 38^\circ = 58^\circ$,

故答案为: 58.



14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 4, \angle C = 30^\circ$, 点 D 是 AC 边中点, 将 $\triangle ABC$ 沿某直线翻折使得点 B 与点 D 重合, 折痕交边 BC 于点 E , 交边 AB 于点 F , 那么 BE 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{14\sqrt{3}}{9}$

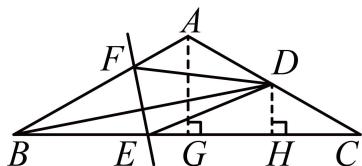
【解析】

【分析】 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 G , 过点 D 作 $DH \perp BC$ 与点 H , 根据等边对等角得出

$\angle ABC = \angle C = 30^\circ, BC = 2BG$, 进而得出 $AG = \frac{1}{2} AB = 2$, 分别根据勾股定理得出 BG, CH 长度, 设

$BE = x$, 根据线段垂直平分线的性质得出 $DE = BE = x$, 再根据勾股定理求解即可.

【详解】过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ，过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H ，



$$\therefore AB = AC = 4, \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 30^\circ, BC = 2BG,$$

$$\therefore AG = \frac{1}{2} AB = 2,$$

$$\therefore BG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 4\sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 D 是 AC 边中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AC = 2,$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2} DC = 1,$$

$$\therefore CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{3},$$

设 $BE = x$,

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 沿某直线翻折使得点 B 与点 D 重合，

$\therefore EF$ 垂直平分 BD ，

$$\therefore DE = BE = x,$$

$$\therefore EH = 4\sqrt{3} - x - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - x,$$

$$\therefore DE^2 - DH^2 = EH^2,$$

$$\therefore x^2 - 1^2 = (3\sqrt{3} - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{14\sqrt{3}}{9},$$

$$\therefore BE \text{ 的长为 } \frac{14\sqrt{3}}{9},$$

$$\text{故答案为: } \frac{14\sqrt{3}}{9}.$$

【点睛】本题考查了翻折变换，含 30° 角的直角三角形的性质，线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性

质及勾股定理，熟练掌握知识点并添加适当的辅助线是解题的关键.

二、选择题 (本大题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分)

15. 下列各组二次根式中，是同类二次根式的是()

- A. $\sqrt{6}$ 和 $3\sqrt{2}$ B. $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{2a}$ C. $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ D. $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{9}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同类二次根式的定义，将二次根式化成最简二次根式后，被开方数相同，这样的二次根式叫做同类二次根式.

根据同类二次根式的定义逐项判断即可解答

【详解】解：A. $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{2}$ 的被开方数不同，所以它们不是同类二次根式；故本选项错误；

B. $\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{2a}$ 的被开方数不同，所以它们不是同类二次根式；故本选项错误；

C. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的被开方数相同，所以它们是同类二次根式；故本选项正确；

D. $\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{9} = 3$ 的被开方数不同，所以它们不是同类二次根式；故本选项错误；

故选 C.

16. 若点 $(-2, y_1), (-1, y_2), (1, y_3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图象上，则下列结论正确的是 ()

- A. $y_1 > y_2 > y_3$ B. $y_2 > y_1 > y_3$ C. $y_3 > y_1 > y_2$ D. $y_3 > y_2 > y_1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特点，相恩局反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 判断出函数图象所在象限和性质，再根据各点的横坐标的特点进行判断即可，熟练掌握知识点是解题的关键.

【详解】 $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$,

$\therefore$ 反比例函数图象分别位于第二、四象限，且在每个象限内 y 随 x 的增大而增大，

$\therefore -2 < -1 < 0$,

$\therefore$ 点 $(-2, y_1), (-1, y_2)$ 位于第二象限，

$\therefore 0 < y_1 < y_2$,

$\therefore 1 > 0$,

$\therefore$ 点 $(1, y_3)$ 在第四象限,

$\therefore y_3 < 0$,

$\therefore y_2 > y_1 > y_3$,

故选: B.

