

2023 学年第一学期期末考试八年级数学试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、填空题: (本大题共有 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列各组二次根式中, 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{6}$ 和 $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ C. $\sqrt{18}$ 和 $\sqrt{9}$ D. $\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{2a}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了同类二次根式的概念, 根据: “被开方数相同的最简二次根式, 叫做同类二次根式”, 进行判断即可.

【详解】 解: A、不是同类二次根式, 不符合题意;

B、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 是同类二次根式, 符合题意;

C、 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{9} = 3$ 不是同类二次根式, 不符合题意;

D、不是同类二次根式, 不符合题意;

故选 B.

2. 下列方程中是一元二次方程的是 ()

- A. $\sqrt{x^2} = 2$ B. $x^2 - x - 2$ C. $\frac{1}{x^2} - 2 = 0$ D. $x^2 = 0$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据: “含有一个未知数, 且含有未知数的项的次数为 2 次整式方程, 叫做一元二次方程”, 进行判断即可.

【详解】 解: A、方程可化简为 $|x| = 2$, 不是一元二次方程, 不符合题意;

B、不是方程, 不符合题意;

C、不是整式方程, 不符合题意;

D、是一元二次方程, 符合题意;

故选 D.

3. 已知正比例函数 $y = (-k^2 - 2)x$, 那么它的图象经过 ()

- A. 第一、三象限 B. 第一、二象限 C. 第二、四象限 D. 第三、四象限

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数的图象和性质，根据 $-k^2 - 2$ 的符号，即可得出结果.

【详解】 解： $\because k^2 \geq 0$,

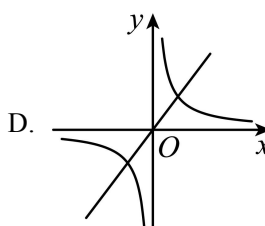
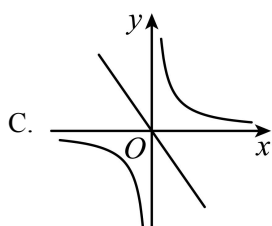
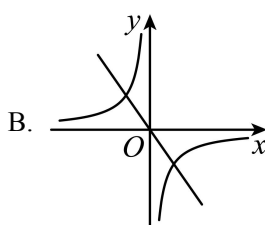
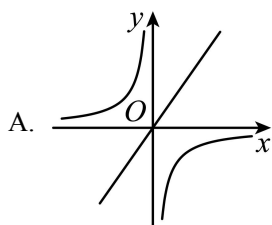
$$\therefore -k^2 \leq 0,$$

$$\therefore -k^2 - 2 < 0,$$

$\therefore$ 它的图象经过第二、四象限.

故选 C.

4. 已知函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，那么它和函数 $y = kx (k \neq 0)$ 在同一直角坐标平面内的大致图象是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】 先根据反比例函数图象的性质判断出 k 的范围，再确定其所在象限，进而确定正比例函数图象所在象限即可解答.

【详解】 解： $\because$ 函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，

$$\therefore k < 0,$$

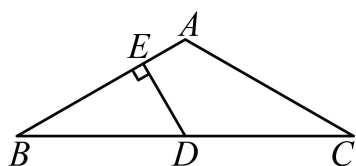
$\therefore$ 双曲线在第二、四象限，函数 $y = kx$ 的图象经过第二、四象限，

$\therefore$ B 选项满足题意

故选：B.

【点睛】 本题主要考查了反比例函数图象的性质与正比例函数图象的性质，掌握 k 对正比例函数和反比例函数图象的影响成为解答本题的关键.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 120^\circ$, 如果 D 是 BC 的中点, $DE \perp AB$, 垂足是 E , 那么 $AE:AB$ 的值等于 ()



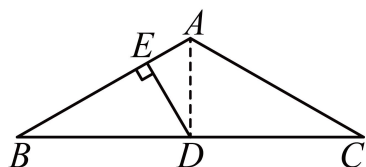
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查含 30° 度角的直角三角形的性质, 等腰三角形的性质, 连接 AD , 三线合一, 得到 $AD \perp BC$, 等边对等角, 求出 $\angle B = 30^\circ$, 进而求出 $\angle ADE = 30^\circ$, 利用含 30° 度的直角三角形的性质, 求出 $AB = 4AE$ 的长, 进一步求解即可.

