

八年级数学

(满分 100 分, 考试时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{\frac{1}{8}}$

B. $\sqrt{2\frac{1}{2}}$

C. $\sqrt{0.2}$

D. $\sqrt{12}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是同类二次根式的定义, 一般地, 把几个二次根式化为最简二次根式后, 如果它们的被开方数相同, 就把这几个二次根式叫做同类二次根式, 据此先化简二次根式, 再根据同类二次根式的定义判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 符合题意;

B、 $\sqrt{2\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 不符合题意;

C、 $\sqrt{0.2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 不符合题意;

D、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 不符合题意;

故选 A.

2. 下列方程是关于 x 的一元二次方程的是 ()

A. $x^2 - 2x = \frac{1}{x}$

B. $x(x-2) = x^2$

C. $x^2 = 3(x+2)$

D. $ax^2 + bx + c = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义逐项判断即可得.

【详解】A、方程 $x^2 - 2x = \frac{1}{x}$ 中的 $\frac{1}{x}$ 不是整式, 不满足一元二次方程的定义, 此项不符合题意;

B、方程 $x(x-2) = x^2$ 可整理为 $-2x = 0$, 是一元一次方程, 此项不符合题意;

C、方程 $x^2 = 3(x+2)$ 满足一元二次方程的定义, 此项符合题意;

D、当 $a=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 不是一元二次方程，此项不符题意；

故选：C.

【点睛】 本题考查了一元二次方程，熟记一元二次方程的概念是解题关键.

3. 在实数范围内因式分解 $2x^2-3xy-y^2$ ，下列四个答案中正确的是 ()

A. $(x-\frac{3+\sqrt{17}}{4}y)(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}y)$

B. $(x+\frac{3+\sqrt{17}}{4}y)(x+\frac{3-\sqrt{17}}{4}y)$

C. $2(x-\frac{3+\sqrt{17}}{4}y)(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}y)$

D. $2(x+\frac{3+\sqrt{17}}{4}y)(x+\frac{3-\sqrt{17}}{4}y)$

【答案】 C

【解析】

【分析】 从题中可以看出多项式非一般方法可以解出，可以将式子变成关于 x 的一元二次方程进行求解，之后再代入因式分解的形式中即可.

【详解】 解： 令 $2x^2-3xy-y^2=0$ ， 解得 $x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4}y$ ， $x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4}y$ ，

所以 $2x^2-3xy-y^2=2(x-\frac{3+\sqrt{17}}{4}y)(x-\frac{3-\sqrt{17}}{4}y)$ ，

故选：C.

【点睛】 本题主要考查的是利用特殊方法进行因式分解，掌握一元二次方程的求解方法是解题的关键.

4. 下列命题中，原命题与其逆命题均为真命题的有 () 个

- ①全等三角形对应边相等； ②全等三角形对应角相等；
③等腰三角形两条腰上的高相等； ④如果两个实数相等，那么它们的平方相等；
⑤两条平行直线被第三条直线所截，截得的同旁内角的角平分线互相垂直.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查真假命题、逆命题及等腰三角形的性质、实数的性质. 本题考查了首先写出各个命题的逆命题，再进一步判断真假即可.

【详解】 解： ①全等三角形对应边相等，原命题是真命题；

逆命题为：对应边相等的两个三角形全等，逆命题不是真命题；

②全等三角形对应角相等，原命题是真命题；

逆命题为：对应角相等的两个三角形全等，逆命题不是真命题；

③等腰三角形两条腰上的高相等，原命题是真命题；

逆命题为：有两条高相等的三角形是等腰三角形，逆命题是真命题；

④如果两个实数相等，那么它们的平方相等，原命题是真命题；

逆命题为：如果两个实数的平方相等，那么它们相等的平方相等，逆命题不是真命题；

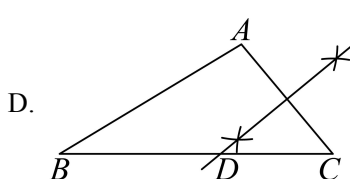
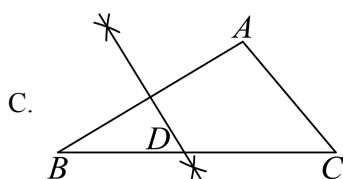
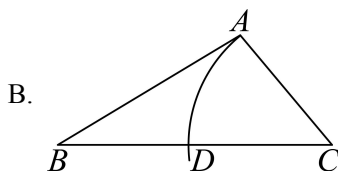
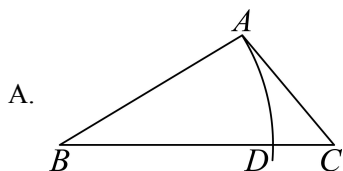
⑤两条平行直线被第三条直线所截，截得的同旁内角的角平分线互相垂直，原命题是真命题；

逆命题为：两条直线被第三条直线所截，截得的同旁内角的角平分线互相垂直，则这两条直线平行，逆命题是真命题。

原命题与其逆命题均为真命题的有③⑤，共 2 个。

故选：A.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC < AB < BC$ ，如果要用尺规作图的方法在 BC 上确定一点 D ，使 $AD + BD = BC$ ，那么符合要求的作图痕迹是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了线段垂直平分线定理的逆定理以及尺规作图——作线段的垂直平分线. 由 $AD + BD = BC$ 和 $CD + BD = BC$ 可得，点 D 在线段 AC 的垂直平分线上，因此这道题就转化成了作线段 AC 的垂直平分线，与 BC 的交点即为点 D .

