

2023 学年第一学期八年级数学学科期末质量调研

(满分 100 分, 时间 90 分钟)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分) [下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 请选择正确项的代号直接填入答题纸的相应位置]

1. 下列二次根式中, 属于最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{\frac{x}{3}}$ C. $\sqrt{a^4}$ D. $\sqrt{a^2 - b^2}$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查的是最简二次根式的概念, 被开方数不含分母、被开方数中不含能开得尽方的因数或因式的二次根式, 叫做最简二次根式. 根据最简二次根式的概念判断即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$, 被开方数中含能开得尽方的因数, 不是最简二次根式, 不符合题意;

B、 $\sqrt{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{3x}}{3}$, 被开方数含分母, 不是最简二次根式, 不符合题意;

C、 $\sqrt{a^4} = a^2$, 被开方数中含能开得尽方的因式, 不是最简二次根式, 不符合题意;

D、 $\sqrt{a^2 - b^2}$ 是最简二次根式, 符合题意;

故选: D.

2. 如果 $\sqrt{n}$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 那么下列各数中, n 可以取的数为 ().

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】 先化简二次根式, 然后再判断是否与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式.

【详解】 解: A、 $\sqrt{4} = 2$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

B、 $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

C、 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式, 正确;

D、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

故选：C.

【点睛】本题考查了同类二次根式的定义. 要化简为最简二次根式后再判断.

3. 下列方程中，没有实数根的是（ ）

- A. $x^2 - 3x - 1 = 0$ B. $x^2 - 3x = 0$ C. $x^2 - 2x + 1 = 0$ D. $x^2 - 2x + 3 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】利用一元二次方程根的判别式，即可求解.

【详解】解：A、 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) = 13 > 0$ ，所以方程有两个不相等的实数根，故本选项不符合题意；

B、 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 0 = 9 > 0$ ，所以方程有两个不相等的实数根，故本选项不符合题意；

C、 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 = 0$ ，所以方程有两个相等的实数根，故本选项不符合题意；

D、 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$ ，所以方程没有的实数根，故本选项符合题意；

故选：D

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根的判别式，熟练掌握二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，当

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时，方程没有实数根是解题的关键.

4. 满足下列条件的三角形中，不是直角三角形的是（ ）

- A. 三内角之比为 3：4：5 B. 三边长的平方之比为 1：2：3
C. 三边长之比为 7：24：25 D. 三内角之比为 1：2：3

【答案】A

【解析】

【分析】根据勾股定理逆定理及三角形内角和可直接进行排除选项.

【详解】解：A、由三内角之比为 3：4：5 可设这个三角形的三个内角分别为 $3k, 4k, 5k$ ，根据三角形内角和可得 $3k + 4k + 5k = 180^\circ$ ，所以 $k = 15^\circ$ ，所以这个三角形的最大角为 $5 \times 15^\circ = 75^\circ$ ，故不是直角三角形，符合题意；

B、由三边长的平方之比为 1：2：3 可知该三角形满足勾股定理逆定理，即 $1+2=3$ ，所以是直角三角形，故不符合题意；

C、由三边长之比为 7：24：25 可设这个三角形的三边长分别为 $7k, 24k, 25k$ ，则有 $(7k)^2 + (24k)^2 = (25k)^2$ ，

所以是直角三角形，故不符合题意；

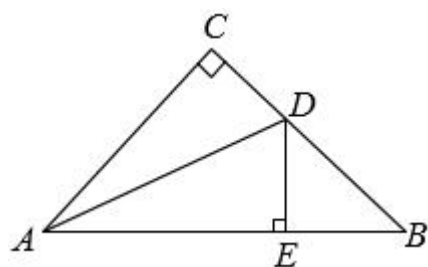
D、由三内角之比为 1: 2: 3 可设这个三角形的三个内角分别为 $k, 2k, 3k$ ，根据三角形内角和可得

$k + 2k + 3k = 180^\circ$ ，所以 $k = 30^\circ$ ，所以这个三角形的最大角为 $3 \times 30^\circ = 90^\circ$ ，是直角三角形，故不符合题意；

故选 A.