【详解】解: 连接 AD ,



$\because AB = AC$, $\angle A = 120^\circ$, D 是 BC 的中点,
 $\therefore \angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 30^\circ$, $AD \perp BD$,
 $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, $AB = 2AD$,
 $\because DE \perp AB$,
 $\therefore \angle BED = \angle AED = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BDE = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ADE = 30^\circ$,
 $\therefore AD = 2AE$,
 $\therefore AB = 4AE$,
 $\therefore AE:AB = 1:4$;

故选 C.

6. 下列命题的逆命题为假命题的是 ()

- A. 如果两个数相等, 那么它们的平方相等
 B. 线段垂直平分线上任意一点到这条线段两个端点的距离相等

C. 如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 没有实数根, 那么 $b^2 - 4ac < 0$

D. 直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查判断逆命题的真假, 先写出逆命题, 然后判断真假的即可, 掌握有理数的乘方, 中垂线的性质, 根的判别式, 勾股定理及其逆定理, 是解题的关键.

【详解】解: A、逆命题为: 如果两个数的平方相等, 那么这两个数相等, 是假命题;

B、逆命题为: 到线段两端点的距离相等的点, 在这条线段的中垂线上, 是真命题;

C、逆命题为: 如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的判别式 $b^2 - 4ac < 0$, 那么方程没有实数根, 是真命题;

D、逆命题为: 如果一个三角形的两条边长的平方和等于第三边的平方, 那么这个三角形是直角三角形, 是真命题;

故选 A.

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. $\sqrt{x} - y$ 的有理化因式是_____.

【答案】 $\sqrt{x} + y$

【解析】

【分析】根据有理化因式的定义: 两个根式相乘的积不含根号, 即可得答案.

【详解】 $\because (\sqrt{x} - y)(\sqrt{x} + y) = x - y^2$, 结果不含根式,

$\therefore \sqrt{x} - y$ 的有理化因式是 $\sqrt{x} + y$,

故答案为 $\sqrt{x} + y$

【点睛】本题考查了分母有理化, 两个含有根式的代数式相乘, 如果它们的积不含有根式, 那么这两个代数式相互叫做有理化因式; 正确选择二次根式, 使它们的积符合平方差公式是解题的关键.

8. 如果 $\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x-1}}$ 在实数范围内有意义, 那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $1 < x \leq 4$

【解析】

【分析】本题考查了二次根式有意义: 被开方数为非负数以及分母不为 0, 据此即可列式计算作答.

【详解】解：∵ $\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x-1}}$ 在实数范围内有意义

$$\therefore 4-x \geq 0, \quad x-1 > 0$$

解得 $4 \geq x > 1$

故答案为： $1 < x \leq 4$

9. 分母有理化： $\frac{1}{2-\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分母有理化，根据 $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$ ，分子和分母同时乘上 $(2+\sqrt{2})$ ，化简即可作答.

【详解】解：依题意， $\frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1 \times (2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{2+\sqrt{2}}{4-2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

故答案为： $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$ ，那么 $f(6) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 将 $x=6$ 代入计算即可.

【详解】 把 $x=6$ 代入，得 $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x} = \frac{\sqrt{6+3}}{6} = \frac{1}{2}$,

故答案为 $\frac{1}{2}$

【点睛】 本题主要考查的是求函数值，掌握二次根式的性质是解题的关键.