【详解】 $\because AD + BD = BC$ ，而 $DC + BD = BC$ ，

$\therefore DA = DC$ ，

$\therefore$ 点 D 在线段 AC 的垂直平分线上，

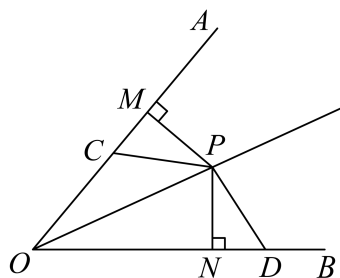
即点 D 为线段 AC 的垂直平分线与 BC 的交点.

观察四个选项，D 选项符合题意，

故选：D.

6. 如图， C 、 D 两点分别在射线 OA 、 OB 上，点 P 在 $\angle AOB$ 的内部，且 $CP = DP$ ， $PM \perp OA$ ， $PN \perp OB$ ，

垂足分别为点 M 、 N ，且 $CM = DN$ ，若 $DN = 3, CO = 7$ ，则 DO 的长为 ()



A. 10

B. 13

C. 15

D. 17

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的性质与判定，先证明 $\text{Rt}\triangle PCM \cong \text{Rt}\triangle PDN$ (HL) 得到 $PM = PN$ ， $CM = DN = 3$ ，则 $OM = CO + CM = 10$ ，进一步证明 $\text{Rt}\triangle OPC \cong \text{Rt}\triangle OPN$ (HL) 得到 $ON = OM = 10$ ，则 $DO = ON + DN = 13$.

【详解】 解： $PM \perp OA, PN \perp OB$ ，

$$\therefore \angle PMC = \angle PND = 90^\circ,$$

$$\because CP = DP, CM = DN,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle PCM \cong \text{Rt}\triangle PDN (\text{HL}),$$

$$\therefore PM = PN, CM = DN = 3,$$

$$\therefore OM = CO + CM = 10,$$

$$\because PM = PN, OP = OP,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OPC \cong \text{Rt}\triangle OPN (\text{HL}),$$

$$\therefore ON = OM = 10,$$

$$\therefore DO = ON + DN = 13,$$

故选 B.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 若式子 $\sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 5$

【解析】

【分析】 先根据二次根式有意义的条件列出关于 x 的不等式，求出 x 的取值范围即可.

【详解】 $\because \sqrt{x-5}$ 在实数范围内有意义，

$\therefore x-5 \geq 0$, 解得 $x \geq 5$.

故答案为: $x \geq 5$

【点睛】此题考查了二次根式有意义的条件, 二次根式 $\sqrt{a}$ 有意义的条件是被开方数 $a \geq 0$, 同时也考查了解一元一次不等式.

8. 方程 $x(x-1) = 3(x-1)$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

【解析】

【分析】先移项, 再根据因式分解法, 可得答案.

【详解】解: 移项, 得:

$$x(x-1) - 3(x-1) = 0,$$

因式分解, 得:

$$(x-1)(x-3) = 0,$$

$$\therefore x-3 = 0 \text{ 或 } x-1 = 0,$$

解得: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

故答案为: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

【点睛】本题考查解一元二次方程, 利用因式分解法解一元二次方程的关键是分解因式.

9. 若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 1$ 且 $k \neq 0$

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义和根的判别式列不等式组求解即可.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4k > 0 \text{ 且 } k \neq 0,$$

解得 $k < 1$ 且 $k \neq 0$.

故答案为: $k < 1$ 且 $k \neq 0$.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的定义、一元二次方程根的判别式等知识点, 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则方程有两个不相等的实数根是解答本题的关键.

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}}$, 那么 $f(3) =$ _____.

【答案】 $2-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求函数值, 分母有理化, 根据题意把 $x=3$ 代入 $\frac{1}{2+\sqrt{x}}$ 进行求解即可.

【详解】 解: $\because f(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}}$,

$$\therefore f(3) = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3},$$

故答案为: $2-\sqrt{3}$.

11. 在正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 中, 当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y = \sqrt{2}$ 那么 $k =$ _____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查了求正比例函数解析式, 二次根式的除法计算, 根据当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y = \sqrt{2}$ 得到

$$\frac{\sqrt{2}}{2}k = \sqrt{2}, \text{ 由此可得 } k = 2.$$

【详解】 解: $\because$ 在正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 中, 当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $y = \sqrt{2}$,

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}k = \sqrt{2},$$

$$\therefore k = 2,$$

故答案为: 2.

12. 如果反比例函数 $y = \frac{m-3}{x}$ 的图像, 在 $x < 0$ 的范围内, y 随 x 们增大而减小, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了反比例函数图象的性质，对于反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，当 $k > 0$ 时，其函数图象经过第一、三象限，在每个象限内 y 随 x 增大而减小，当 $k < 0$ 时，其函数图象经过第二、四象限，在每个象限内 y 随 x 增大而增大，据此可得 $m-3 > 0$ ，解之即可得到答案.

