

2023 学年第一学期期末质量调研卷

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列各式中与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{20}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt{0.2}$ D. $\sqrt{24}$

【答案】B

【解析】

【分析】先化为最简二次根式, 再根据同类二次根式的定义判断即可;

【详解】解: A. $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 不符合题意;

B. $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 符合题意;

C. $\sqrt{0.2} = 0.2\sqrt{5}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 不符合题意;

D. $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = 2\sqrt{6}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题考查了二次根式的分母有理化, 同类二次根式, 掌握其定义是解题关键.

2. 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 6x - 7 = 0$, 则方程变形为 ()

- A. $(x-6)^2 = 43$ B. $(x+6)^2 = 43$ C. $(x-3)^2 = 16$ D. $(x+3)^2 = 16$

【答案】C

【解析】

【分析】首先进行移项变形成 $x^2 - 6x = 7$ 两边同时加上 9, 则左边是一个完全平方, 右边是一个常数, 即可完成配方.

【详解】 $x^2 - 6x - 7 = 0$

$$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$$

$$(x-3)^2 = 16,$$

故选: C.

【点睛】配方法的一般步骤: (1) 把常数项移到等号的右边; (2) 把二次项的系数化为 1; (3) 等式两边同时加上一次项系数一半的平方. 选择用配方法解一元二次方程时, 最好使方程的二次项的系数为 1, 一次项

的系数是2的倍数.

3. 下面各组变量的关系中, 成正比例关系的是 ()

A. 圆的周长与它的半径

B. 人的身高与年龄

C. 正方形的面积与它的边长

D. 汽车从甲地到乙地, 所用时间与行驶速度

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了正比例函数的定义, 判断两个相关联的量之间成什么比例, 就看这两个量是对应的比值一定, 还是对应的乘积一定; 如果是比值一定, 就成正比例; 如果是乘积一定, 则成反比例, 由此逐项判断即可, 熟练掌握正比例函数的定义是解此题的关键.

【详解】解: A、圆的周长与它的半径成正比例关系, 故此选项符合题意;

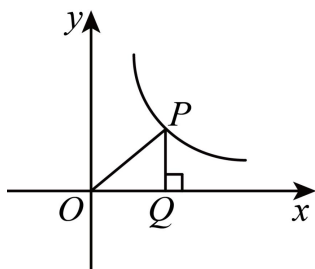
B、人的身高与年龄不成正比例关系, 故此选项不符合题意;

C、正方形的面积与它的边长的平方成正比例关系, 故此选项不符合题意;

D、汽车从甲地到乙地, 所用时间与行驶速度成反比例关系, 故此选项不符合题意;

故选: A.

4. 如图, 点 P 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 第一象限的图象上, PQ 垂直 x 轴, 垂足为 Q , 设 $\triangle POQ$ 的面积是 s , 那么 s 与 k 之间的数量关系是 ()



A. $s = \frac{k}{4}$

B. $s = k$

C. $s = \frac{k}{2}$

D. 不能确定

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数的性质以及反比例函数系数 k 的几何意义, 根据题意得出 $S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2}|k| = s$, 再结合反比例函数的图象在第一象限, 得出 $k > 0$, 即可得出答案, 熟练掌握以上知识点并灵活运用是解此题的关键.

【详解】解: $\because$ 点 P 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 第一象限的图象上, PQ 垂直 x 轴,

$$\therefore S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2}PQ \cdot OQ = \frac{1}{2}|k| = s,$$

$$\therefore s = \frac{1}{2}|k|,$$

$\because$ 反比例函数的图象在第一象限,

$$\therefore k > 0,$$

$$\therefore s = \frac{1}{2}k,$$

故选: C.

5. 下列给出的三条线段中, 不能构成直角三角形的是 ()

A. 4、8、 $4\sqrt{3}$

B. 4、8、 $4\sqrt{5}$

C. 7、24、25

D. 7、14、15

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据勾股定理的逆定理对四个选项进行逐一判断即可.

【详解】 解: A、 $\because 4^2 + (4\sqrt{3})^2 = 64 + 48 = 8^2$, $\therefore$ 能够成直角三角形, 故本选项可构成直角三角形;

B、 $\because 4^2 + 8^2 = 80 \neq (4\sqrt{5})^2$, $\therefore$ 不能够成直角三角形, 故本选项错误;

C、 $\because 7^2 + 24^2 = 625 = 25^2$, $\therefore$ 能够成直角三角形, 故本选项错误;

D、 $\because 7^2 + 14^2 = 245 \neq 15^2$, $\therefore$ 不能够成直角三角形, 故本选项正确.

故选: D.

【点睛】 本题考查的是如果三角形的三边长 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么这个三角形就是直角三角形.

6. 已知下列命题中:

①有两条边分别相等的两个直角三角形全等;

②有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等;

③有一条边与一个锐角分别相等的两个直角三角形全等;

④顶角与底边分别对应相等的两个等腰三角形全等.