【点睛】 本题主要考查勾股定理逆定理及三角形内角和，熟练掌握勾股定理逆定理及三角形内角和是解题的关键.

5. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， AD 平分 $\angle CAB$ ，交 BC 于 D ， $DE \perp AB$ 于 E ， $AB = 10\text{cm}$ ，则 $\triangle DEB$ 的周长为 ()



A. 8cm

B. 10cm

C. 12cm

D. 14cm

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据等腰直角三角形的性质可得出 $BE = DE$ ，由角平分线的性质可得出 $DE = DC$ 、 $AE = AC$ ，根据周长的定义即可得出 $C_{\triangle DEB} = BE + DE + BD = AB = 10$ ，此题得解.

【详解】 解： $\because \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle B = 45^\circ$ ，

$\because DE \perp AB$ ，即 $\angle DEB = \angle DEA = 90^\circ$

$\therefore \angle EDB = \angle B = 45^\circ$

$\therefore DE = BE$

$\therefore \triangle BDE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore BE = DE$.

$\because AD$ 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于 D ，

$\therefore DE = DC$ ，

又 $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle DEA = 90^\circ$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle AED$ 中，

$$\therefore \begin{cases} DC = DE \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AED$$

$$\therefore AE = AC,$$

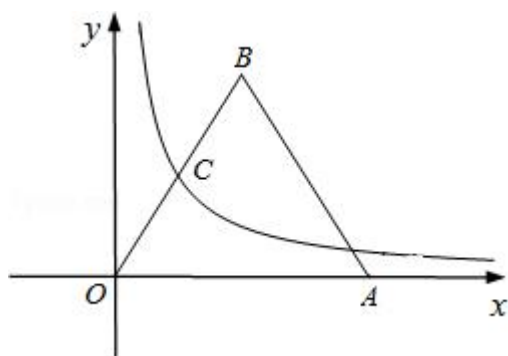
$$\therefore C_{\triangle DEB} = BE + DE + BD = BE + DC + BD = BE + BC = BE + AE = AB = 10\text{cm}.$$

故选：B.

【点睛】本题考查了等腰直角三角形以及角平分线的性质，根据角平分线的性质结合等腰直角三角形的性质找出 $BE = DE$ 、 $DE = DC$ 、 $AE = AC$ 是解题的关键.

6. 如图，等边三角形 OAB 的一边 OA 在 x 轴上，双曲线 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ 在第一象限内的图象经过 OB 边的中点 C，

则点 B 的坐标是



A. $(1, \sqrt{3})$

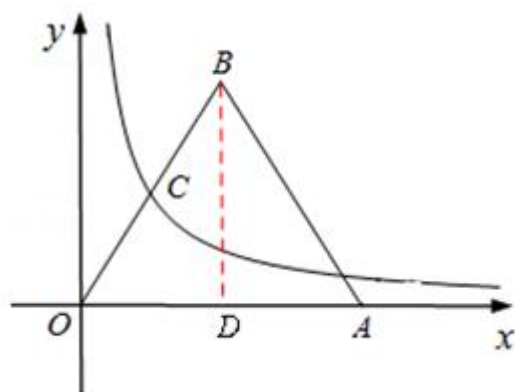
B. $(\sqrt{3}, 1)$

C. $(2, 2\sqrt{3})$ D. $(2\sqrt{3}, 2)$

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：如图，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴，垂足为 D，设点 B 的坐标为 (a, b) ($a > 0$),



$\therefore$ 三角形 OAB 是等边三角形， $\therefore \angle BOA = 60^\circ$.

$$\text{在 Rt}\triangle BOA \text{ 中, } \tan 60^\circ = \frac{OB}{OD} = \frac{b}{a} = \sqrt{3},$$

$\therefore b = \sqrt{3}a$. $\therefore$ 点 B 的坐标为 $(a, \sqrt{3}a)$.

$\therefore$ 点 C 是 OB 的中点, $\therefore$ 点 C 坐标为 $\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$.

$\therefore$ 点 C 在双曲线 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ 上, $\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}$.