17. 下列关于 x 的一元二次方程一定有实数解的是()

A. $ax^2 - x + 2 = 0$

B. $\sqrt{2}x^2 - 2x + 1 = 0$

C. $x^2 - x - m = 0$

D. $x^2 - mx - 1 = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值的符号, 即可得到答案.

【详解】 解: A、 a 的值未知, 不能保证这是一元二次方程, 且 $\Delta = (-1)^2 - 4 \bullet a \times 2 = 1 - 8a$, 不能确定 Δ 正负, 故不符合题意;

B、 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times 1 = 4 - 4\sqrt{2} < 0$, 没有实数根, 故不符合题意;

C、 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 1 + 4m$, 不能确定 Δ 正负, 故不符合题意;

D、 $\Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = m^2 + 4 > 0$, 一定有实数根, 符合题意;

故选择: D.

【点睛】 本题考查了一元二次方程根的判别式, 解题的关键是掌握当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根;

18. 下列说法中正确的是 ()

A. “对顶角相等” 没有逆命题;

B. 有两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等;

C. 以 AB 为底边的等腰三角形的顶点的轨迹是线段 AB 的垂直平分线;

D. 有两组边分别相等的两个直角三角形全等.

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定方法, 逆命题, 线段垂直平分线的性质, 掌握全等三角形的判定定理是解题的关键.

【详解】 解: A. “对顶角相等” 的逆命题是 “相等的角是对顶角”, 原说法错误;

B. 有两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等，说法正确；

C. 以 AB 为底边的等腰三角形的顶点的轨迹是线段 AB 的垂直平分线（线段的中点除外），原说法错误；

D. 有两组边分别相等的两个直角三角形不一定全等，原说法错误；

故选 B.

三、简答题（本大题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

19. 计算： $\sqrt{32} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}}$.

【答案】 $6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式加减运算，先分母有理化，化简二次根式，再加减计算即可.

【详解】 解：原式 $= 4\sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \sqrt{3} + \sqrt{2}$
 $= 4\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$
 $= 6\sqrt{2}.$

20. 用配方法解方程： $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了用配方法解一元二次方程，直接根据配方法的步骤进行解方程即可.

【详解】 $3x^2 - 2x - 1 = 0$,

$$3x^2 - 2x = 1,$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3},$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2,$$

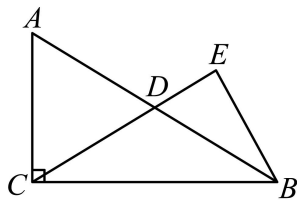
$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$x - \frac{1}{3} = \pm \frac{2}{3},$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{3}.$$

21. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 8$ ，点 D 是 AB 边中点，延长 CD 至点 E ，使得

$DE = \frac{1}{2}CD$ ，连接 BE ，当 $BE = 2\sqrt{3}$ 时，求 $\angle DBE$ 的度数.



【答案】 30°

【解析】

【分析】 本题考查了直角三角形斜边上的中线性质的逆定理以及等边三角形的判定和性质，熟练掌握直角三角形斜边上的中线性质的逆定理是解题的关键. 由直角三角形斜边上的中线性质得 $CD = \frac{1}{2}AB = BD = 4$ ，则 $DE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}BD = 2$ ，再由勾股定理的逆定理得 $\triangle BDE$ 是直角三角形，且 $\angle E = 90^\circ$ ，即可得出结论.

【详解】 解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ，点 D 是 AB 边中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB = BD = 4,$$

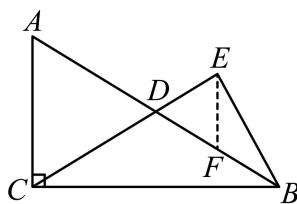
$$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}BD = 2,$$

$$\because BE = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore DE^2 + BE^2 = BD^2,$$

$$\therefore \triangle BDE \text{ 是直角三角形，且 } \angle E = 90^\circ,$$

取 BD 的中点 F ，连接 EF ，

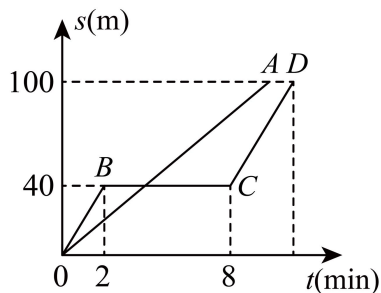


$$\because DE = \frac{1}{2}BD = DF = EF = FB,$$

$$\therefore \angle EDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = 30^\circ, \text{ 即 } \angle DBE \text{ 的度数为 } 30^\circ.$$