【详解】 解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{m-3}{x}$ 的图像，在 $x < 0$ 的范围内， y 随 x 们增大而减小，

$$\therefore m-3 > 0,$$

$$\therefore m > 3,$$

故答案为： $m > 3$.

13. 经过定点 P ， Q 的圆的圆心的轨迹是_____.

【答案】 直线

【解析】

【分析】 本题主要考查了线段垂直平分线的判定，由于该圆圆心到点 P 和到点 Q 的距离相等，则到线段两端的距离相等的点在线段的垂直平分线上，据此可得经过定点 P ， Q 的圆的圆心的轨迹是直线.

【详解】 解： $\because$ 一个圆经过定点 P ， Q ，

$\therefore$ 该圆圆心到点 P 和到点 Q 的距离相等，

$\therefore$ 该圆圆心在线段 PQ 的垂直平分线上，

$\therefore$ 经过定点 P ， Q 的圆的圆心的轨迹是直线，

故答案为： 直线.

14. 如果一个直角三角形的一个内角等于 30° ， 其中一条较长的直角边长为 3， 那么斜边的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据较长的直角边长为 3， 直角三角形的一个内角等于 30° ， 可设 30° 所对的边长为 x ， 然后根据勾股定理可得斜边的长

【详解】 $\because$ 直角三角形的一个内角等于 30° ， 其中一条较长的直角边长为 3，

$\therefore$ 较长的直角边对应的角度是 60° ，

$\therefore$ 设 30° 所对的边长为 x ， 则斜边长为： $2x$ ，

根据勾股定理得： $3^2 + x^2 = (2x)^2$ ，

解得: $x = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 斜边长为: $2\sqrt{3}$,

故答案为: $2\sqrt{3}$

【点睛】 本题主要考查了勾股定理在解直角三角形中的应用, 熟练掌握勾股定理是解题的关键

15. 已知正比例函数 $y_1 = k_1 x$ 和反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ 的比例系数 k_1 和 k_2 互为倒数, 且正比例函数的图象经过点 $(2, 1)$. 如果 $y = y_1 - y_2$, 那么当 $x = -1$ 时, y 的值是_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求正比例函数解析式, 求反比例函数值和求正比例函数值, 利用待定系数法求出 $k_1 = \frac{1}{2}$, 进而求出 $k_2 = 2$, 则 $y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x}$, 再把 $x = -1$ 代入 $y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x}$ 中求出 y 的值即可.

【详解】 解: $\because$ 正比例函数 $y_1 = k_1 x$ 图象经过点 $(2, 1)$,

$$\therefore 1 = 2k_1,$$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y_1 = \frac{1}{2}x$$

$\because$ 正比例函数 $y_1 = k_1 x$ 和反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ 的比例系数 k_1 和 k_2 互为倒数,

$$\therefore k_2 = 2,$$

$$\therefore y_2 = \frac{2}{x}$$

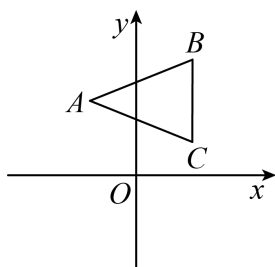
$$\therefore y = y_1 - y_2,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{2}{x},$$

$$\therefore \text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = \frac{1}{2} \times (-1) - \frac{2}{-1} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2},$$

故答案为: $\frac{3}{2}$.

16. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 13$, 点 B 、 C 们坐标分别是 $(8, 12)$ 、 $(8, 2)$, 则点 A 的坐标是_____.

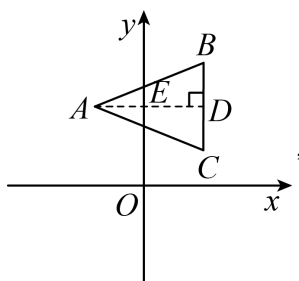


【答案】 $(-4,7)$

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质，勾股定理，坐标与图形. 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D，AD 与 y 轴交于点 E，根据等腰三角形的性质得出 $BD = CD = 5$ ，再根据勾股定理可以得出 $AD = 12$ ，从而即可得到答案.

【详解】 解： 如图所示，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D，AD 与 y 轴交于点 E，



$\because$ 点 B，C 的坐标分别是 $(8,12)$ ， $(8,2)$ ，

$\therefore BC = 10$ ， $DE = 8$ ，

$\because AB = AC = 13$ ， $AD \perp BC$ ，

$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ ，

$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ ，

$\therefore AE = AD - DE = 12 - 8 = 4$ ， $OE = 2 + 5 = 7$ ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为： $(-4,7)$ ，

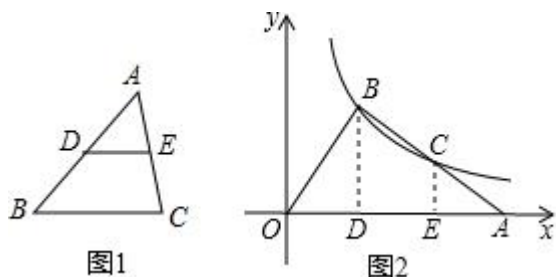
故答案为： $(-4,7)$ 。

17. 连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线，三角形的中位线性质：三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半.如图 1， $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 AB、AC 的中点，则 $DE \parallel BC$ ，且 $DE = \frac{1}{2}BC$ 。