11. 在实数范围内分解因式： $x^2 - 5x + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

【解析】

【分析】 本题考查因式分解，掌握配方法和平方差法因式分解是解题的关键。先配方再用平方差公式法，进行因式分解即可。

【详解】 解： $x^2 - 5x + 3 = x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{13}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = \left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ 。

故答案为： $\left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ 。

12. 如果关于 x 的方程 $x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0$ 有两个不相等的实数根，那么 m 的取值范围是_____。

【答案】 $m > -\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的判别式的意义，根据根的情况，列式 $\Delta = b^2 - 4ac = [-(2m+1)]^2 - 4 \times 1 \times m^2 > 0$ ，解出 m 的取值范围，即可作答。

【详解】 解： $\because x$ 的方程 $x^2 - (2m+1)x + m^2 = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-(2m+1)]^2 - 4 \times 1 \times m^2 = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 = 4m + 1 > 0$$

解得 $m > -\frac{1}{4}$

故答案为： $m > -\frac{1}{4}$

13. 经过点 A ，且半径等于 3cm 圆的圆心的轨迹是_____。

【答案】 以 A 为圆心，半径为 3cm 的圆

【解析】

【分析】 此题主要考查了轨迹，所求轨迹就是到顶点的距离等于定长的点的集合，因此应该是一个圆。求圆心的轨迹实际上是求距离 A 点 3cm 能画一个什么图形。

【详解】 解： 所求圆心的轨迹就是到 A 点的距离等于 3cm 的点的集合，

因此圆心轨迹是是一个以 A 为圆心，半径为 3cm 的圆。

故答案为： 以 A 为圆心，半径为 3cm 的圆。

14. 某件商品原价为 200 元，经过两次促销降价后的价格为 164 元，如果连续两次降价的百分率相同，设两次降价的百分率都是 x ，那么可以列出方程_____。

【答案】 $200(1-x)^2 = 164$

【解析】

【分析】 本题考查一元二次方程的实际应用。根据经过两次促销降价后的价格为 164 元，列出方程即可。

【详解】解：设两次降价的百分率都是 x ，由题意，得： $200(1-x)^2 = 164$ ；

故答案为： $200(1-x)^2 = 164$ 。

15. 如果反比例函数 $y = \frac{m+3}{x}$ 在 $x > 0$ 时， y 的值随 x 的值的增大而增大，那么 m 的取值范围是_____。

【答案】 $m < -3$

【解析】

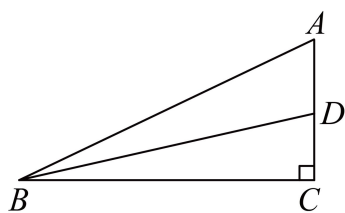
【分析】 本题考查反比例函数的性质。根据 $x > 0$ 时， y 的值随 x 的值的增大而增大，得到 $m+3 < 0$ ，求解即可。掌握反比例函数的增减性，是解题的关键。

【详解】解：由题意，得： $m+3 < 0$ ，

$\therefore m < -3$ ；

故答案为： $m < -3$ 。

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，如果 $CD = 2$ ， $AB = 9$ ，那么 $\triangle ABD$ 的面积等于_____。

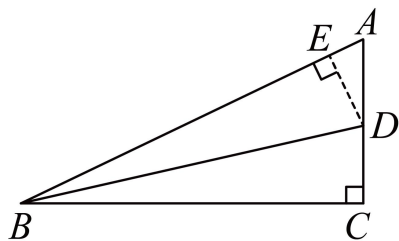


【答案】 9

【解析】

【分析】 本题考查角平分线的性质。过点 D 作 $DE \perp AB$ ，根据角平分线的性质得到 $DE = CD$ ，再利用面积公式进行求解即可。

【详解】解：过点 D 作 $DE \perp AB$ ，



$\therefore \angle C = 90^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，

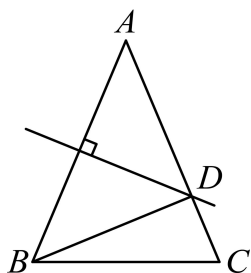
$\therefore DE = CD = 2$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 的面积等于 $\frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} \times 9 \times 2 = 9$ ；

故答案为：9。

17. 如图，等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 45^\circ$ ， AB 的垂直平分线交 AC 于 D ，那么 $\angle CBD$ 的度数为

_____.



【答案】 22.5°

【解析】

【分析】 本题考查等边对等角，中垂线的性质. 根据等边对等角，求出 $\angle ABC$ 的度数，中垂线的性质，推出 $\angle ABD = \angle A$ ，利用角的和差关系求解即可. 掌握相关性质，是解题的关键.