其中真命题的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质逐个排查即可.

【详解】 解: ①由于 SSA 不能判定三角形全等, 则有两边分别相等的两个直角三角形不一定全等, 故原命题是假命题;

②由于满足 ASA , 则有一条腰相等的两个等腰直角三角形全等, 故原命题是真命题;

③有一条边与一个锐角分别对应相等的两个直角三角形全等，故原命题是假命题；

④由于两等腰三角形顶角相等，则他们的底角对应相等，再结合底相等，满足 ASA ，故原命题是真命题.

其中真命题的个数是 2 个.

故选：B.

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定、等腰三角形和直角三角形的性质等知识点，灵活应用相关知识成为解答本题的关键.

二、填空题 (本大题 12 题，每题 3 分，满分 36 分)

7. 计算： $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{6a} =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{3}a$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的乘法，根据二次根式的乘法运算法则进行计算即可，熟练掌握运算法则是解此题的关键.

【详解】解： $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{6a} = \sqrt{2a \cdot 6a} = \sqrt{12a^2} = 2\sqrt{3}a$ ，

故答案为： $2\sqrt{3}a$.

8. 方程 $x^2 = 5x$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 0$ ， $x_2 = 5$

【解析】

【分析】根据因式分解法解一元二次方程即可.

【详解】解： $x^2 = 5x$ ，

移项得： $x^2 - 5x = 0$ ，

因式分解得： $x(x - 5) = 0$ ，

$\therefore x = 0$ 或 $x - 5 = 0$ ，

$\therefore x_1 = 0$ ， $x_2 = 5$ ，

故答案为： $x_1 = 0$ ， $x_2 = 5$.

【点睛】本题考查了解一元二次方程，熟练掌握一元二次方程的几种解法是解本题的关键.

9. 函数 $y = \sqrt{2x - 1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \geq \frac{1}{2}$.

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件：被开方数大于或等于 0，即可求出 x 的范围.

【详解】 解：根据题意得： $2x - 1 \geq 0$ ，解得： $x \geq \frac{1}{2}$.

故答案为 $x \geq \frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查了函数自变量的取值范围问题，函数自变量的范围一般从三个方面考虑：

- (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；
- (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；
- (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

10. 已知 $f(x) = \frac{1}{2+x}$ ，那么 $f(\sqrt{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据 $f(x) = \frac{1}{2+x}$ 代入计算即可；

【详解】 $\because f(x) = \frac{1}{2+x}$,

$$\therefore f(\sqrt{3}) = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3};$$

故答案是： $2 - \sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查了代数式求值和分母有理化，准确利用平方差公式计算是解题的关键.

11. 若函数 $y = (k+1)x$ 是正比例函数，且 y 随 x 的增大而减小，则 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $k < -1$

【解析】

【分析】 根据正比例函数的性质，在 $y=kx(k \neq 0)$ 中，当比例系数 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小，从而列不等式求解.

【详解】 解：由题意可得： $k+1 < 0$

解得： $k < -1$

故答案为： $k < -1$.

【点睛】 本题考查的是正比例函数的性质，解题的关键是熟悉函数图象与系数的关系.

12. 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $m < 1$ 且 $m \neq 0$.

【解析】

【分析】由一元二次方程的定义可得 $m \neq 0$ ，再利用一元二次方程根的判别式列不等式 $\Delta = (-2)^2 - 4m > 0$ ，再解不等式即可得到答案.

【详解】解：∵ 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore m \neq 0 \text{ 且 } \Delta = (-2)^2 - 4m > 0,$$

$$\text{由 } \Delta = (-2)^2 - 4m > 0,$$

$$\text{可得 } 4m < 4,$$

$$\therefore m < 1,$$

综上： $m < 1$ 且 $m \neq 0$ ，

故答案为： $m < 1$ 且 $m \neq 0$.

【点睛】本题考查的是一元二次方程的定义及一元二次方程根的判别式，掌握利用一元二次方程根的判别式求解字母系数的取值范围是解题的关键.

13. 平面内，到点 A 的距离等于 2 的点的轨迹是_____.

【答案】 以 A 为圆心， 2 为半径的圆

【解析】

【分析】本题考查了圆的定义，解题关键是掌握圆是平面内到一定点的距离等于定长的所有点的集合.

【详解】解：由圆的定义可知，平面内到点 A 的距离等于 2 的点的轨迹是以 A 为圆心 2 为半径的圆，

故答案为：以 A 为圆心， 2 为半径的圆.

14. 若直角三角形斜边上的高是 3，斜边上的中线是 6，则这个直角三角形的面积是 _____.

【答案】 18

【解析】

【分析】根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半求得斜边长为 12，再利用三角形的面积公式求解即可.

