

(考试时间: 90 分钟, 满分: 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 在下列二次根式中, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{4}$

B. $\sqrt{6}$

C. $\sqrt{12}$

D. $\sqrt{18}$

【答案】D

【分析】现将选项中的二次根式化为最简二次根式, 之后看哪个选项中根号下是 2, 即为正确答案

【详解】解: A. 因为 $\sqrt{4}=2$, 所以与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, A 错误;B. 因为 $\sqrt{6}$ 是最简二次根式, 所以与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, B 错误;C. 因为 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, 所以与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, C 错误;D. 因为 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, 所以与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, D 正确;

故选: D.

2. 下列关于 x 的方程中一定没有实数根的是 ()

A. $x^2 - 2x = 0$;

B. $x^2 - 2x + 1 = 0$;

C. $x^2 - 2x + 2 = 0$;

D. $x^2 - 2x - 2 = 0$.

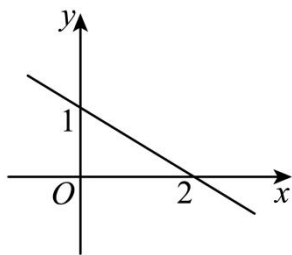
【答案】C

【分析】根据根的判别式解答即可.

【详解】解: A. $\because \Delta = 4 - 0 = 4 > 0$, $\therefore$ 方程有 2 个不相等的实数根, 故不符合题意;B. $\because \Delta = 4 - 4 = 0$, $\therefore$ 方程有 2 个相等的实数根, 故不符合题意;C. $\because \Delta = 4 - 8 = -4 < 0$, $\therefore$ 方程没有实数根, 故符合题意;D. $\because \Delta = 4 + 8 = 12 > 0$, $\therefore$ 方程有 2 个不相等的实数根, 故不符合题意;

故选 C.

3. 如图, 一次函数 $y=kx+b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$) 的图象, 则不等式 $kx+b>0$ 的解集是 ()



- A. $x < 0$ B. $x < 2$ C. $x > 0$ D. $x > 2$

【答案】B

【分析】结合函数图象, 写出直线在 x 轴上方所对应的自变量的范围即可.

【详解】解: 结合函数图象, 当 $x < 2$ 时, $y > 0$,

所以不等式 $kx+b>0$ 的解集为 $x < 2$,

故选: B.

【点睛】本题考查了反比例函数的性质, 确定 $2-k>0$ 是解题的关键.

4. 下列函数中, y 的值随 x 的值增大而减小的是 ()

- A. $y=2x-1$ B. $y=-2x+1$ C. $y=\frac{2}{x}$ D. $y=-\frac{2}{x}$

【答案】B

【分析】根据一次函数和反比例函数的性质即可解答.

【详解】解: A 选项, $y=2x-1$, y 的值随 x 的值增大而增大, 不符合题意;

B 选项, $y=-2x+1$, y 的值随 x 的值增大而减小, 符合题意;

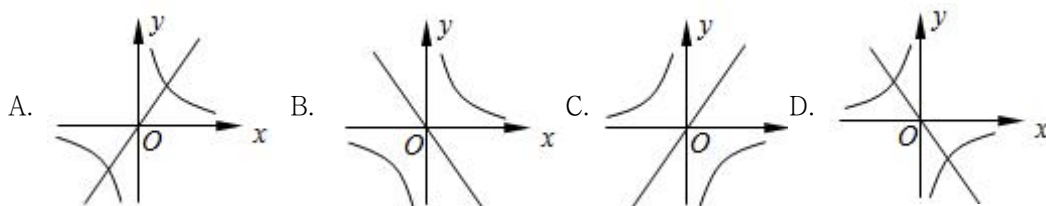
C 选项, $y=\frac{2}{x}$, 在每一象限内, y 的值随 x 的值增大而减小, 不符合题意;

D 选项, $y=-\frac{2}{x}$, 在每一象限内, y 的值随 x 的值增大而增大, 不符合题意;

故选: B.

5. 已知函数 $y=kx$ 中, y 随 x 的增大而减小,

那么它和函数 $y = \frac{k}{x}$ 在同一平面直角坐标系内的大致图像可能是 ()



【答案】 D

【解析】

【分析】 根据正比例函数的增减性判断出 $k < 0$, 再由函数的性质即可判定图形所过象限.