$\therefore a = 2$ (负值已舍去).

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(2, 2\sqrt{3})$. 故选 C.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分) [请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 方程 $x^2 = x$ 的解是_____

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 1$

【解析】

【分析】 移项后根据因式分解法求解方向即可. 解题的关键是因式分解法在解一元二次方程中的灵活运用.

【详解】 $\because x^2 = x$

$$\therefore x(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x - 1 = 0$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = 1$$

故答案为: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

8. 函数 $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x-3}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \leq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了函数自变量的范围. 根据被开方数大于等于 0 以及分式的分母不能为 0 列式计算即可得解.

【详解】 解: 由题意得, $2-x \geq 0$, $x-3 \neq 0$,

解得 $x \leq 2$ 且 $x \neq 3$.

故答案为: $x \leq 2$.

9. 函数 $f(x) = \frac{2}{2-x}$, 则 $f(\sqrt{2}) =$ _____.

【答案】 $2+\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据题目所给函数，代入求函数值即可.

【详解】 解: $\because f(x)=\frac{2}{2-x}$,

$$\therefore f(\sqrt{2})=\frac{2}{2-\sqrt{2}}=\frac{2(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}=2+\sqrt{2},$$

故答案为: $2+\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了求函数值以及分母有理化, 读懂题意, 熟练掌握分母有理化是解本题的关键.

10. 写出一个一元二次方程的一般式, 使它同时满足以下要求: ①二次项系数为 2, ②两根分别为 3 和 $-\frac{1}{2}$:
_____.

【答案】 $2x^2-5x-3=0$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 本题考查了根与系数的关系. 先计算 3 与 $-\frac{1}{2}$ 的和与积, 则根据根与系数的关系得到方程 $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$, 然后把系数化为整数系数即可.

【详解】 解: $\because 3+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$, $3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 以 3 和 $-\frac{1}{2}$ 为根的一元二次方程可为 $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}=0$,

即 $2x^2-5x-3=0$.

故答案为: $2x^2-5x-3=0$.

11. 定理“全等三角形的对应角相等”_____ (填“有”或“没有”) 逆定理.

【答案】 没有

【解析】

【分析】 本题考查了定理和逆定理之间的关系, 要注意, 一个命题肯定有逆命题, 但一个定理不一定有逆定理, 只有当一个定理的逆命题经过推理是正确的命题, 这个定理的逆命题才是逆定理, 据此写出命题“全等三角形的对应角相等”的逆命题, 再判断真假即可得到答案.

【详解】 解: 命题“全等三角形的对应角相等”的逆命题为“对应角相等的两个三角形全等”, 这是一个

假命题,

∴定理“全等三角形的对应角相等”没有逆定理,

故答案为: 没有.

12. 已知线段 $AB=3$, 那么满足 $AP+BP=3$ 的点 P 的轨迹是_____.

【答案】 AB

【解析】

【分析】 本题考查了点的轨迹. 根据点的轨迹即可求解.

【详解】 解: $\because AB=3, AP+BP=3$,

∴点 P 的轨迹是线段 AB .

故答案为: AB .

13. 已知直角坐标平面上点 $P(-1,2)$ 和 $Q(3,0)$, 则 $PQ=_____$.

【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面直角坐标系中两点的距离. 根据平面直角坐标系中两点的距离公式直接计算即可.

【详解】 解: $\because P(-1,2)$ 和 $Q(3,0)$,

$$\therefore PQ = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

故答案为: $2\sqrt{5}$.

14. 一种型号的手机, 原来每台售价 7500 元, 经过两次降价后, 现在每台售价为 4800 元, 假设两次降价的百分率均为 x , 则 $x=_____$.

【答案】 20%

【解析】

【分析】 设两次降价的百分率均为 x , 根据两次降价后, 售价从 7500 元到 4800 元列出方程求解即可.

【详解】 设两次降价的百分率均为 x , 根据题意得,

$$7500(1-x)^2 = 4800,$$

解得 $x=20\%$ 或 $x=180\%$ (舍去),

∴两次降价的百分率均为 20%,

故答案为: 20%.