试用三角形中位线的性质解决下列问题：如图 2，函数 $y = \frac{12}{x} (x > 0)$ 的图像经过 $\triangle OAB$ 的顶点和边的 AB 中

点 C，分别过 B、C 作 $BD \perp x$ 轴， $CE \perp x$ 轴，垂足分别为 D、E，CE 是 $\triangle ABD$ 的中位线.如果点 B 的横坐

标为3，则点C的坐标为_____.



【答案】(6,2)

【解析】

【分析】先求出点B的坐标，根据三角形的中位线得到CE=2即点C的纵坐标为2，再代入 $y = \frac{12}{x}$ 中求出点E的横坐标.

【详解】 $\because$ 点B的横坐标为3，且点B在 $y = \frac{12}{x} (x > 0)$ 上，

$\therefore$ 将 $x=3$ 代入，得 $y=4$ ，

$\therefore B(3, 4)$ ，

$\therefore BD=4$ ，

$\because CE$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore CE = \frac{1}{2}BD = 2$ ，

$\therefore$ 点C的纵坐标为2，

将 $y=2$ 代入 $y = \frac{12}{x}$ 中，得 $x=6$ ，

$\therefore C(6, 2)$ ．

故答案为：(6,2)．

【点睛】此题考查反比例函数的性质，点在反比例图象上时，点的坐标符合函数关系式，代入解析式即可确定点的横坐标或是纵坐标，解题中三角形的中位线的利用是解题的关键．

18. 已知等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AB 边的垂直平分线交直线 AC 于点 D ，若 $\angle BDC = 48^\circ$ ，则 $\angle BAC$ 的度数为_____.

【答案】 24° 或 66° 或 114°

【解析】

【分析】本题主要考查了等边对等角，线段垂直平分线的性质，三角形外角的性质，三角形内角和定理，分当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时，三种情况画出对应的图形，根据线段垂直平分线的性质得到 $AD = BD$ ，再根据等边对等角得到 $\angle BAD = \angle ABD$ ，再根据角度之间的关系进行求解即可．

【详解】解：如图所示，当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，且点 D 在线段 AC 上，

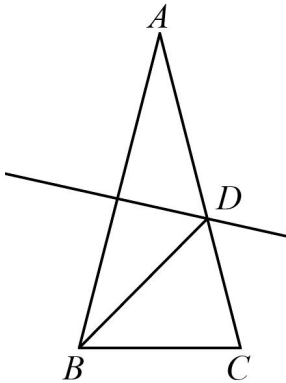
$\because$ 点 D 在线段 AB 的垂直平分线上，

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD,$$

$$\because \angle BDC = \angle A + \angle ABD = 48^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 24^\circ;$$



如图所示，当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，且点 D 在线段 AC 的延长线上，

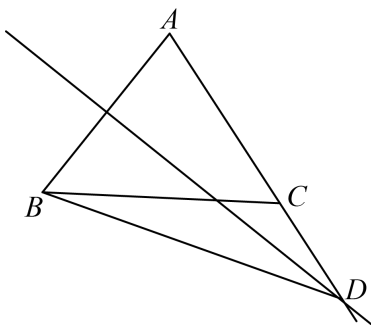
$\because$ 点 D 在线段 AB 的垂直平分线上，

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD,$$

$$\because \angle BDC + \angle A + \angle ABD = 180^\circ, \quad \angle BDC = 48^\circ$$

$$\therefore \angle A = \frac{180^\circ - \angle BDC}{2} = 66^\circ;$$



如图所示，当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时，点 D 在线段 CA 的延长线上，

$\because$ 点 D 在线段 AB 的垂直平分线上，

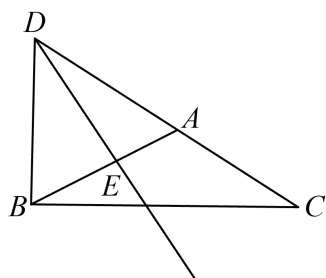
$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ABD = \frac{180^\circ - \angle BDC}{2} = 66^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle BDA = 114^\circ;$$

综上所述, $\angle BAC$ 的度数为 24° 或 66° 或 114° .

故答案为: 24° 或 66° 或 114° .



三、简答题 (本大题 5 题, 每题 6 分, 满分 30 分)

19. 计算: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 9\sqrt{\frac{1}{27}}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的混合计算, 熟知二次根式的混合计算法则是解题的关键.

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{12} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \sqrt{3}$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} - \sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3} + \frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$
$$= \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}$$
$$= 2.$$

20. 解方程: $(3x-1)^2 = 4x^2$.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 利用直接开平方法求解即可.

【详解】 解: 由题意可知:

$$3x-1=2x \text{ 或 } 3x-1=-2x,$$

解得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{5}$.