【详解】解：∵ 直角三角形斜边上的中线是 6，

∴ 斜边长为 12，

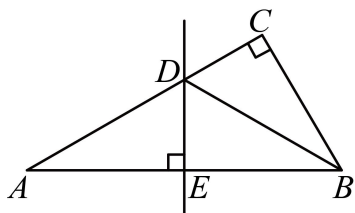
∴ 斜边上的高是 3，

$$\therefore \text{这个直角三角形的面积是 } \frac{1}{2} \times 12 \times 3 = 18,$$

故答案为： 18.

【点睛】 本题考查直角三角形斜边中线性质的，熟知直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解答的关键.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，边 AB 的垂直平分线 DE 交 AC 于 D ， $CD = 10\text{cm}$ ， $AD = 20\text{cm}$ ，则 $\angle A =$ _____.



【答案】 30° ##30 度

【解析】

【分析】 如图所示，连接 CE ，由线段垂直平分线的性质可得 $AD = BD = 20\text{cm}$ ， $AE = BE$ ，利用勾股定理求出 $BC = 10\sqrt{3}\text{cm}$ ，进而求出 $AB = 20\sqrt{3}\text{cm}$ ，由直角三角形的性质得到 $CE = BE = \frac{1}{2}AB = 10\sqrt{3}\text{cm}$ ，据此可证明 $\triangle BCE$ 是等边三角形，得到 $\angle ABC = 60^\circ$ ，则 $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

【详解】 解：如图所示，连接 CE ，

$\because DE$ 垂直平分 AB ，

$\therefore AD = BD = 20\text{cm}$ ， $AE = BE$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DBC$ 中，由勾股定理得 $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = 10\sqrt{3}\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 20\sqrt{3}\text{cm}$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AE = BE$ ，

$\therefore CE = BE = \frac{1}{2}AB = 10\sqrt{3}\text{cm}$ ，

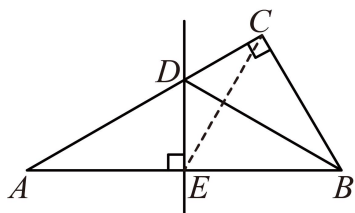
$\therefore CE = BE = BC$ ，

$\therefore \triangle BCE$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

故答案为： 30° .



【点睛】 本题主要考查了线段垂直平分线的性质，勾股定理，三角形内角和定理，等边三角形的性质与判

定，直角三角形的性质等等，证明 $\triangle BCE$ 是等边三角形是解题的关键.

16. 若点 P 在 x 轴上，点 A 坐标是 (2, -1)，且 $PA = \sqrt{2}$ 则点 P 的坐标是_____.

【答案】(3,0),(1,0)

【解析】

【分析】设出 P 的坐标，利用两点距离公式，求出 P 的坐标.

【详解】解：由题意设 P (x, 0)，因为 $PA = \sqrt{2}$

$$\therefore \sqrt{(2-x)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$$

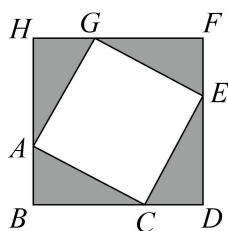
解得：x=3 或 x=1，

所以点 P 的坐标是 (3, 0) 或 (1, 0)，

故答案为 (3, 0) 或 (1, 0)，

【点睛】此题考查点的坐标问题，解题关键是掌握两点间的距离公式.

17. 在证明“勾股定理”时，可以将 4 个全等的直角三角形和一个小正方形拼成一个大正方形（如图所示， $AB < BC$ ）。如果小正方形的面积是 25，大正方形的面积为 49，那么 $\frac{BC}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】首先求出小正方形的边长和大正方形的边长，利用勾股定理列方程，然后再求出 AB 和 BC 的长.

【详解】解： $\because$ 小正方形的面积是 25，

$$\therefore AC=5,$$

$$\because \triangle ABC \cong \triangle CDE,$$

$$\therefore \text{设 } AB=CD=x,$$

$$\because \text{大正方形的面积为 } 49,$$

$$\therefore BD=7,$$

$$\therefore BC+CD=7,$$

$$\therefore BC=7-x,$$

在 $Rt\triangle ABC$ 中: $AB^2 + BC^2 = AC^2$,

$$\therefore x^2 + (7-x)^2 = 5^2,$$

解得: $x_1 = 4, x_2 = 3$,

$$\therefore AB < BC,$$

$$\therefore x < 7-x,$$

$$\therefore x < \frac{7}{2},$$

$$\therefore x = 3,$$

$$\therefore AB = 3, BC = 4,$$

$$\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}.$$

故答案为: $\frac{4}{3}$.

【点睛】此题主要考查了利用勾股定理列方程, 解一元二次方程, 三角形全等的性质, 掌握勾股定理列出方程是解题的关键.