【详解】 解: $\because y = kx$ 中, y 随 x 的增大而减小,

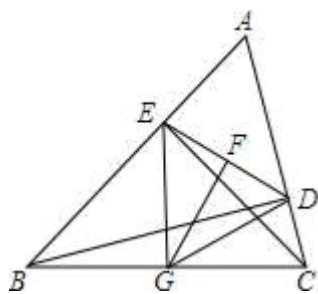
$\therefore k < 0$,

$\therefore y = kx$ 的图像经过二四象限, $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过二四象限,

故选 D.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 、 CE 是高, 点 G 、 F 分别是 BC 、 DE 的中点,

则下列结论中错误的是 ()



- A. $GE = GD$ B. $GF \perp DE$ C. $\angle DGE = 60^\circ$ D. GF 平分 $\angle DGE$

【答案】 C

【分析】 根据三角形的高线、中线、角平分线的定义与性质即可分别判断求解.

【详解】 解: $\because BD$ 、 CE 是高, 点 G 是 BC 的中点,

$\therefore GE = \frac{1}{2} BC$, $GD = \frac{1}{2} BC$,

$\therefore GE = GD$, A 正确, 不符合题意;

$\therefore GE = GD$, F 是 DE 的中点,

$\therefore GF \perp DE$, B 正确, 不符合题意;

$\angle DGE$ 的度数不确定, C 错误, 符合题意;

$\therefore GE = GD$, F 是 DE 的中点,

$\therefore GF$ 平分 $\angle DGE$, D 正确, 不符合题意;

故选 C.

二、填空题 (本大题共 14 小题, 每题 2 分, 满分 28 分)

7. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件, 分式有意义的条件, 列出不等式组, 解不等式组即可求解.

【详解】 解: 依题意,
$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases},$$

解得: $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$,

故答案为: $x \geq -3$ 且 $x \neq 1$.

8. 已知 $f(x) = \frac{6}{x}$, 那么 $f(\sqrt{2}) =$ _____.

【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 将 $x = \sqrt{2}$ 代入 $f(x) = \frac{6}{x}$, 进行求解即可.

【详解】 解: $f(\sqrt{2}) = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$;

故答案为: $3\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查求函数值, 分母有理化. 正确的计算是解题的关键.

9. 当 $mn < 0$ 时, 化简 $\sqrt{m^3 n^2} =$ _____.

【答案】 $-mn\sqrt{m}$ ## $-nm\sqrt{m}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质即可求出答案.

【详解】 解: $\because mn < 0$,

$$\therefore \sqrt{m^3 n^2} = |mn| \sqrt{m} = -mn\sqrt{m},$$

故答案为: $-mn\sqrt{m}$.

10. 若点 $A(-1, a)$, $B(2, b)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图象上,

则 a , b 的大小关系用 “ $<$ ” 连接的结果为_____.

【答案】 $b < a$

【详解】 解: $\because k < 0$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在第二、四象限,

$\therefore$ 点 A 在第二象限, 点 B 在第四象限,

$$\therefore a > 0, \quad b < 0,$$

$$\therefore b < a.$$

故答案为: $b < a$.

11. 方程 $x(x+3) = 4(x+3)$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = -3, \quad x_2 = 4$

【解析】

【分析】先移项，使方程右边为 0，再提公因式 $(x+3)$ ，然后根据“两式相乘值为 0，这两式中至少有一式值为 0”进行求解.

【详解】解：原方程可化为： $x(x+3)-4(x+3)=0$ ，

因式分解得： $(x+3)(x-4)=0$ ，

所以 $x+3=0$ 或 $x-4=0$ ，

解得： $x_1=-3$ ， $x_2=4$ ，

故答案为： $x_1=-3$ ， $x_2=4$.

12. 已知点 $A(4, -3)$ 和 $B(-2, m)$ 均在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ (k 为常数，且 $k\neq 0$) 上，则 $m=$ _____.

【答案】6

【分析】先根据点 A 的坐标求出双曲线的解析式，然后将点 B 代入双曲线解析式中即可求解.