【点睛】 本题主要考查解一元二次方程的能力, 熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法: 直接开平方法、

因式分解法、公式法、配方法，结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键.

21. 某商店销售某种商品，平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元，为了扩大销售增加盈利，该商店采取了降价措施，在每件盈利不少于 25 元的前提下，经过一段时间销售，发现销售单价每降低 1 元，平均每天可多售出 2 件，当每件商品降价多少元时，该商品每天的销售利润为 1200 元？

【答案】每件商品降价 10 元时，该商品每天的销售利润为 1200 元.

【解析】

【分析】设每件商品降价 x 元，根据“平均每天可售出 20 件，每件盈利 40 元，销售单价每降低 1 元，平均每天可多售出 2 件，每件盈利不少于 25 元”列出关于 x 的一元二次方程，解之，根据实际情况，找出盈利不少于 25 元的答案即可.

【详解】解：设每件商品降价 x 元，根据题意，得

$$(40 - x)(20 + 2x) = 1200$$

解这个方程得 $x_1 = 10$ ， $x_2 = 20$

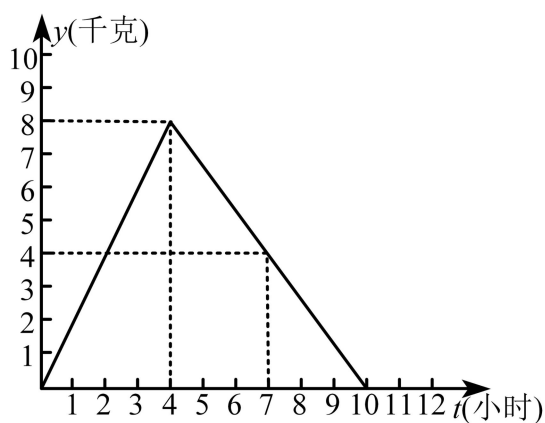
由 $40 - x \geq 25$ ，得 $x \leq 15$

的值 $x = 10$

答：每件商品降价 10 元时，该商品每天的销售利润为 1200 元.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，正确找出等量关系，列出一元二次方程是解题的关键.

22. 据医学研究,使用某种抗生素治疗心肌炎,人体内每毫升血液中的含药量不少于 4 微克时,治疗有效.如果一患者按规定剂量服用这种抗生素,服用后每毫升血液中的含药量 y (微克)与服用后的时间 t (小时)之间的函数关系如图所示:



(1)如果上午 8 时服用该药物,到___时该药物的浓度达到最大值___微克/毫升;

(2)根据图象求出从服用药物起到药物浓度最高时 y 与 t 之间的函数解析式;

(3)如果上午 8 时服用该药物,到___时该药物开始有效,有效时间一共是___小时.

【答案】(1) 12, 8; (2) $y = 2t(0 \leq t \leq 4)$; (3) 10, 5.

【解析】

【分析】(1) 根据函数图象可知, 当 $t = 4$ 时, y 取得最大值, 且最大值为 8, 即可求得本问;

(2) 根据图象可得, 从服用药物起到药物浓度最高时, y 与 t 之间的函数解析式为图象中的正比例函数那段, 将图象上 $t = 4, y = 8$ 代入即可得;

(3) 由题意, 求出 $y = 4$ 时, 在正比例函数上 t 的值, 即可解; 又因 $t = 7$ 时, $y = 4$, 所以药物有效时间总共为 $(7 - 2) = 5$ 小时.

【详解】(1) 由函数图象可知, 当 $t = 4$ 时, y 取得最大值, 且最大值为 8

则如果上午 8 时服用该药物, 到 $(8 + 4) = 12$ 时该药物的浓度达到最大值 8 微克/毫升

故答案为: 12, 8;

(2) 根据图象可得, 需要求的是 $0 \leq t \leq 4$ 时, 正比例函数那段,

设 $y = at$, 将 $t = 4, y = 8$ 代入得: $4a = 8$

解得: $a = 2$

则所求的 y 与 t 之间的函数解析式为 $y = 2t(0 \leq t \leq 4)$;

(3) 把 $y = 4$, 代入题 (2) 所求的函数解析式得 $2t = 4$, 解得 $t = 2$

从图象中可得, $t = 7$ 时, $y = 4$

由题意得 $y \geq 4$ 治疗有效

则如果上午 8 时服用该药物, 到 $(8 + 2) = 10$ 时该药物开始有效, 有效时间一共是 $(7 - 2) = 5$ 小时

故答案为: 10, 5.

【点睛】本题考查了一元一次函数的实际应用, 看懂图象、理解题意是解题关键.

23. 已知点 $P(m, 4)$ 在反比例函数 $y = -\frac{12}{x}$ 的图象上, 正比例函数的图象经过点 P 和点 $Q(6, n)$.