18. 我们规定: 如果一个三角形一边上的高等于这条边, 那么这个三角形叫做“等高底”三角形, 这条边叫做这个三角形的“等底”. 如图, 已知直线 $l_1 \parallel l_2$, l_1 与 l_2 之间的距离是 3, “等高底” $\triangle ABC$ 的“等底” BC 在直线 l_1 上 (点 B 在点 C 的左侧), 点 A 在直线 l_2 上, $AB = \sqrt{2}BC$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 点 A 、 C 的对应点分别为点 A_1 、 C_1 , 那么 A_1C 的长为_____.

_____ l_2

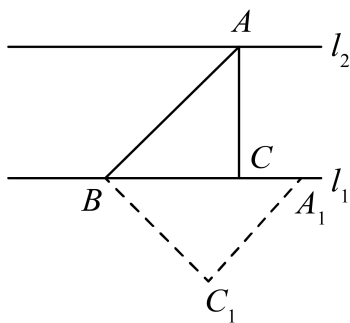
_____ l_1

【答案】 $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2}-3$

【解析】

【分析】根据题意分情况画出相应图, 然后根据旋转性质找到线段对应关系求解即可.

【详解】解: 当如下图所示时,



$$BC = 3, \quad AB = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{2},$$

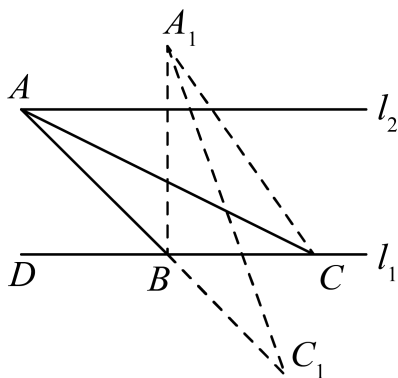
$\because$ 点 A 到直线 l_1 的距离为 3,

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$,

$$A_1C = A_1B - BC = 3\sqrt{2} - 3;$$

当如下图所示时,



$$BC = 3, \quad AB = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{2},$$

$\because$ 点 A 到直线 l_1 的距离为 3,

$$\therefore \angle ABD = 45^\circ, \quad \angle ABC = 135^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle ABA_1 = 45^\circ$, $A_1B = AB = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore \angle A_1BC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle A_1BC \text{ 中, } A_1C = \sqrt{A_1B^2 + BC^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = 3\sqrt{3},$$

故答案为: $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2} - 3$.

【点睛】 本题考查了旋转性质、勾股定理、二次根式的运算等知识, 分情况讨论并画出相应图像是解题关键.

三、简答题 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 满分 20 分)

19. 计算: $\frac{1}{\sqrt{3}+2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12}$.

【答案】 3

【解析】

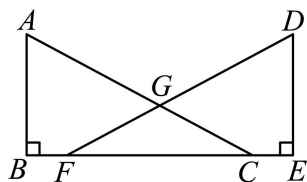
【分析】 本题考查二次根式的混合运算;

先将分母有理化, 根据二次根式的性质化简, 再进行加减计算即可.

【详解】 解: $\frac{1}{\sqrt{3}+2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{12}$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+2)(2-\sqrt{3})} - |1-\sqrt{3}| + 2\sqrt{3}$$
$$= 2-\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) + 2\sqrt{3}$$
$$= 2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}$$
$$= 3$$

20. 如图, 点 B 、 F 、 C 、 E 在同一直线上, $AB \perp BE$, 垂足为 B , $DE \perp BE$, 垂足为 E , AC 、 DF 相交于点 G , 且 $AC=DF$, $BF=CE$. 求证: $FG=CG$.



【答案】 见详解

【解析】

【分析】 首先证明借助 HL 证明 $Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle DEF$, 由全等三角形的性质可知 $\angle ACB = \angle DFE$, 然后由“等角对等边”即可证明 $FG=CG$.

【详解】 证明: $\because AB \perp BE$, $DE \perp BE$,

$$\therefore \angle B = \angle E = 90^\circ,$$

$$\because BF = CE,$$

$$\therefore BF + FC = CE + FC,$$

$$\therefore BC = EF,$$

$$\text{又} \because AC = DF,$$

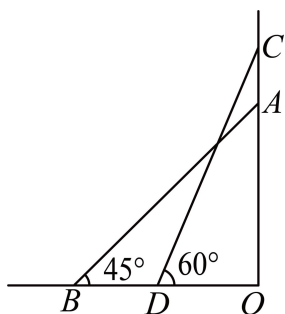
$$\therefore Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle DEF (HL),$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DFE,$$

$$\therefore FG = CG.$$

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定等知识，熟练掌握相关性质和判定是解题关键.