【详解】解： $\because$ 点 $A(4, -3)$ 在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ (k 为常数，且 $k\neq 0$) 上，

$$\therefore -3 = \frac{k}{4},$$

解得 $k=-12$ ，

$$\therefore y = -\frac{12}{x}.$$

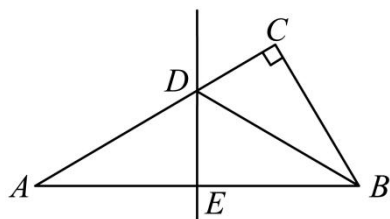
$\because$ 点 $B(-2, m)$ 在双曲线 $y = -\frac{12}{x}$ 上，

$$\therefore m = -\frac{12}{-2} = 6.$$

故答案为：6.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A=30^\circ$ ，边 AB 的垂直平分线 DE 交 AC 于 D ，

若 $CD=10\text{cm}$ ，则 $AD=$ _____ cm .



【答案】 20

【分析】 根据三角形的内角和定理可求出 $\angle ABC=60^\circ$ ，再根据线段垂直平分线的性质，可得 $AD=BD$ ，再根据等腰三角形的性质可得 $\angle ABD=30^\circ$ ，从而得到 $\angle CBD=30^\circ$ ，再根据 30° 角所对的直角边等于斜边的一半，得到 $BD=2DC$ ，从而求出 AD 的长度.

【详解】 解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A=30^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC=60^\circ$ ，

$\because$ 边 AB 的垂直平分线 DE 交 AC 于 D ，

$\therefore AD=BD$ ，

$\therefore \angle ABD=30^\circ$ ，

$\therefore \angle CBD=30^\circ$.

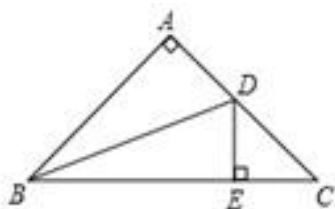
$\therefore BD=2CD=20\text{cm}$.

$\therefore AD=BD=20\text{cm}$.

故答案为 20cm.

14 . 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle A=90^\circ$ ， $AB=AC$ ， BD 平分 $\angle ABE$ ， $DE \perp BC$ ，

如果 $BC=10\text{cm}$ ， 则 $\triangle DEC$ 的周长是_____cm.



【答案】 10

【详解】 $\because BD$ 平分 $\angle ABE$ ， $DE \perp BC$ ， $\angle A=90^\circ$ ，

$$\therefore DE=AD, \quad \angle ABD=\angle CBD,$$

$$\therefore CD+DE=AC,$$

在 $\triangle BAD$ 与 $\triangle BED$ 中, $\triangle BAD \cong \triangle BED$ (HL),

$$\therefore AB=BE,$$

$$\therefore \triangle DEC \text{ 的周长} = CD+DE+CE = AC+CE = AB+CE = BE+CE = BC,$$

$$\because BC=10\text{cm},$$

$$\therefore \triangle DEC \text{ 的周长} = 10\text{cm}.$$

故答案为 10

15. 在实数范围内分解因式 $2x^2 + 3x - 1 = \text{-----}$.

【答案】 $2\left(x - \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right)$

【解析】

【分析】先求出方程的两个根, 再因式分解.

【详解】 $\because 2x^2 + 3x - 1 = 0$ 的根为 $x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4},$

$$\therefore 2x^2 + 3x - 1 = 2\left(x - \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right).$$

故答案为: $2\left(x - \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right).$

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 40^\circ$, AB 的垂直平分线 MN 交 AC 于点 D ,

则 $\angle DBC = \text{-----}$ 度.

【答案】 30

【解析】

【分析】先根据线段垂直平分线的性质得到 $AD = BD$, 再根据等腰三角形的性质求解即可.

【详解】解：∵ AB 的垂直平分线 MN 交 AC 于点 D ， $\angle A = 40^\circ$ ，

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle A = 40^\circ,$$

∵ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 40^\circ$ ，

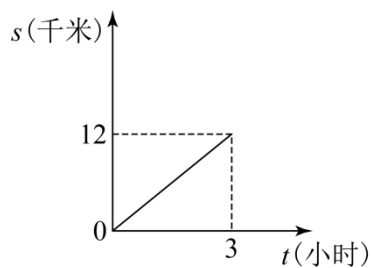
$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ,$$

故答案为：30.