(1) 求正比例函数的解析式;

(2) 求 P 、 Q 两点之间的距离;

(3) 若点 M 在 y 轴上, 且 $MP = \frac{1}{3}PQ$, 则点 M 的坐标为_____ (直接写出答案)

【答案】23. 正比例函数的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x$;

24. P 、 Q 两点之间的距离为 15;

25. $(0,0)$ 或 $(0,8)$

【解析】

【分析】(1) 设正比例函数解析式为 $y = kx (k \neq 0)$ ，把点 P 的坐标代入反比例函数解析式求出 m 的值，从而得到点 P 的坐标，然后代入正比例函数解析式求解即可；

(2) 把点 Q 的坐标代入正比例函数解析式求出 n ，根据两点间的距离公式即可得到结论；

(3) 设 $M(0, m)$ ，根据题意得到 $(0+3)^2 + (m-4)^2 = 25$ ，解方程即可求解。

【小问 1 详解】

解：设正比例函数解析式为 $y = kx (k \neq 0)$ ，

$\because$ 点 $P(m, 4)$ 在反比例函数 $y = -\frac{12}{x}$ 的图象上，

$$\therefore -\frac{12}{m} = 4,$$

解得 $m = -3$ ，

$\therefore P$ 的坐标为 $(-3, 4)$ ，

$\because$ 正比例函数图象经过点 P ，

$$\therefore -3k = 4,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{4}{3},$$

$\therefore$ 正比例函数的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because$ 正比例函数图象经过点 $Q(6, n)$ ，

$$\therefore n = -\frac{4}{3} \times 6 = -8,$$

$\therefore$ 点 $Q(6, -8)$ ，

$\therefore P、Q$ 两点之间的距离为 $\sqrt{(6+3)^2 + (-8-4)^2} = 15$ ；

【小问 3 详解】

解：设 $M(0, m)$ ，

$$\because MP = \frac{1}{3}PQ,$$

$$\therefore MP = \frac{1}{3} \times 15 = 5,$$

$$\therefore MP^2 = 25, \text{ 即 } (0+3)^2 + (m-4)^2 = 25,$$

解得 $m = 0$ 或 8 ,

$\therefore M(0,0)$ 或 $(0,8)$,

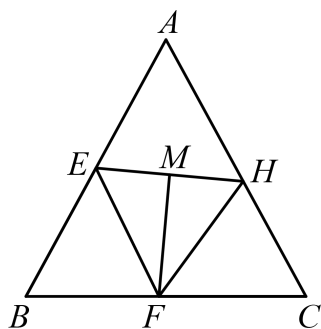
故答案为: $(0,0)$ 或 $(0,8)$.

【点睛】本题是反比例函数与一次函数的交点问题,考查了反比例函数图象上点的坐标特征,一次函数图象上点的坐标特征,待定系数法求自变量函数的解析式,反比例函数的对称性,两点间的距离,图象上点的坐标适合解析式是解题的关键.

四、解答题 (本大题 3 题, 第 24 题 5 分, 第 25 题 7 分, 第 26 题 8 分, 满分 20 分)

24. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BEF = \angle CFH$, $BE = CF$, M 是 EH 的中点.

求证: $FM \perp EH$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题主要考查全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质. 证明 $\triangle BEF \cong \triangle CFH$ (ASA), 推出 $EF = FH$, 再利用“三线合一”的性质即可求解.

【详解】证明: $\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle C$,

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle CFH$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ BE = CF \\ \angle BEF = \angle CFH \end{cases},$$

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle CFH$ (ASA),

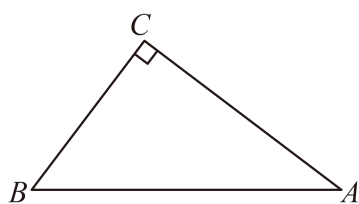
$\therefore EF = FH$,

$\because M$ 是 EH 的中点,

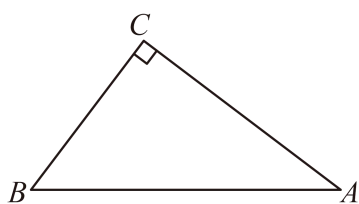
$\therefore FM \perp EH$.

25. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, 若点 P 从点 A 出发, 以每秒 1cm 的速度沿折线 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 运动, 设运动时间为 t 秒 ($t > 0$).

(请利用尺规作图, 不要求写出作法、证明和结论, 但要求保留作图痕迹并标出点 P)



图(1)



图(2)

(1) 若点 P 在 AC 上, 且满足 $PA = PB$ 时, 在图 (1) 中求作符合要求的点 P , 此时 $t =$ _____;

(2) 若点 P 恰好在 $\angle BAC$ 的角平分线上 (点 A 除外), 在图 (2) 中求作符合要求的点 P , 此时 $t =$ _____.

【答案】(1) 作图见详解, $t = \frac{25}{4}$

(2) 作图见详解, $t = \frac{32}{3}$

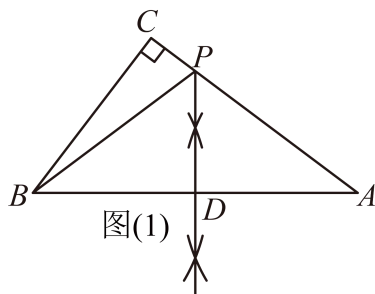
【解析】

【分析】(1) 根据中垂线性质可知, 作 AB 的垂直平分线, 与 AC 交于点 P , 则满足 $PA = PB$, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 用勾股定理计算出 $AC = 8\text{cm}$, 再用 t 表示出 $PA = t\text{cm}$, 则 $PC = (8 - t)\text{cm}$, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 利用勾股定理建立方程求 t ;

(2) 过 P 作 $PD \perp AB$ 于 D 点, 作出 $\angle BAC$ 的角平分线, 由角平分线性质可得 $PC = PD$, 由题意 $PC = (t - 8)\text{cm}$, 则 $PB = 6 - (t - 8) = (14 - t)\text{cm}$, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 利用勾股定理建立方程求 t .