21. 如图，走廊上有一梯子以 45° 的倾斜角斜靠在墙上，墙与地面垂直，梯子影响了行人的行走，工人将梯子挪动位置，使其倾斜角变为 60° . 如果梯子的长为 4 米，那么行走的通道拓宽了多少米？（结果保留根号）

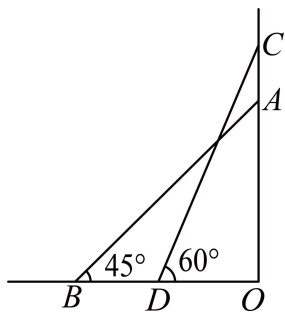


【答案】行走的通道拓宽了 $(2\sqrt{2} - 2)$ 米

【解析】

【分析】此题主要考查勾股定理理解三角形，在直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方；也考查了含 30° 角直角三角形的性质，在直角三角形中， 30° 度角所对的直角边长度为斜边的一半；根据勾股定理分别求出两次梯子距墙根的距离，求差得解.

【详解】解： $\because AB = CD = 4$ ， $\angle ABO = 45^\circ$ ，



$$\therefore AO = BO, \quad BO^2 + AO^2 = AB^2,$$

$$\therefore BO = 2\sqrt{2},$$

$$\because \angle CDO = 60^\circ,$$

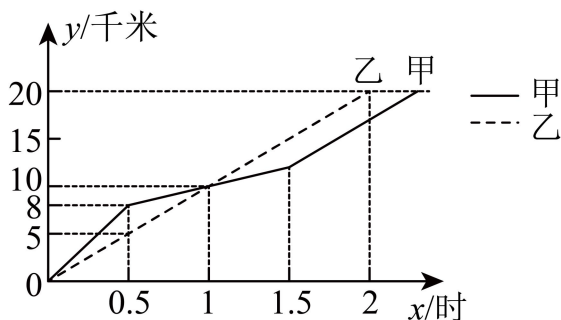
$$\therefore \angle DCO = 30^\circ,$$

$$\therefore DO = \frac{1}{2}CD = 2$$

则 $BD = BO - DO = 2\sqrt{2} - 2$.

答: 行走的通道拓宽了 $(2\sqrt{2} - 2)$ 米.

22. 某市半程马拉松比赛, 甲乙两位选手的行程 (千米) 随时间 (小时) 变化的图象如图所示.



- (1) 哪位选手先到终点? _____ (填“甲”或“乙”);
- (2) 甲选手跑到 8 千米时, 用了 _____ 小时. 起跑 _____ 小时后, 甲乙两人相遇;
- (3) 乙选手在 $0 \leq x \leq 2$ 的时段内, y 与 x 之间的函数关系式是 _____;
- (4) 甲选手经过 1.5 小时后, 距离起点有 _____ 千米.

【答案】 (1) 乙 (2) 0.5, 1

(3) $y = 10x (0 \leq x \leq 2)$

(4) 12

【解析】

【分析】 本题考查了从函数图象中获取信息, 一次函数的应用, 解题的关键是读懂题意, 能从图象中获取有用的信息.

- (1) 观察图象直接得出答案;
- (2) 观察图象直接得出答案;
- (3) 求出乙的速度, 即可得出 y 与 x 之间的函数关系式;
- (4) 由图象可得在 $0.5 \leq x \leq 1.5$ 时, 甲用 0.5 小时跑了 2 千米, 由此即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: 由图象可得: 乙选手先到达终点,

故答案为: 乙;

【小问 2 详解】

解: 由图象可得: 甲选手跑到 8 千米时, 用了 0.5 小时, 起跑 1 小时后, 甲乙两人相遇,

故答案为: 0.5, 1;

【小问 3 详解】

解: $\because 20 \div 2 = 10$ (千米/小时),

$\therefore$ 乙选手在 $0 \leq x \leq 2$ 的时段内, y 与 x 之间的函数关系式是 $y = 10x (0 \leq x \leq 2)$,

故答案为: $y = 10x (0 \leq x \leq 2)$;

【小问 4 详解】

解: 由图象可得, 甲 0.5 小时距离起点 8 千米, 1 小时距离起点 10 千米,

$\therefore 1 - 0.5 = 0.5$ (小时),

$\therefore$ 在 $0.5 \leq x \leq 1.5$ 时, 甲用 0.5 小时跑了 2 千米,

$\therefore 1.5 - 1 = 0.5$,

$\therefore$ 甲选手经过 1.5 小时后, 距离起点有 $10 + 2 = 12$ (千米),

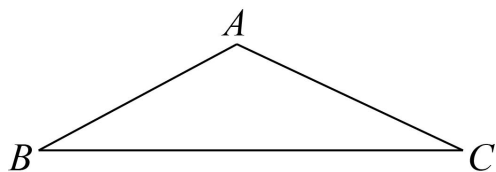
故答案为: 12.

四、解答题 (本大题共 4 题, 23 题 6 分, 24、25 题每题 8 分, 26 题 10 分, 满分 32 分)

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle B = 30^\circ$.

(1) 在 BC 边上求作一点 N , 使得 $AN = BN$; (不要求写作法, 但要保留作图痕迹)

(2) 在 (1) 的条件下, 求证: $CN = 2BN$.