【详解】 解： $\because AB = AC$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ,$$

$\because AB$ 的垂直平分线交 AC 于 D ，

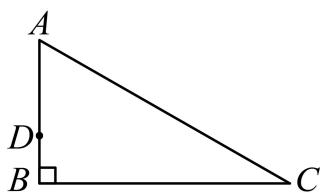
$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 22.5^\circ.$$

故答案为： 22.5° .

18. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = 90^\circ$ ，点 D 在边 AB 上， $AD = 2BD$. 把 $\triangle ABC$ 绕着点 D 顺时针旋转 n ($0 < n < 360$) 度后，如果点 A 恰好落在初始 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 BC 边所在直线上，那么 $n =$ _____.

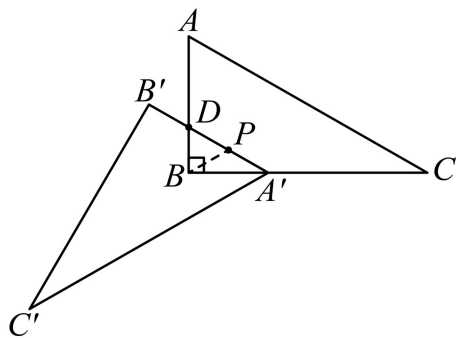


【答案】 120° ## 120 度

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质，等边三角形的判定与性质，熟练掌握旋转的性质，是解答本题的关键. 根据题意，点 A 恰好落在初始 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 BC 边，得到 $AD = A'D$ ，过 $A'D$ 中点 P ，连接 BP ，通过证明 $\triangle BPD$ 是等边三角形，得到 $\angle BDA' = 60^\circ$ ， $\angle ADA' = n = 120^\circ$ ，由此得到答案.

【详解】 解： 根据题意，如图所示，点 A 恰好落在初始 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 BC 边，



$$\therefore AD = 2BD,$$

根据旋转的性质, 得到 $AD = A'D$,

$$\therefore A'D = 2BD,$$

取 $A'D$ 中点 P , 连接 BP ,

$$\therefore DP = BP = BD,$$

$\therefore \triangle BPD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BDA' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADA' = n = 120^\circ,$$

故答案为: 120° .

三、简答题 (本大题共有 4 题, 每小题 6 分, 共 24 分)

19. 计算: $\sqrt{5}(\sqrt{10}+2) - \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$

【答案】 $\frac{9\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握二次根式的性质、二次根式的乘法和分母有理化是解决问题的关键.

先根据二次根式的乘法和分母有理化的方法运算, 然后化简后合并即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \sqrt{5}(\sqrt{10}+2) - \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - (\sqrt{5}+2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5} - 2.$$

20. 解方程: $(x+1)(x-3)=5$.

【答案】 $x_1=4$, $x_2=-2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程, 熟练掌握解一元二次方程的方法是解答本题的关键.

先整理方程, 然后利用因式分解, 求出答案.

【详解】 解: 根据题意得:

$$(x+1)(x-3)=5,$$

$$\text{方程整理得: } x^2 - 2x - 8 = 0,$$

$$\text{分解因式得: } (x-4)(x+2)=0,$$

$$\text{解得: } x_1=4, x_2=-2.$$

21. 如果方程 $(m-2)x+3=0$ 是关于 x 的一元一次方程, 试判断方程 $x(x+2m)+m(1-x)-1=0$ 的根的情况, 并说明理由.

【答案】 方程有两个不相等的实数根, 理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查根的判别式, 根据一元一次方程的定义, 得到 $m-2 \neq 0$, 将 $x(x+2m)+m(1-x)-1=0$ 整理为一元二次方程的一般形式, 求出判别式的符号, 即可得出结论.