22. 龟兔赛跑是同学们熟悉的寓言故事，乌龟和兔子在比赛过程中的路程 $s(\text{m})$ 与时间 $t(\text{min})$ 的函数关系如图所示. 请根据图像完成下列问题:



(1) 兔子在比赛中睡觉的时间为_____分钟；

(2) 已知兔子在 OB 段和 CD 段的速度保持一致，则兔子完成比赛共用时_____分钟；

(3) 在 (2) 的条件下，已知乌龟比兔子提前 1 分钟到达终点，求乌龟在比赛过程中路程 $s(\text{m})$ 与时间 $t(\text{min})$ 的函数关系式。

【答案】 (1) 6 (2) 11

(3) $s = 10t (0 \leq t \leq 10)$

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的应用，利用待定系数法求函数的表达式是本题的关键。

(1) 计算点 C 和 B 的横坐标之差即可；

(2) 利用速度 = $\frac{\text{路程}}{\text{时间}}$ ，求出 OB 段的速度，再利用时间 = $\frac{\text{路程}}{\text{速度}}$ ，求出 CD 段所用的时间，进而求出完成

比赛一共用的时间；

(3) 根据题意，求出点 A 的坐标，再利用待定系数法求解即可。

【小问 1 详解】

解：兔子在比赛中睡觉的时间为 $8 - 2 = 6\text{s}$ ，

故答案为：6。

【小问 2 详解】

兔子的速度为 $\frac{40}{2} = 20(\text{m/min})$ ，

CD 段用时为 $\frac{100 - 40}{20} = 3\text{min}$ ，

$\therefore$ 兔子完成比赛共用时 $8 + 3 = 11\text{min}$ ，

故答案为：11；

【小问 3 详解】

解：由题意可知，乌龟完成比赛用时 $11 - 1 = 10(\text{min})$ ，

∴ 点 A 的坐标为 $(10, 100)$.

当 $0 \leq t \leq 10$ 时, 设乌龟在比赛过程中路程 $s(\text{m})$ 与时间的函数关系式为 $s = kt$,

将坐标 $A(10, 100)$ 代入,

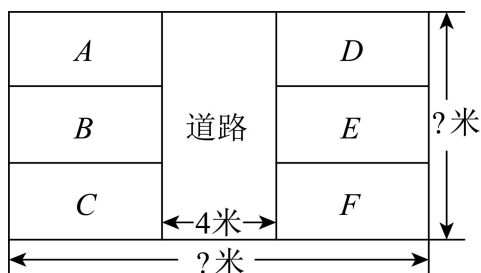
得 $10k = 100$,

解得 $k = 10$,

∴ 乌龟在比赛过程中路程 $s(\text{m})$ 与时间 $t(\text{min})$ 的函数关系式 $s = 10t (0 \leq t \leq 10)$.

四、解答题 (本大题共 4 小题, 第 23、24 题, 每题 8 分; 第 25、26 题, 每题 10 分; 满分 36 分)

23. 学校体育组准备在操场上划出一块长方形区域开展跳绳比赛, 比赛区域包括六块相同的跳绳场地及预留道路, 如图是比赛区域的规划图, 现知道每块跳绳场地的长是宽的两倍 (场地间空隙忽略不计), 预留道路的宽度为 4 米, 比赛区域的总面积为 144 平方米. 请你根据以上信息, 求比赛区域的长和宽分别是多少米?



【答案】比赛区域的长为 16 米, 宽为 9 米

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用, 设每块跳绳场地的宽为 x 米, 则其长为 $2x$ 米, 根据比赛场地的面积为 144 平方米列出一元二次方程, 求解即可, 准确理解题意, 找出等量关系是解题的关键.