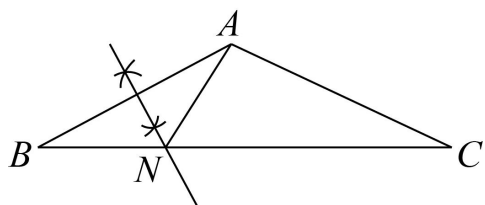
【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【详解】 (1) 作线段 AB 的垂直平分线交 BC 于点 N , 点 N 即为所求;

(2) 根据等腰三角形的性质计算出 $\angle C$ 的度数, 再计算出 $\angle CAN$ 的度数, 然后根据在直角三角形中, 30° 角所对的直角边等于斜边的一半, 可得 $CN = 2AN$, 进而得到 $CN = 2BN$.

【解答】 (1) 解: 如图, 点 N 即为所求;



(2) 证明: 连接 AN .

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ$.

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 2\angle B = 120^\circ.$$

$$\because AN = BN,$$

$$\therefore \angle BAN = \angle B = 30^\circ$$

$$\therefore \angle NAC = \angle BAC - \angle NAB = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

$$\because \angle C = 30^\circ,$$

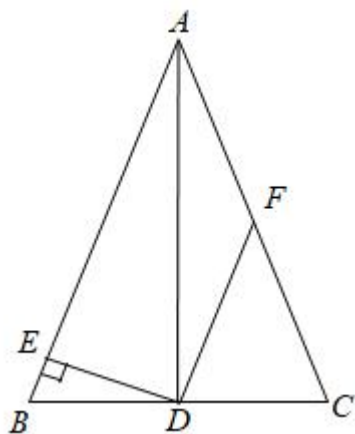
$$\therefore CN = 2AN.$$

$$\therefore CN = 2BN.$$

【点睛】此题主要考查了作图，等腰三角形的性质以及含 30° 度角的直角三角形，关键是正确画出图形，掌握在直角三角形中， 30° 角所对的直角边等于斜边的一半.

24. 如图，已知：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ， D 是 BC 的中点， $DE \perp AB$ 于 E ， $DF \parallel AB$ 交 AC 于 F .

求证： $DE = \frac{1}{2} DF$.



【答案】答案见解析

【解析】

【分析】利用等腰三角形三线合一的性质得知 AD 是 $\triangle ABC$ 的对称轴，利用三角形中位线定理推出 F 点是线段 AC 的中点，取 AB 的中点 G ，利用三角形中位线定理推出 $DF = DG$ ， $\angle DGB = \angle BAC = 30^\circ$ ，再利用含 30° 度角的直角三角形的性质即可证明结论.

【详解】 $\because AB = AC$ ， D 是 BC 的中点， $\angle BAC = 30^\circ$ ，

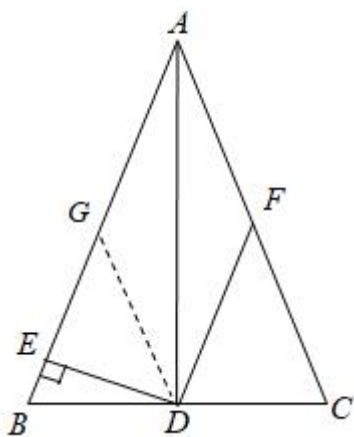
$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的对称轴， $AD \perp BC$ ，

$\because DF \parallel AB$ ，且 D 是 BC 的中点，

$\therefore F$ 点是线段 AC 的中点，

$$\therefore DF = \frac{1}{2} AC,$$

取 AB 的中点 G ，连接 DG ，



$\therefore DG$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DG = \frac{1}{2} AC = DF$, $\angle DGB = \angle BAC = 30^\circ$,

$\because DE \perp AB$,

$\therefore \angle GED = 90^\circ$,

在 $Rt\triangle DEG$ 中, $\angle DGE = 30^\circ$,

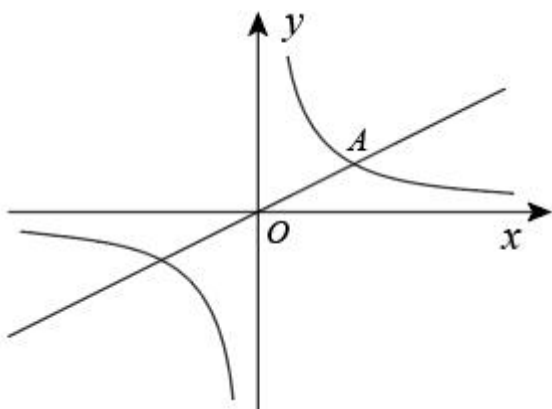
$\therefore DE = \frac{1}{2} DG = \frac{1}{2} DF$.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质, 直角三角形斜边上的中线的性质, 三角形中位线的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质, 作出辅助线证得 $DF = DG$, $\angle DGB = \angle BAC = 30^\circ$ 是解题的关键.