【点睛】 本题主要考查一元二次方程的应用, 读懂题意列出方程是关键.

15. 如果直角三角形的面积是 8, 斜边上的高是 2, 那么斜边上的中线长是_____.

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形斜边上的中线的性质. 设直角三角形的斜边长为 x , 根据三角形的面积可得: $x = 8$, 然后利用直角三角形斜边上的中线性质的计算, 即可解答.

【详解】解: 设直角三角形的斜边长为 x ,

$\because$ 直角三角形的面积是 8, 斜边上的高是 2,

$$\therefore \frac{1}{2}x \cdot 2 = 8,$$

解得: $x = 8$,

$\therefore$ 直角三角形的斜边长为 8,

$\therefore$ 斜边上的中线长是 4,

故答案为: 4.

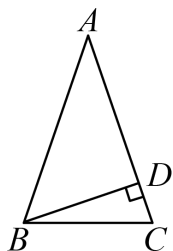
16. 若等腰三角形一腰上的高等于腰长的一半, 则这个等腰三角形的底角为_____.

【答案】 75° 或 15°

【解析】

【分析】分该三角形顶角为锐角和该三角形顶角为钝角两种情况, 结合“直角三角形中 30° 度角所对的直角边等于斜边的一半”的逆用以及等腰三角形的性质, 即可获得答案.

【详解】解: (1) 当该三角形顶角为锐角时, 如下图,

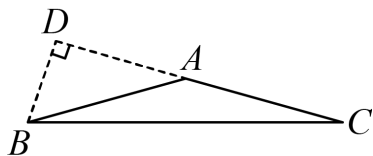


由题意可知, $AB = AC$, $BD \perp AC$, 且 $BD = \frac{1}{2}AB$,

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle A) = 75^\circ;$$

(2) 当该三角形顶角为钝角时, 如下图,



由题意可知, $AB = AC$, $BD \perp AC$, 且 $BD = \frac{1}{2}AB$,

$$\therefore \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2} \angle BAD = 15^\circ.$$

综上所述，这个等腰三角形的底角为 75° 或 15° 。

故答案为： 75° 或 15° 。

【点睛】 本题主要考查了含 30° 度角的直角三角形的性质、等腰三角形的性质、三角形内角和定理、三角形外角的定义和性质等知识，运用分类讨论的思想分析问题是解题关键。

17. 已知直角三角形两边 x 、 y 的长满足 $|x^2 - 4| + \sqrt{y^2 - 5y + 6} = 0$ ，则第三边的长_____。

【答案】 $2\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{13}$ 或 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 根据绝对值、算术平方根的非负性分别求出 x 、 y ，分三种情况讨论，根据勾股定理计算，得到答案。

【详解】 解： $\because x$ 、 y 为直角三角形的两边长，满足 $|x^2 - 4| + \sqrt{y^2 - 5y + 6} = 0$ ，

$$\therefore x^2 - 4 = 0, \quad y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3) = 0,$$

解得 $x = \pm 2$ （负值不合题意，舍去）， $y = 2$ 或 $y = 3$ ，

当直角边长分别为 2，2 时，则第三边长为： $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ；

当直角边长分别为 2，3 时，则第三边长为： $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ ；

当直角边长为 2，斜边长为 3，则第三边长为 $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ 。

故答案为： $2\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{13}$ 或 $\sqrt{5}$ 。

【点睛】 此题考查勾股定理、非负数的性质，如果直角三角形的两条直角边长分别是 a ， b ，斜边长为 c ，那么 $a^2 + b^2 = c^2$ 。

18. 我们规定：如果一个三角形一边上的高等于这条边，那么这个三角形叫做“等高底”三角形，这条边叫做这个三角形的“等底”。如图，已知直线 $l_1 \parallel l_2$ ， l_1 与 l_2 之间的距离是 3，“等高底” $\triangle ABC$ 的“等底” BC 在直线 l_1 上（点 B 在点 C 的左侧），点 A 在直线 l_2 上， $AB = \sqrt{2}BC$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，点 A 、 C 的对应点分别为点 A_1 、 C_1 ，那么 A_1C 的长为_____。

_____ l_2

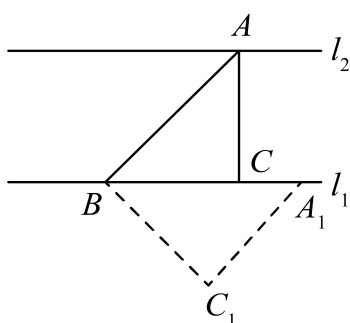
_____ l_1

【答案】 $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2}-3$

【解析】

【分析】 根据题意分情况画出相应图，然后根据旋转性质找到线段对应关系求解即可.