【小问 1 详解】

作 AB 的垂直平分线 PD , 与 AC 交于点 P , 与 AB 交于点 D ,



图(1)

$\because PD$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore PA = PB$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$,

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 8\text{cm},$$

由题意 $PA = t\text{cm}$, $PC = (8-t)\text{cm}$,

$$\because \angle BCP = 90^\circ,$$

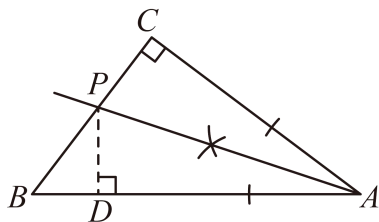
$$\therefore PC^2 + BC^2 = PB^2$$

$$\therefore (8-t)^2 + 6^2 = t^2$$

$$\therefore t = \frac{25}{4}.$$

【小问2 详解】

作 $\angle CAB$ 的平分线 AP , 过 P 作 $PD \perp AB$ 于 D 点, 如图所示,



图(2)

$\because AP$ 平分 $\angle CAB$, $PC \perp AC$, $PD \perp AB$,

$$\therefore PC = PD$$

在 $\text{Rt}\triangle ACP$ 和 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中,

$$\therefore \begin{cases} PA = PA \\ PC = PD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACP \cong \text{Rt}\triangle ADP$$

$$\therefore AD = AC = 8\text{cm},$$

$$\therefore BD = AB - AD = 10 - 8 = 2\text{cm},$$

由题意 $PD = PC = (t-8)\text{cm}$, 则 $PB = 6 - (t-8) = (14-t)\text{cm}$,

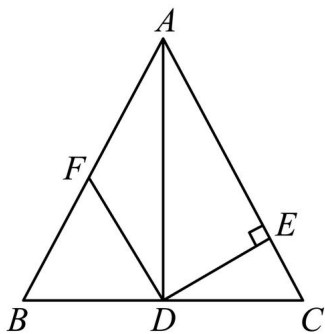
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $PD^2 + BD^2 = PB^2$,

$$\therefore (t-8)^2 + 2^2 = (14-t)^2,$$

$$\therefore t = \frac{32}{3}.$$

【点睛】 本题考查了勾股定理,垂直平分线的性质和角平分线的性质, 熟练运用垂直平分线的性质和角平分线的性质, 找出线段长度, 利用勾股定理建立方程是解本题的关键.

26. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, $DE \perp AC$ 于点 E , DF 是 $\triangle ABD$ 的中线, 且 $CE=2$, $DE=4$, $AE=8$.



(1) 求证: $\angle ADC = 90^\circ$;

(2) 求 DF 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) DF 的长为 5.

【解析】

【分析】 (1) 利用勾股定理的逆定理, 证明 $\triangle ADC$ 是直角三角形, 即可得出 $\angle ADC$ 是直角;

(2) 根据三角形的中线的定义以及直角三角形的性质解答即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because DE \perp AC$ 于点 E ,

$$\therefore \angle AED = \angle CED = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $\angle AED = 90^\circ$,

$$\therefore AD^2 = AE^2 + DE^2 = 8^2 + 4^2 = 80,$$

同理: $CD^2 = 20$,

$$\therefore AD^2 + CD^2 = 80 + 20 = 100,$$

$$\because AC = AE + CE = 8 + 2 = 10,$$

$$\therefore AC^2 = 100,$$

$$\therefore AD^2 + CD^2 = AC^2,$$

$\therefore \triangle ADC$ 是直角三角形,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ;$$

【小问 2 详解】

解: $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore AD$ 垂直平分 BC ,

$$\therefore AB = AC = 10,$$

在 $Rt\triangle ADB$ 中, $\angle ADB = 90^\circ$,

$\because$ 点 F 是边 AB 的中点,

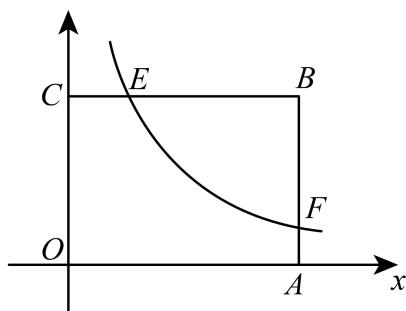
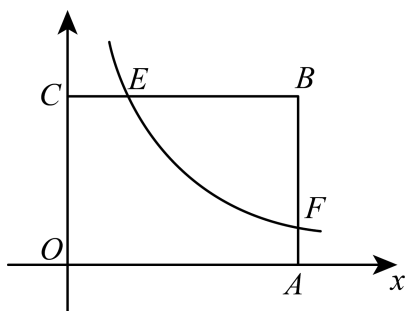
$$\therefore DF = \frac{1}{2} AB = 5.$$

$\therefore DF$ 的长为 5.