【详解】 解: 设每块跳绳场地的宽为 x 米, 则其长为 $2x$ 米, 由题意得

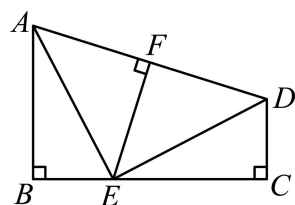
$$3x(2 \times 2x + 4) = 144,$$

解得 $x = 3$,

$$\therefore 3x = 9 \text{ 米}, \quad 2 \times 2x + 4 = 16 \text{ 米},$$

所以, 比赛区域的长为 16 米, 宽为 9 米.

24. 已知: 如图, 点 E 在 BC 上, $\angle B = \angle C = 90^\circ$, $AB = CE$, EF 垂直平分线段 AD .



(1) 求证: $AE \perp DE$;

(2) 连接 BF 、 CF , 求证: $\triangle BFC$ 是等腰直角三角形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的判定和性质, 熟练掌握全等三角形的判定和性质定理是解题的关键.

(1) 根据全等三角形的判定和性质定理, 线段垂直平分线的性质, 垂直的定义即可得到结论;

(2) 根据全等三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的判定和性质定理即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because EF$ 垂直平分线段 AD ,

$$\therefore EA = ED,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和 $\text{Rt}\triangle ECD$ 中,

$$\begin{cases} AB = CE \\ AE = ED \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ECD (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CED,$$

$$\because \angle BAE + \angle AEB = 90^\circ,$$

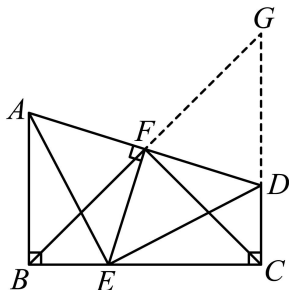
$$\therefore \angle CED + \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 180^\circ - (\angle CED + \angle AEB) = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp DE;$$

【小问 2 详解】

证明: 延长 BF 交 CD 的延长线于 G ,



由 (1) 知 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ECD$,

$$\therefore BE = CD, \quad AB = CE,$$

$$\therefore BC = BE + CE = AB + CD,$$

$$\because \angle ABC = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle G,$$

在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle DGF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABF = \angle G \\ \angle AFB = \angle DFG, \\ AF = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DGF (\text{AAS}),$$

$$\therefore DG = AB, \quad BF = FG,$$

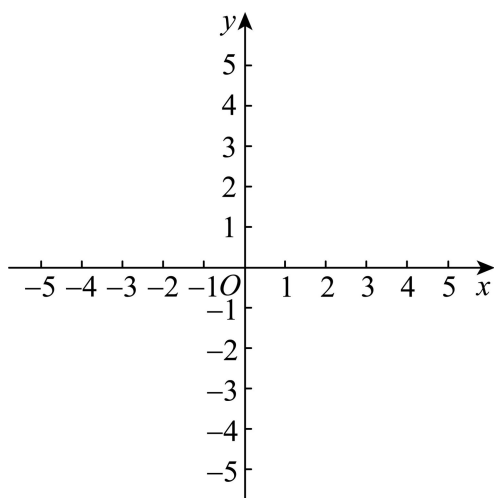
$$\therefore CD + DG = CG = BC = AB + CD,$$

$\therefore \triangle BCG$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CF \perp BG, \angle CBF = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle BCF$ 是等腰直角三角形.

25. 在平面直角坐标系中, 正比例函数 $y = -2x$ 和反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图象都经过点 $A(-1, a)$.



(1) 求 k 的值;

(2) 点 B 是 y 轴上一点, 且 $\angle BAO = 90^\circ$.

①求 AB 的长;

②如果点 C 在直线 OA 上, 当 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3}{4}$ 时, 求点 C 的坐标.