17. 如图，某人从甲地行走到乙地的路程 S （千米）与时间 t （小时）的函数关系如图所示，

那么此人行走 5 千米，所用的时间是_____小时.



【答案】1.25

【解析】

【分析】根据速度=路程÷时间求出行驶的速度，再根据时间=路程÷速度进行计算即可得解.

【详解】解：由图可知，速度 $= 12 \div 3 = 4$ 千米/时，

所以，行走 5 千米所用的时间 $= 5 \div 4 = 1.25$ 小时.

故答案为：1.25.

【点睛】本题考查了函数图象，准确识图，确定出路程和时间然后求出此人的速度是解题的关键.

18. $A(3, -1)$ 、 $B(1, 2)$ 、 $C(6, 1)$ 是三角形的三个顶点，则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.

【答案】等腰直角

【解析】

【分析】 求出 AB, AC, BC 的长，再利用勾股定理逆定理，进行求解即可.

【详解】 解: $\because AB = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{(6-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}$,

$$AC = \sqrt{(6-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore AB = AC, AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形;

故答案为: 等腰直角.

19. 关于 x 的方程 $x^2 - k(x+1) + x = 0$ 有实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 任意实数

【解析】

【分析】 利用一元二次方程根的判别式求解即可.

【详解】 解: 方程 $x^2 - k(x+1) + x = 0$ 整理得 $x^2 - (k-1)x - k = 0$,

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - k(x+1) + x = 0$ 有实数根,

$$\therefore \Delta = (k-1)^2 + 4k = (k+1)^2 \geq 0,$$

$\therefore k$ 的取值范围是任意实数,

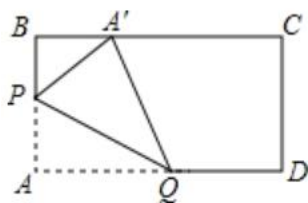
故答案为: 任意实数.

20. 动手操作: 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=3, AD=5$.

如图所示, 折叠纸片, 使点 A 落在 BC 边上的 A' 处, 折痕为 PQ ,

当点 A' 在 BC 边上移动时, 折痕的端点 P, Q 也随之移动.

若限定 P, Q 分别在 AB, AD 边上移动, 则点 A' 在 BC 边上可移动的最大距离为_____.

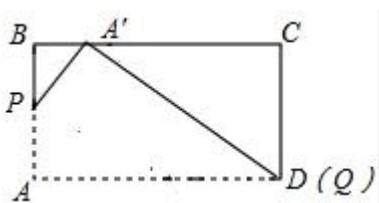


【答案】2

【解析】

【详解】解：当点 P 与 B 重合时， BA' 取最大值是 3，

当点 Q 与 D 重合时（如图），



由勾股定理得 $A'C=4$ ，此时 BA' 取最小值为 1.

则点 A' 在 BC 边上移动的最大距离为 $3-1=2$.

三、简答题（本大题共 4 小题，每题 6 分，满分 24 分）

21. 计算： $\sqrt{18} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

【答案】 $-5+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】直接利用二次根式的乘除运算法则化简，先算乘除，再利用二次根式的加减运算法则计算得出答案.

【详解】解： $\sqrt{18} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

$$= 3\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{4} - |\sqrt{3}-2|$$

$$= 3\sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2 + \sqrt{3}$$

$$= -5 + \sqrt{3}.$$

22. 用适当的方法解下列方程

$$(1) x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$(2) (x+6)^2 = 5(x+6)$$

【答案】 (1) $x_1 = \sqrt{7} - 2, x_2 = -\sqrt{7} - 2$

(2) $x_1 = -1, x_2 = -6$

【分析】 本题考查解一元二次方程，运用合适的解法求解即可，掌握解一元二次方程的常见方法是解题的关键.

(1) 运用配方法求解即可；

(2) 运用因式分解法求解即可.

【详解】 (1) 解：移项得： $x^2 + 4x = 3$,

配方得： $x^2 + 4x + 4 = 3 + 4$,

即： $(x+2)^2 = 7$,

开方得： $x+2 = \pm\sqrt{7}$,

$\therefore x_1 = \sqrt{7} - 2, x_2 = -\sqrt{7} - 2$;

(2) 移项得： $(x+6)^2 - 5(x+6) = 0$,

因式分解得： $(x+6-5)(x+6) = 0$, 即 $(x+1)(x+6) = 0$,

$\therefore x+1 = 0$ 或 $x+6 = 0$,

解得： $x_1 = -1, x_2 = -6$.

23. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (3m-1)x + 2m-1 = 0$ ，其根的判别式的值为 1，求 m 的值及该方程的根.

【答案】 $m = 2$ ， $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 1$

【解析】

【分析】 根据根的判别式的值为 1，求出 m 的值，再利用求根公式进行求解即可.

【详解】 解：由题意，得： $\Delta = b^2 - 4ac = [-(3m-1)]^2 - 4m(2m-1) = 1$ ，

整理，得： $m^2 - 2m = 0$ ，

解得： $m = 0$ （不合题意，舍去）或 $m = 2$ ；

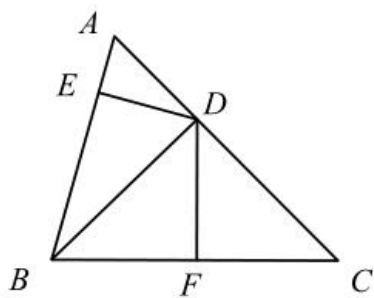
$\therefore$ 一元二次方程化为： $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ，

$\therefore \Delta = 1 > 0$ ，

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm 1}{4},$$

$$\therefore x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 1.$$

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BD \perp AC$ ，垂足为点 D ， $DE \perp AB$ ，垂足为点 E ， $DF \perp BC$ ，垂足为点 F ，
且点 F 是 BC 中点，若 $BD = 6$ ， $DE = 3$ ， $DF = 3\sqrt{2}$ 。



(1) 求 CD 的长；

(2) 求 $\angle ABC$ 的度数.

【答案】 (1) $CD = 6$

(2) $\angle ABC = 75^\circ$

【分析】(1) 在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中，勾股定理得出 $BF = 3\sqrt{2}$ ，继而得出 $BC = 6\sqrt{2}$ ，在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中，勾股定理求得 DC 的长；

(2) 取 BD 的中点，连接 EG ，根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，得出 $EG = \frac{1}{2}BD = GD = 3$ ，进而得出 $\triangle EGD$ 是等边三角形，根据直角三角形的两个锐角互余得出 $\angle ABD = 30^\circ$ ，根据 (1) 的结论得出 $\triangle BDC$ 是等腰直角三角形，根据 $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ 即可求解。

【详解】(1) 解： $\because DF \perp BC$ ，

$$\therefore \angle BFD = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中， $BD = 6$ ， $DF = 3\sqrt{2}$ ，

$$\therefore BF = \sqrt{BD^2 - DF^2} = 3\sqrt{2}$$

又 $\because$ 点 F 是 BC 中点，

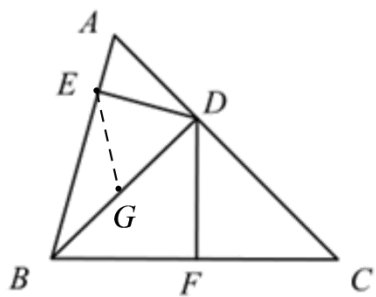
$$\therefore BC = 6\sqrt{2},$$

$$\because BD \perp AC$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中， $DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 6$ ，

(2) 解：如图，取 BD 的中点，连接 EG ，



$$\because DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中， $BD = 6$ ， $DE = 3$ ，

$$\therefore EG = \frac{1}{2}BD = GD = 3$$

$$\therefore ED = EG = GD$$

$\therefore \triangle EGD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BDE = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\because BD = DC = 6, \angle BDC = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle BDC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle DBC = 45^\circ,$$

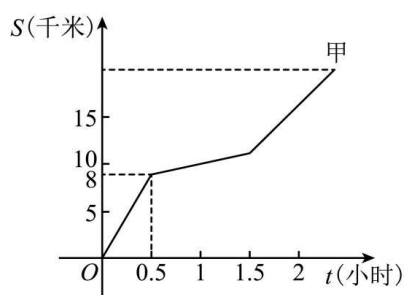
$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$$

四、解答题 (本大题共 3 题, 25、26、27 题每题 8 分, 28 题 12 分, 满分 36 分)

25. 在全民健身环城越野赛中, 甲乙两位选手都完成了比赛,

甲的行程 s (千米) 随时间 t (小时) 变化的图象 (全程)

如图所示; 乙的行程 s (千米) 随时间 t (小时) 的函数解析式为 $S = 10t$ ($0 \leq t \leq 2$).