25. 如图, 已知一次函数 $y = \frac{1}{2}x$ 和反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象交点是 $A(4, m)$.

(1) 求反比例函数解析式;

(2) 在 x 轴的正半轴上存在一点 P , 使得 $\triangle AOP$ 是等腰三角形, 请求出点 P 的坐标.



【答案】 (1) 反比例函数解析式 $y = \frac{8}{x}$; (2) P 点坐标为 $(2\sqrt{5}, 0)$ 或 $(8, 0)$ 或 $(\frac{5}{2}, 0)$

【解析】

【分析】 (1) 根据一次函数解析式求出 A 点坐标, 再用待定系数法求出反比例函数解析式即可;

(2) 若使 $\triangle AOP$ 是等腰三角形, 分 $OA = OP$, $OA = AP$, $OP = AP$ 三种情况讨论分别求出 P 点的坐标即可.

【详解】解：(1) $\because A$ 点是一次函数 $y = \frac{1}{2}x$ 和反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图象的交点，

$$\therefore m = \frac{1}{2} \times 4,$$

解得 $m = 2$,

即 $A(4, 2)$,

把 A 点坐标代入反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 得, $2 = \frac{k}{4}$,

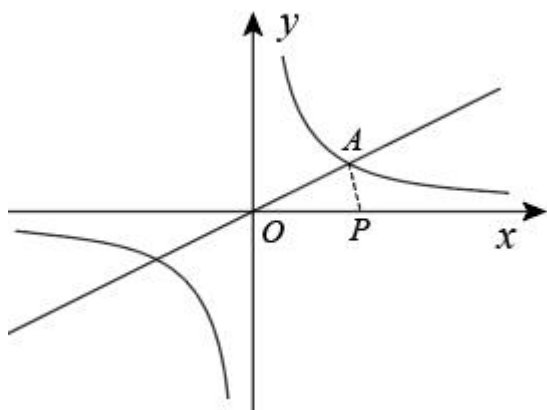
解得 $k = 8$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{8}{x}$;

(2) 设 P 点的坐标为 $(n, 0)$,

若使 $\triangle AOP$ 是等腰三角形, 分以下三种情况:

①当 $OA = OP$ 时,

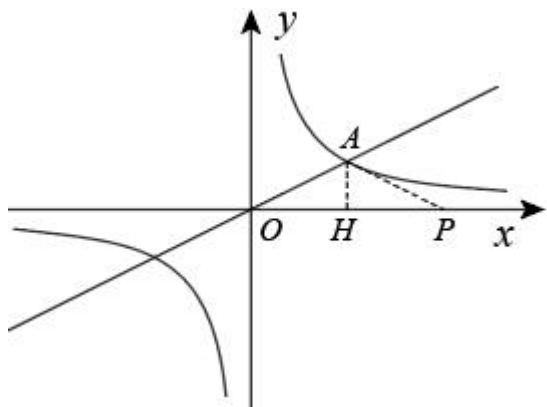


由 (1) 知, $A(4, 2)$,

$$\therefore n = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

即 $P(2\sqrt{5}, 0)$;

②当 $OA = AP$ 时, 作 $AH \perp OP$ 于 H ,



$\because A(4, 2)$,

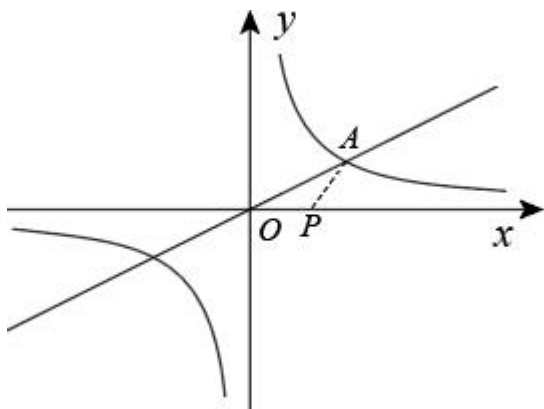
$$\therefore OH = 4,$$

$$\therefore OA = AP,$$

$$\therefore OP = 2OH = 2 \times 4 = 8,$$

即 $P(8, 0)$;

③当 $OP = AP$ 时,



$$\therefore A(4, 2),$$

$$\therefore n = \sqrt{(4-n)^2 + 2^2},$$

$$\text{即 } n^2 = (4-n)^2 + 2^2,$$

$$\text{解得 } n = \frac{5}{2},$$

$$\text{即 } P\left(\frac{5}{2}, 0\right),$$

综上, 符合条件的 P 点坐标为 $(2\sqrt{5}, 0)$ 或 $(8, 0)$ 或 $(\frac{5}{2}, 0)$.

【点睛】本题主要考查反比例函数的性质, 熟练掌握待定系数法求解析式以及分类讨论思想是解题的关键.

26. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$, 点 D 、 E 在线段 AB 上.