【答案】 (1) $k = -2$

$$(2) \text{ ① } \frac{\sqrt{5}}{2}; \text{ ② } \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的综合题目，考查了待定系数法求函数解析式，三角形的面积公式，勾股定理，

(1) 先把 $A(-1, a)$ 代入正比例函数 $y = -2x$ 中，求出点 A 的坐标，再代入反比例函数解析式即可求解；

(2) ①过点 A 作 $AH \perp y$ 轴于点 H ，设 $B(0, m)$ ，根据勾股定理求解即可；②设 $C(a, -2a)$ ，根据三角形面积公式求解即可；

熟练掌握知识点并能根据题意画出图形是解题的关键.

【小问 1 详解】

把 $A(-1, a)$ 代入正比例函数 $y = -2x$ 中，

$$\text{得 } a = -2 \times (-1) = 2,$$

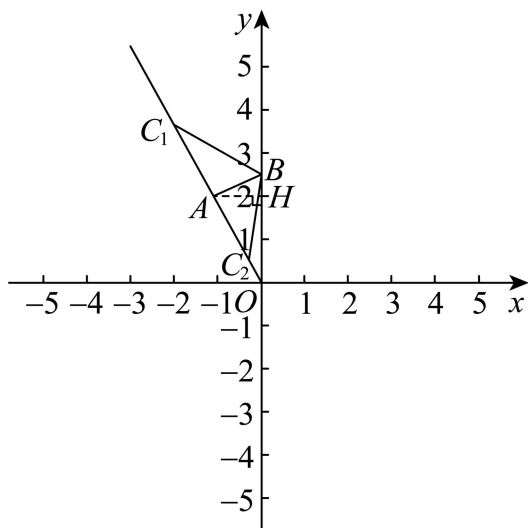
$$\therefore A(-1, 2),$$

再将 $A(-1, 2)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，

$$\therefore k = -2;$$

【小问 2 详解】

①如图，过点 A 作 $AH \perp y$ 轴于点 H ，



$$\therefore AH = 1, OH = 2,$$

$$\therefore \angle AHO = 90^\circ = \angle AHB,$$

$$\therefore OA^2 = OH^2 + AH^2 = 5, \quad AB^2 = AH^2 + BH^2$$

设 $B(0, m)$,

$$\therefore OB = m, BH = m - 2,$$

$$\because \angle BAO = 90^\circ,$$

$$\therefore AB^2 + AO^2 = OB^2,$$

$$\therefore AH^2 + BH^2 + AO^2 = OB^2, \text{ 即 } 1^2 + (m-2)^2 + 5 = m^2,$$

解得 $m = 2.5$,

$$\therefore OB = 2.5,$$

$$\therefore AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

② $\because$ 点 C 在直线 OA 上,

$$\therefore \text{设 } C(a, -2a),$$

$$\because \angle BAO = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-1-a)^2 + (2+2a)^2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\text{解得 } a = -\frac{2}{5} \text{ 或 } a = -\frac{8}{5},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right).$$

26. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 是边 AC 上一点, 过 D 作 DE 垂直 AB , 垂足为点 E .

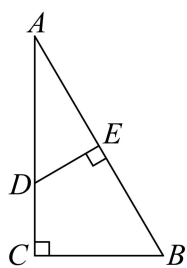


图1

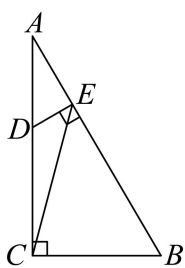


图2

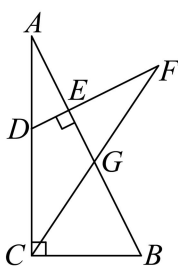


图3

(1) 如图1, 点 E 是 AB 的中点, $CD = DE$, 如果 $AB = 6$, 求 BC 的长;

(2) 已知 $CD = BC$,

①如图2, 连接 CE , 求证: CE 平分 $\angle BED$;

②如图3, 延长 DE 至点 F , 连接 CF 交线段 AB 于点 G , 当 $\angle A = \angle F$, 且点 G 是 CF 中点时, 求 $\frac{AE}{EG}$ 的值.