(1) 在图中画出乙的行程 S (千米) 随时间 t (小时) 的函数图象;

(2) 环城越野赛的全程是_____千米;

(3) 甲前 0.5 小时的速度是_____千米/小时;

(4) 甲和乙出发 1 小时后相遇, 相遇时甲的速度是_____千米/小时.

【答案】(1) 图见解析

(2) 20 (3) 16

(4) 4

【解析】

【分析】(1) 根据两点确定一条直线，进行作图即可；

(2) 根据乙的图象，求出 $t = 2$ 时， S 的值即可；

(3) 结合图象，利用路程除以时间进行求解即可；

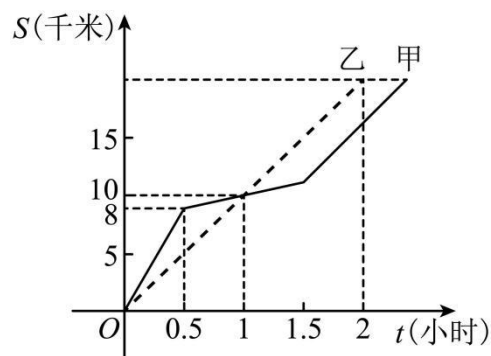
(4) 结合图象，利用路程除以时间进行求解即可；

【小问 1 详解】

解：∵ $S = 10t$ ，($0 \leq t \leq 2$)，当 $t = 0$ 时， $S = 0$ ，当 $t = 1$ 时， $S = 10$ ，

∴ 乙的行程 S (千米) 随时间 t (小时) 的函数图象经过点 $(0, 0)$, $(1, 10)$ ，

画出图象如下：



【小问 2 详解】

∵ $S = 10t$ ，($0 \leq t \leq 2$)，

∴ 当 $t = 2$ 时， $S = 20$ ，

即：环城越野赛的全程是 20 千米；

故答案为：20；

【小问 3 详解】

由图象可知：甲前 0.5 小时的速度是 $8 \div 0.5 = 16$ 千米/小时；

故答案为：16；

【小问4详解】

由图象可知：相遇时甲的速度是 $(10-8) \div (1-0.5) = 4$ 千米/小时；

故答案为：4.

26. 超市销售某种商品，平均每天可售出20件，每件盈利40元，为了扩大销售，

增加盈利该店采取了降价措施，在让顾客得到更大实惠的前提下，经过一段时间销售，

发现销售单价每降低1元，平均每天可多售出2件.

(1)若降价6元，则平均每天销售数量为多少件；

(2)当每件商品降价多少元时，该商店每天销售利润为1200元？

【答案】 (1)32件；

(2)20.

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

(1) 利用平均每天的销售量 = $20 + 2 \times$ 每件商品降低的价格，即可求出结论；

(2) 设每件商品降价 x 元，则每件盈利 $(40-x)$ 元，平均每天可售出 $(20+2x)$ 元，利用总利润 = 每件盈利 $\times$ 平均每天的销售量，即可得出关于 x 的一元二次方程，解之即可得出 x 的值，再结合在让顾客得到更大实惠的前提下，即可得出每件商品应降价20元.

【详解】 (1) 根据题意得： $20 + 6 \times 2 = 32$ (件)，

答：平均每天销售数量为32件；

(2) 设每件商品降价 x 元，则每件盈利 $(40-x)$ 元，平均每天可售出 $(20+2x)$ 元，依题意得：

$$(40-x)(20+2x)=1200,$$

$$\text{整理得： } x^2 - 30x + 200 = 0,$$

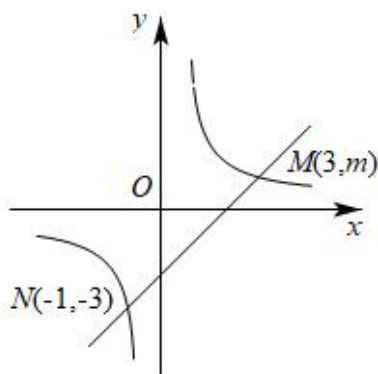
解得: $x_1 = 10$, $x_2 = 20$,

又要让顾客得到更大实惠,

$\therefore x = 20$.