【详解】 解: 方程有两个不相等的实数根, 理由如下:

$$\because \text{方程 } (m-2)x+3=0 \text{ 是关于 } x \text{ 的一元一次方程,}$$

$$\therefore m-2 \neq 0,$$

$$\therefore m \neq 2,$$

$$\therefore x(x+2m)+m(1-x)-1=0, \text{ 整理, 得: } x^2+mx+m-1=0,$$

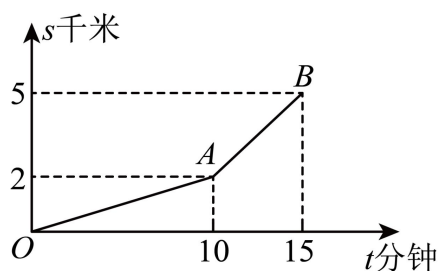
$$\therefore \Delta = m^2 - 4(m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2,$$

$$\because m-2 \neq 0,$$

$$\therefore \Delta = (m-2)^2 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

22. 小杰与爸爸骑车从家到公园先上坡后下坡, 在这段路上小杰骑车的路程 s (千米) 与骑车的时间 t (分钟) 之间的函数关系如图所示, 请根据图中信息填空:



- (1) 小杰去公园时下坡路长_____千米;
- (2) 小杰下坡的速度为_____千米/分钟;
- (3) 如果小杰回家时按原路返回, 且上坡与下坡的速度不变, 那么从公园骑车到家用用的时间是_____分钟.

【答案】 (1) 3 (2) 0.6

(3) $18\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查函数图象的实际应用.

- (1) 结合图象得到下坡长为 $5-2=3$ 千米, 作答即可;
- (2) 利用路程除以时间进行求解即可;
- (3) 先求出上坡和下坡的速度, 利用路程除以速度进行求解即可.

从图象中有效的获取信息, 是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 由图象可知, 10—15 分钟所走的路程为下坡路长,

$\therefore$ 下坡路长 $5-2=3$ 千米,

故答案为: 3;

【小问 2 详解】

$3 \div (15-10) = 0.6$ 千米/分钟;

故答案为: 0.6;

【小问 3 详解】

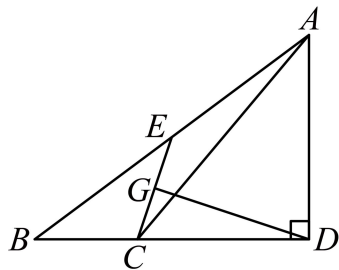
由图象可知, 上坡速度为: $2 \div 10 = 0.2$ 千米/分钟;

$\therefore$ 从公园骑车到家用用的时间是 $3 \div 0.2 + 2 \div 0.6 = 18\frac{1}{3}$ 分钟;

故答案为: $18\frac{1}{3}$.

四、解答题 (本大题共 4 题, 23、24 题每小题 8 分, 25、26 题每小题 9 分, 满分 34 分)

23. 已知: 如图, 在 $\triangle ABD$ 中, $\angle D = 90^\circ$, 点 C 在 BD 上, 点 E 在 AB 上, $AE = BE$, $DC = BE$, 点 G 是 CE 的中点.



(1) 求证: $DG \perp EC$;

(2) 求证: $\angle B = 2\angle GDC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查直角三角形斜边上的中线, 等腰三角形的判定和性质.