【答案】(1) 3

(2) ①见解析 ②2

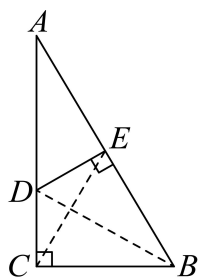
【解析】

【分析】(1) 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得到 $AE = CE = BE = \frac{1}{2}AB = 3$ ，然后证明 $\text{Rt}\triangle DEB \cong \text{Rt}\triangle DCB$ 即可解题；

(2) ①过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M ， $CN \perp ED$ 交 ED 延长线于 N ，证明 $\triangle CDN \cong \triangle CBM$ ，根据角平分线的判定定理即可得到结论；②过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M ， $CN \perp ED$ 交 ED 延长线于 N ，则有 $\triangle CDN \cong \triangle CBM$ ，即 $GM = BM$ ，然后推出 $\triangle EFG \cong \triangle MCG$ ，得到 $EG = GM$ ，然后根据 $\triangle ADE \sim \triangle ACM$ 求出比值即可。

【小问 1 详解】

解：连 CE ， BD ，



$\because E$ 是 AB 中点， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore AE = CE = BE = \frac{1}{2}AB = 3$$

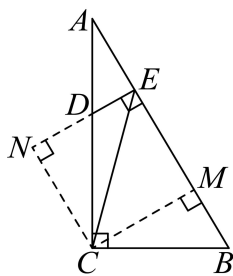
$\because \angle DEB = \angle DCB = 90^\circ$ ， $CD = DE$ ， $BD = BD$ ，

$$\therefore \text{Rt}\triangle DEB \cong \text{Rt}\triangle DCB$$

$$\therefore BC = EB = 3；$$

【小问 2 详解】

①过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M ， $CN \perp ED$ 交 ED 延长线于 N ，



$$\therefore \angle CNE = \angle MEN = \angle CME = 90^\circ，$$

$\therefore$ 四边形 $CMEN$ 为矩形，

$$\therefore \angle NCM = 90^\circ = \angle ACB，$$

$$\therefore \angle DCN = \angle BCM，$$

$$\because CD = BC，\angle CND = \angle CMB = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle CDN \cong \triangle CBM \text{ (AAS)}$$

$$\therefore CM = CN,$$

$$\therefore CE \text{ 平分 } \angle BED;$$

②过C作 $CM \perp AB$ 于M, $CN \perp ED$ 交ED延长线于N,

$$\therefore \angle CMA = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle ACM = \angle AGM + \angle BCM = 90^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle BCM,$$

$$\therefore ED \perp AB, \quad CM \perp AB,$$

$$\therefore EF \parallel CM,$$

$$\therefore \angle F = \angle GCM,$$

$$\therefore \angle F = \angle GCM = \angle A = \angle BCM,$$

$$\therefore \angle GMC = \angle BMC = 90^\circ, \quad CM = CM,$$

$$\therefore \triangle GCM \cong \triangle BCM \text{ (ASA)},$$

$$\therefore GM = BM,$$

$$\therefore \triangle CDN \cong \triangle CBM$$

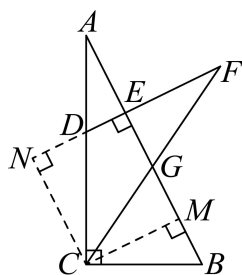
$$\therefore DN = BM$$

$$\therefore DN = BM = GM$$

$$\therefore \angle GMC = \angle GEF, \quad \angle F = \angle GGM, \quad CG = GF$$

$$\therefore \triangle EFG \cong \triangle MCG \text{ (AAS)}$$

$$\therefore EG = GM,$$



$$\text{设 } EG = GM = a,$$

$$\therefore BM = DN = a,$$

$$\therefore EM = EN = CN = CM = 2a,$$

$$\therefore DE = a$$

$$\therefore DE \parallel CM,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACM$$

$$\therefore \frac{DE}{CM} = \frac{AE}{AM}$$

$$\therefore \frac{AE}{AM} = \frac{1}{2},$$

$\therefore E$ 是 AM 的中点

$$\therefore AE = EM = 2a$$

$$\therefore \frac{AE}{EG} = 2.$$

【点睛】 本题考查全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，正方形的性质，作辅助线构造全等三角形是解题的关键.