答: 当每件商品降价 20 元时, 该商店每天销售利润为 1200 元.

27. 如图, 一次函数 $y = ax + b$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像交于 M 、 N 两点



(1) 利用图中条件, 求反比例函数和一次函数的解析式;

(2) 连接 OM 、 ON , 求三角形 OMN 的面积

(3) 连接 OM , 在 x 轴的正半轴上是否存在点 Q , 使 $\triangle MOQ$ 是等腰三角形,

若存在, 请直接写出所有符合条件的点 Q 的坐标, 若不存在, 说明理由

【答案】(1) 反比例函数的解析式是 $y = \frac{3}{x}$, 一次函数的解析式是 $y = x - 2$.

(2) 三角形 MON 的面积是 4.

(3) 所有符合条件的点 Q 的坐标是 $(\sqrt{10}, 0)$ 或 $(6, 0)$ 或 $(\frac{5}{3}, 0)$.

【分析】(1) 把 N 的坐标代入反比例函数, 能求出反比例函数解析式, 把 M 的坐标代入解析式, 求出 M 的坐标, 把 M 、 N 的坐标代入 $y = ax + b$, 能求出一次函数的解析式;

(2) 求出 MN 与 x 轴的交点坐标, 求出 $\triangle MOC$ 和 $\triangle NOC$ 的面积即可;

(3) 符合条件的有 3 个① $OM = OQ$, ② $OM = MQ$, ③ $MO = OQ$, 再利用勾股定理列方程求解即可.

【详解】(1) 解: 把 $N(-1, -3)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得: $k = -1 \times (-3) = 3$,

$$\therefore y = \frac{3}{x},$$

把 $M(3, m)$ 代入得: $m = 1$,

$$\therefore M(3, 1),$$

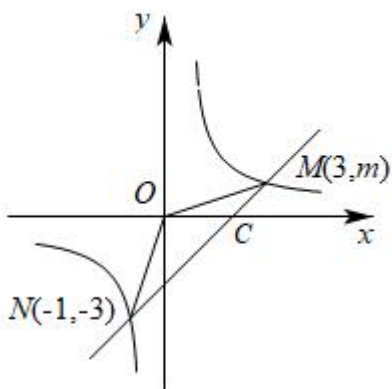
把 $N(-1, -3)$, $M(3, 1)$ 代入 $y = ax + b$ 得:
$$\begin{cases} -a + b = -3 \\ 3a + b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases},$$

$$\therefore y = x - 2,$$

答: 反比例函数的解析式是 $y = \frac{3}{x}$, 一次函数的解析式是 $y = x - 2$.

(2) 如图, 设 MN 交 x 轴于 C ,



由 $y = x - 2$, 当 $y = 0$ 时, $x = 2$,

$$\therefore C(2, 0), \quad OC = 2,$$

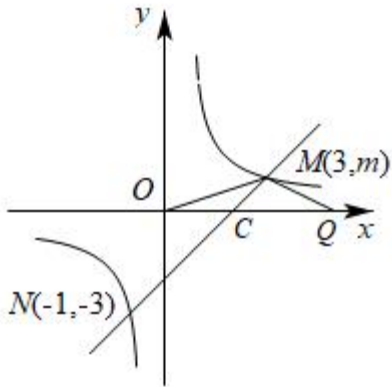
$$\therefore \triangle MON \text{ 的面积是 } = S_{\triangle MOC} + S_{\triangle NOC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 4,$$

答: 三角形 MON 的面积是 4.