【详解】 解：当如下图所示时，



$$BC = 3, \quad AB = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{2},$$

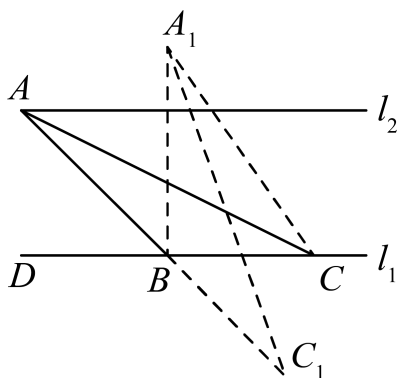
$\because$ 点 A 到直线 l_1 的距离为 3,

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$,

$$A_1C = A_1B - BC = 3\sqrt{2} - 3;$$

当如下图所示时，



$$BC = 3, \quad AB = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{2},$$

$\because$ 点 A 到直线 l_1 的距离为 3,

$$\therefore \angle ABD = 45^\circ, \angle ABC = 135^\circ,$$

将 $\triangle ABC$ 绕点 B 顺时针旋转 45° 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle ABA_1 = 45^\circ$, $A_1B = AB = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore \angle A_1BC = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle A_1BC \text{ 中, } A_1C = \sqrt{A_1B^2 + BC^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = 3\sqrt{3},$$

故答案为: $3\sqrt{3}$ 或 $3\sqrt{2} - 3$.

【点睛】 本题考查了旋转性质、勾股定理、二次根式的运算等知识, 分情况讨论并画出相应图像是解题关键.

三、简答题 (本大题共 5 题, 满分 32 分) [将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上]

19. 计算: $(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 3\sqrt{\frac{1}{2}}.$

【答案】 $8 - 2\sqrt{3} - \frac{7\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次根式的混合运算. 先算除法及乘法, 再算加减即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 3\sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 + \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 - 2 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ &= 8 - 2\sqrt{3} - \frac{7\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

20. 用配方法解方程: $2x^2 - 4x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$

【解析】

【分析】 根据配方法解一元二次方程的方法步骤求解即可得到答案.

【详解】解: $2x^2 - 4x - 1 = 0,$

移项得 $2x^2 - 4x = 1$,

系数化为 1 得 $x^2 - 2x = \frac{1}{2}$,

配方得 $x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2} + 1$,

因式分解得 $(x-1)^2 = \frac{3}{2}$,

即 $x-1 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$,

$\therefore x_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}, x_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$.

【点睛】 本题考查配方法解一元二次方程的方法步骤, 熟练掌握配方法解一元二次方程是解决问题的关键.

21. 已知 $y = y_1 + y_2$, y_1 与 x 成正比例, y_2 与 $x-2$ 成反比例, 且当 $x=1$ 时, $y=-1$; 当 $x=3$ 时, $y=5$. 求 y 与 x 的函数关系式.

【答案】 $y = x + \frac{2}{x-2}$

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数和反比例函数定义的应用. 由题意设 $y_1 = ax$, $y_2 = \frac{b}{x-2}$ 则 $y = ax + \frac{b}{x-2}$, 将已知的 x 和 y 的值代入可求出 a 和 b 的值, 从而可得 y 与 x 之间的函数关系.