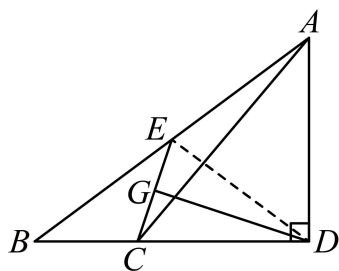
(1) 连接 DE , 得到 $DE = \frac{1}{2}AB = BE = CD$, 根据三线合一, 即可得证;

(2) 三线合一, 得到 $\angle CDE = 2\angle CDG$, 根据 $DE = BE$, 得到 $\angle B = \angle CDE$, 即可得证;

掌握斜边上的中线等于斜边的一半, 是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 连接 DE ,



$\because AE = BE, \angle D = 90^\circ,$

$\therefore DE = \frac{1}{2}AB = BE,$

$\because DC = BE,$

$\therefore DE = DC,$

$\because$ 点 G 是 CE 的中点,

$\therefore DG \perp EC;$

【小问 2 详解】

由 (1) 知: $DE = DC = BE$,

$$\therefore \angle B = \angle CDE,$$

$\because$ 点 G 是 CE 的中点,

$$\therefore \angle B = \angle CDE = 2\angle CDG.$$

24. 某商店从厂家以每件 30 元的价格购进一批商品, 经过市场调研发现, 若每件商品售价为 a 元, 则可以卖出 $(112 - 2a)$ 件; 但政府限定每件商品加价不能超过进价的 40%, 如果店家计划赚 330 元, 那么每件商品售价是多少元?

【答案】每件商品售价是 41 元

【解析】

【分析】本题考查一元二次方程的实际应用. 根据总利润等于单件利润乘以销量, 列出方程进行求解即可. 解题的关键的读懂题意, 正确的列出方程.

【详解】解: 由题意, 得: $(a - 30)(112 - 2a) = 330$,

解得: $a = 41$ 或 $a = 45$,

$\because$ 政府限定每件商品加价不能超过进价的 40%,

$$\therefore a < 30(1 + 40\%) = 42,$$

$$\therefore a = 41.$$

答: 每件商品售价是 41 元.

25. 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(m, n)$ 在第一象限内, $AB \perp OA$, 且 $AB = OA$, 反比例函数

$y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点 A .

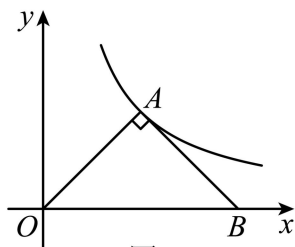


图1

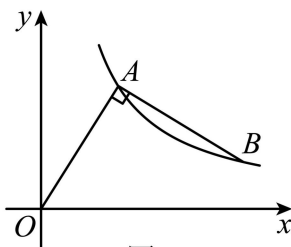


图2

(1) 当点 B 的坐标为 $(4, 0)$ 时 (如图 1), 求这个反比例函数的解析式;

(2) 当点 B 也在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上, 且在点 A 的右侧时 (如图 2), 用 m 、 n 的代数式表示点 B 的

坐标；并求 $\frac{m}{n}$ 的值.

【答案】(1) $y = \frac{4}{x}$

(2) $\frac{m}{n} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

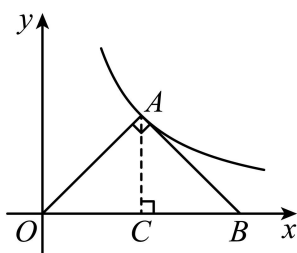
【解析】

【分析】(1) 过 A 作 $AC \perp OB$ ，根据三角形 AOB 为等腰直角三角形，得到 $AC = OC = BC = \frac{1}{2}OB$ ，确定出 A 坐标，代入反比例解析式求出 k 的值，即可确定出反比例解析式；

(2) 过 A 作 $AE \perp x$ 轴，过 B 作 $BD \perp AE$ ，利用同角的余角相等得到一对角相等，再由一对直角相等，且 $AO = AB$ ，利用 AAS 得出三角形 AOE 与三角形 ABD 全等，由确定三角形的对应边相等得到 $BD = AE = n$ ， $AD = OE = m$ ，进而表示出 ED 及 $OE + BD$ 的长，即可表示出 B 坐标；由 A 与 B 都在反比例图象上，得到 A 与 B 横纵坐标乘积相等，列出关系式，变形后即可求解.