(3) 设 $Q(x,0)(x>0)$ ，而 $M(3,1)$ ， $O(0,0)$ ，

$$\therefore QO^2 = x^2, \quad MO^2 = 3^2 + 1^2 = 10, \quad QM^2 = (x-3)^2 + 1^2 = (x-3)^2 + 1,$$

如图， $\triangle MOQ$ 为等腰三角形，



当 $OM = OQ$ 时，则 $x^2 = 10$ ，

$$\therefore x = \sqrt{10} \quad (\text{负根舍去})$$

Q 的坐标是 $(\sqrt{10}, 0)$ ；

当 $OM = MQ$ 时，则 $(x-3)^2 + 1 = 10$ ，

解得： $x = 6$ ($x = 0$ 舍去)

Q 的坐标是 $(6, 0)$ ；

当 $OQ = QM$ 时，则 $x^2 = (x-3)^2 + 1$ ，

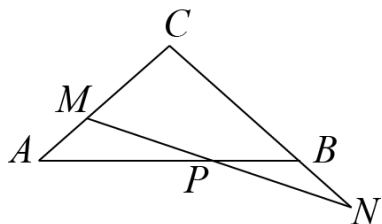
$$\text{解得： } x = \frac{5}{3},$$

Q 的坐标是 $(\frac{5}{3}, 0)$ ；

答：在 x 轴的正半轴上存在点 Q ，使 $\triangle MOQ$ 是等腰三角形，

所有符合条件的点 Q 的坐标是 $(\sqrt{10}, 0)$ 或 $(6, 0)$ 或 $(\frac{5}{3}, 0)$ 。

28. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=BC=4$, 点 M 是边 AC 上一动点 (与点 A 、 C 不重合), 点 N 在边 CB 的延长线上, 且 $AM=BN$, 连接 MN 交边 AB 于点 P .



- (1) 求证: $MP=NP$;
- (2) 若设 $AM=x$, $BP=y$, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出它的定义域;
- (3) 当 $\triangle BPN$ 是等腰三角形时, 求 AM 的长.

【答案】(1) 见解析

(2) y 与 x 之间的函数关系式为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2}$, 它的定义域是 $0 < x < 4$

(3) $4\sqrt{2} - 4$

【分析】(1) 过点 M 作 $MD \parallel BC$ 交 AB 于点 D , 求出 $DM=BN$, 证 $\triangle MDP \cong \triangle NBP$ 即可;

(2) 求出 AB , 根据 $\triangle MDP \cong \triangle NBP$ 推出 $DP=BP$, 推出方程 $\sqrt{2}x + y + y = 4\sqrt{2}$ 即可;

(3) 求出 $BP=BN$, 所得方程的解即可.

【详解】(1) 证明: 过点 M 作 $MD \parallel BC$ 交 AB 于点 D ,

$$\because MD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle MDP = \angle NBP,$$

$$\because AC=BC, \angle C=90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\because MD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADM = \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADM = \angle A,$$

$$\therefore AM=DM.$$

$$\therefore AM=BN,$$

$$\therefore BN=DM,$$

在 $\triangle MDP$ 和 $\triangle NBP$ 中

$$\begin{cases} \angle MDP = \angle NBP \\ \angle MPD = \angle NPB, \\ DM = BN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MDP \cong \triangle NBP,$$

$$\therefore MP=NP.$$

(2) 解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中,

$$\therefore \angle C=90^\circ, AC=BC=4,$$

$$\therefore AB=4\sqrt{2}.$$

$$\therefore MD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AMD = \angle C = 90^\circ.$$

在 $Rt\triangle ADM$ 中, $AM=DM=x$,

$$\therefore AD = \sqrt{2}x.$$

$$\therefore \triangle MDP \cong \triangle NBP,$$

$$\therefore DP=BP=y,$$

$$\therefore AD+DP+PB=AB,$$

$$\therefore \sqrt{2}x + y + y = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{所求的函数解析式为 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2},$$

定义域为 $0 < x < 4$.

答: y 与 x 之间的函数关系式为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2}$, 它的定义域是 $0 < x < 4$.

(3) 解: $\because \triangle MDP \cong \triangle NBP$,

$$\therefore BN = MD = x.$$

$$\because \angle ABC + \angle PBN = 180^\circ, \quad \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PBN = 135^\circ.$$

$\therefore$ 当 $\triangle BPN$ 是等腰三角形时, 只有 $BP = BN$, 即 $x = y$.

$$\therefore x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2},$$

$$\text{解得 } 4\sqrt{2} - 4,$$

$\therefore$ 当 $\triangle BPN$ 是等腰三角形时, AM 的长为 $4\sqrt{2} - 4$.

答: AM 的长为 $4\sqrt{2} - 4$.