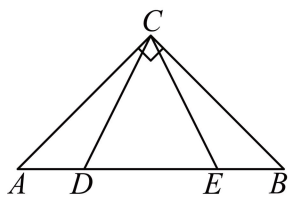


图1

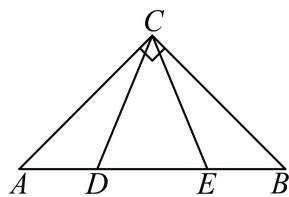


图2

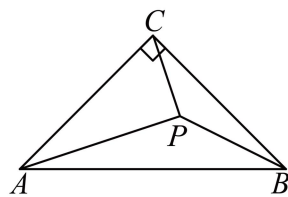


图3

(1) 如图 1, 若 $CD = CE$, 求证: $AD = BE$;

(2) 如图 2, 若 $\angle DCE = 45^\circ$, 求证: $DE^2 = AD^2 + BE^2$;

(3) 如图 3, 若点 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, $\angle BPC = 135^\circ$, 请猜想线段 AP 、 BP 、 CP 之间的数量关系, 并证明.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析 (3) $AP^2 = BP^2 + 2CP^2$, 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 如图所示, 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于 F , 利用三线合一一定理得到 $AF = BF$, $DF = EF$, 由此即可证明 $AD = BE$;

(2) 如图所示, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle BCF$, 连接 EF , 则 $BF = AD$, 证明 $\triangle FCE \cong \triangle DCE$, 得 $FE = DE$, 再证明 $\angle EBF = 90^\circ$, 则 $FE^2 = BF^2 + BE^2$, 即可证得 $DE^2 = AD^2 + BE^2$;

(3) 将 $\triangle CAP$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle CBG$, 连接 PG , 则 $BG = AP$, $GC = PC$, $\angle PCG = 90^\circ$, 所以 $PG^2 = PC^2 + GC^2 = 2PC^2$, 再证明 $\angle BPG = 90^\circ$, 则 $BG^2 = BP^2 + PG^2$, 可证得 $AP^2 = BP^2 + 2PC^2$.

【小问 1 详解】

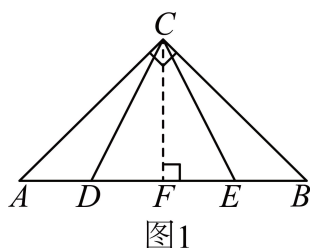
证明: 如图所示, 过点 C 作 $CF \perp AB$ 于 F ,

$$\because CA = CB, CD = CE,$$

$$\therefore AF = BF, DF = EF,$$

$$\therefore AF - DF = BF - EF,$$

$$\therefore AD = BE;$$



【小问 2 详解】

证明: 如图所示, 将 $\triangle ACD$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle BCF$, 连接 EF ,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, CA = CB,$$

$$\therefore \angle CBA = \angle A = 45^\circ,$$

由旋转得 $CF = CD$, $\angle CBF = \angle CAD = 45^\circ$, $\angle ACD = \angle BCF$,

$$\therefore \angle DCE = 45^\circ,$$

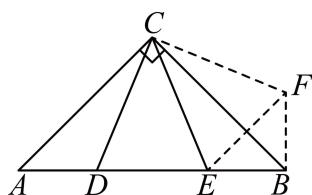
$$\therefore \angle FCE = \angle BCF + \angle BCE = \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle DCE,$$

$$\therefore CE = CE,$$

$$\therefore \triangle FCE \cong \triangle DCE (\text{SAS}),$$

$$\begin{aligned}
&\therefore FE = DE, \\
&\because \angle CBF = \angle A = \angle CBA = 45^\circ, \\
&\therefore \angle EBF = 90^\circ, \\
&\therefore FE^2 = BF^2 + BE^2, \\
&\because BF = AD, \\
&\therefore DE^2 = AD^2 + BE^2.
\end{aligned}$$



【小问 3 详解】

图2

解: $AP^2 = BP^2 + 2CP^2$, 证明如下:

如图, 将 $\triangle CAP$ 绕点 C 沿逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle CBG$, 连接 PG ,

由旋转得 $GC = PC$, $AP = BG$, $\angle PCG = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CPG = \angle CGP = 45^\circ, \quad PG^2 = PC^2 + GC^2 = 2PC^2,$$

$$\because \angle BPC = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle BPG = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore BG^2 = BP^2 + PG^2,$$

$$\because BG = AP,$$

$$\therefore AP^2 = BP^2 + 2CP^2.$$

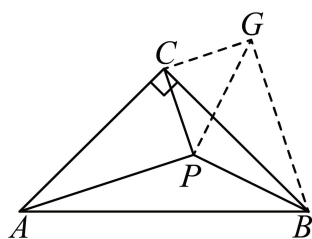


图3

【点睛】 本题主要考查了全等三角形的性质与判定, 旋转的性质, 等腰直角三角形的性质与判定, 勾股定理等等, 正确利用旋转构造全等三角形是解题的关键.