【小问 1 详解】

解：过 A 作 $AC \perp OB$ ，交 x 轴于点 C ，



$$\because OA = AB, \quad \angle OAB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore AC = OC = BC = \frac{1}{2}OB = 2,$$

$$\therefore A(2, 2),$$

将 $x = 2$ ， $y = 2$ 代入反比例解析式 $y = \frac{k}{x}$ ，

$$\text{并解得： } k = 2 \times 2 = 4,$$

$$\text{则反比例解析式为 } y = \frac{4}{x};$$

【小问 2 详解】

解：过 A 作 $AE \perp x$ 轴，过 B 作 $BD \perp AE$ ，

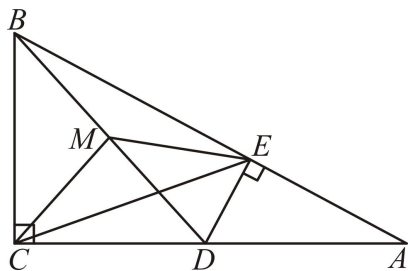
直角三角形的性质，以及一元二次方程的解法，熟练掌握反比例函数的性质是解本题的关键.

26. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle A=30^\circ$ ，D是边AC上不与点A、C重合的任意一点， $DE \perp AB$ ，垂足为点E，M是BD的中点.

(1) 求证： $CM=EM$ ；

(2) 如果 $BC=\sqrt{3}$ ，设 $AD=x$ ， $CM=y$ ，求y与x的函数解析式，并写出函数的定义域；

(3) 当点D在线段AC上移动时， $\angle MCE$ 的大小是否发生变化？如果不变，求出 $\angle MCE$ 的大小；如果发生变化，说明如何变化.



【答案】(1) 证明见解析；(2) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 12}}{2}$ ($0 < x < 3$)；(3) 不变， 30° .

【解析】

【分析】(1) 根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半即可证明；

(2) 根据 $CM = \frac{1}{2}BD$ ，可得 $BD=2y$ ，根据勾股定理又可得出BD用x表示的形式，换成等式即可得出y与x的函数解析式；

(3) 根据(1)可知， $\angle MBC = \angle MCB$ ， $\angle MEB = \angle MBE$ ，易得出 $\angle CMD = 2\angle CBM$ ， $\angle DME = 2\angle MBE$ ，即 $\angle CME = 2\angle CBA$ 是定值，又知 $CM=ME$ ，即可证明 $\angle MCE$ 是定值，即可得出结论.

【详解】(1) 证明： $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，M是BD的中点，

$$\therefore CM = \frac{1}{2}BD.$$

$$\text{同理 } ME = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore CM=ME.$$

(2) 解： $\because$ 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $\angle A=30^\circ$ ， $BC=\sqrt{3}$ ，

$$\therefore AB=2BC=2\sqrt{3}.$$

由勾股定理得 $AC=3$ ，

$$\therefore AD=x, \therefore CD=3-x,$$

在 $Rt\triangle BCD$ 中， $\angle BCD=90^\circ$ ，

$$\therefore BD^2 = BC^2 + CD^2,$$

$$\therefore BD = \sqrt{3 + (3-x)^2},$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2}BD, \quad CM = y,$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 12}}{2} \quad (0 < x < 3),$$

(3) 不变.

$\because M$ 是 $Rt\triangle BCD$ 斜边 BD 的中点, $\therefore MB = MC$, $\therefore \angle MBC = \angle MCB$.

$$\therefore \angle CMD = \angle MBC + \angle MCB = 2\angle MBC,$$

$\because M$ 是 $Rt\triangle BED$ 斜边 BD 的中点,

同理可得: $\angle EMD = 2\angle MBE$,

$$\angle CMD + \angle EMD = 2\angle MBC + 2\angle MBE = 2(\angle MBC + \angle MBE) = 2\angle ABC,$$

$$\text{即 } \angle CME = 2\angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore MC = ME,$$

$$\therefore \angle MCE = \angle MEC = 30^\circ.$$

【点睛】考查了直角三角形斜边上的中线, 含 30° 角的直角三角形以及勾股定理的知识, 难度较大, 熟练掌握各个知识点是解答本题的关键.