【点睛】本题主要考查了直角三角形的性质与判定，垂直平分线的判定和的性质，熟记勾股定理与逆定理是解答本题的关键.

五、综合题（本大题第（1）小题 2 分，第（2）小题 2 分，第（3）小题 4 分，满分 8 分）

27. 如图，在平面直角坐标系中，已知四边形 $OABC$ 是矩形，且 $OA=8$ ， $OC=6$ ， $CE:BE=1:3$. 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($x>0$) 的图象分别交 BC 、 AB 于点 E 、点 F .



备用图

- (1) 求反比例函数的解析式；
- (2) 连接 EF 、 OE 、 OF ，求 $\triangle OEF$ 的面积；
- (3) 是否存在 x 轴上的一点 P ，使得 $\triangle EFP$ 是不以点 P 为直角顶点的直角三角形？若存在，请求出符合题意的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $y = \frac{12}{x}$

(2) $\frac{45}{2}$

(3) $P_1\left(\frac{55}{8}, 0\right)$, $P_2\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

【解析】

【分析】(1) 根据题意得到点 E 的坐标为 $(2, 6)$ ，根据待定系数法可得 k 的值，即可；

(2) 求出点 E 与点 F 的坐标，然后根据三角形面积公式即可求出；

(3) 设点 P 坐标为 $(a, 0)$ ，求出点 E 与点 F 的坐标，运用分类讨论思想结合勾股定理解决问题.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形，

$$\therefore BC = OA = 8, \quad AB = OC = 6,$$

$$\because CE:BE = 1:3,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{4}BC = 2, \quad BE = 6,$$

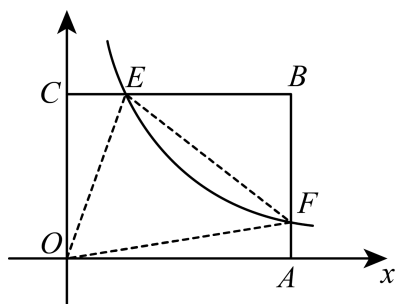
所以点 E 的坐标为 $(2, 6)$,

点 E 在反比例函数上, 代入 $y = \frac{k_1}{x}$, 得到 $k_1 = 12$,

故反比例函数解析式为 $y = \frac{12}{x}$;

【小问 2 详解】

如图,



$$\because OA = 8,$$

$$\therefore x = 8 \text{ 时}, \quad y = \frac{3}{2},$$

$$\therefore F\left(8, \frac{3}{2}\right),$$

$$\text{即, } AF = \frac{3}{2}, \quad BF = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2},$$

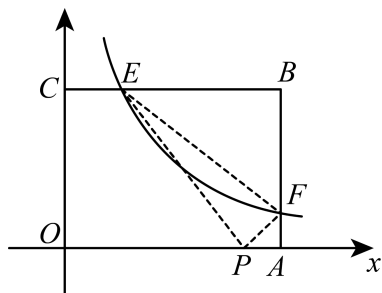
$$\therefore S_{\triangle OEF} = S_{\text{矩形}} - S_{\triangle OCE} - S_{\triangle OFA} - S_{\triangle BEF}$$

$$= 6 \times 8 - 12 - \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{9}{2},$$

$$= \frac{45}{2};$$

【小问 3 详解】

如图,



设所求点 P 坐标为 $(a, 0)$,

$$\because F\left(8, \frac{3}{2}\right), E(2, 6),$$

$$\therefore EF^2 = (8-2)^2 + \left(\frac{3}{2}-6\right)^2 = \frac{225}{4},$$

$$EP^2 = (a-2)^2 + (0-6)^2 = a^2 - 4a + 40,$$

$$FP^2 = (a-8)^2 + \left(0-\frac{3}{2}\right)^2 = a^2 - 16a + \frac{265}{4},$$

当 $\angle EFP = 90^\circ$ 时,

$$EF^2 + FP^2 = EP^2,$$

$$\text{即, } a^2 - 16a + \frac{265}{4} + \frac{225}{4} = a^2 - 4a + 40,$$

$$\text{解得, } a = \frac{55}{8},$$

$$\text{故 } P_1\left(\frac{55}{8}, 0\right);$$

当 $\angle FEP = 90^\circ$ 时,

$$FP^2 = EP^2 + EF^2,$$

$$\text{即, } a^2 - 16a + \frac{265}{4} = a^2 - 4a + 40 + \frac{225}{4},$$

$$\text{解得, } a = -\frac{5}{2},$$

$$\text{故 } P_2\left(-\frac{5}{2}, 0\right),$$

$$\text{综上所述; 存在点 } P, \text{ 坐标为 } P_1\left(\frac{55}{8}, 0\right), P_2\left(-\frac{5}{2}, 0\right).$$

【点睛】 本题考查了反比例函数与矩形的综合性问题, 涉及到反比例函数的性质, 待定系数法求函数解析式、坐标表与图形的关系、勾股定理等知识, 分类讨论思想的运用是解决最后一问的关键.