【详解】 解: 由题意设 $y_1 = ax$, $y_2 = \frac{b}{x-2}$,

则 $y = ax + \frac{b}{x-2}$,

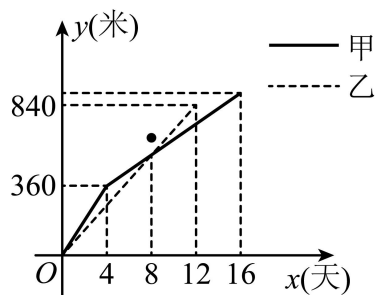
将 $x=1$ 时, $y=-1$ 和 $x=3$ 时, $y=5$ 代入得:

$$\begin{cases} a-b=-1 \\ 3a+b=5 \end{cases}$$

解得: $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$,

故 y 与 x 之间的函数关系为 $y = x + \frac{2}{x-2}$.

22. 某县在实施“村村通”工程中, 决定在 A、B 两村之间修筑一条公路, 甲、乙两个工程队分别从 A、B 两村同时相向开始修筑, 施工期间, 乙队因另有任务提前离开, 余下的任务由甲队单独完成, 直到道路修通. 下图是甲、乙两个工程队修道路的长度 y (米) 与修筑时间 x (天) 之间的函数图象, 请根据图象所提供的信息, 解答下列问题:



- (1) 写出乙工程队修道路的长度 y 与修筑时间 x 之间的函数关系式: _____;
- (2) 甲工程队前 4 天平均每天修路_____米, 后 12 天平均每天修路_____米;
- (3) 该公路的总长度为_____米.

【答案】 (1) $y = 70x$

(2) 90; 50 (3) 1800

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的应用.

- (1) 设出正比例函数解析式, 把 $(12, 840)$ 代入可得所求函数解析式;
- (2) 让前 4 天修路的总路程除以 4 即可得到甲工程队前 4 天平均每天修路米数, 求得甲在第 4 天到第 16 天的函数解析式, 进而求得后 12 天修路的总路程, 除以 12 即为后 12 天平均修路的米数;
- (3) 让甲修路的总路程 + 乙修路的总路程即为公路的总长度.

【小问 1 详解】

解: 设 $y = kx$,

$\because$ 经过 $(12, 840)$,

$$\therefore 12k = 840,$$

解得 $k = 70$,

$$\therefore y = 70x,$$

故答案为: $y = 70x$;

【小问 2 详解】

解: 甲工程队前 4 天平均每天修路米数为 $360 \div 4 = 90$;

当 $x = 8$ 时, $y = 560$,

设当 $4 \leq x \leq 16$ 时, 甲工程队的函数解析式为 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} 4k + b = 360 \\ 8k + b = 560 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 50 \\ b = 160 \end{cases},$$

$$\therefore y = 50x + 160,$$

$$\text{当 } x = 16 \text{ 时, } y = 960,$$

$$\therefore \text{后 } 12 \text{ 天平均每天修路米数为 } (960 - 360) \div 12 = 50.$$

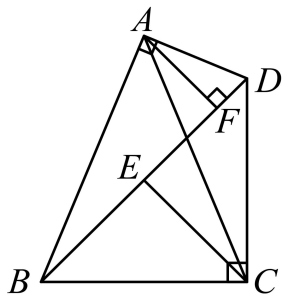
故答案为: 90; 50;

【小问 3 详解】

解: 公路的总长度为 $840 + 960 = 1800$ 米,

故答案为: 1800.

23. 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, AC 平分 $\angle BAD$, 点 E 是 BD 中点, $AF \perp BD$, 垂足为点 F . 求证:



$$(1) \angle ABF = \angle DAF;$$

$$(2) CB = CD.$$

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由垂直的定义得到 $\angle AFD = \angle BAD = 90^\circ$, 再由三角形内角和定理得到 $\angle ABF + \angle ADB = 90^\circ = \angle DAF + \angle ADF$, 则 $\angle ABF = \angle DAF$;

(2) 如图所示, 连接 AE , 根据直角三角形的性质得到 $AE = CE = BE = \frac{1}{2}BD$, 则 $\angle EAB = \angle EBA = \angle DAF$, $\angle EAC = \angle ECA$, 再由角平分线的定义证明 $\angle EAC = \angle FAC = \angle ECA$, 推出 $AF \parallel CE$, 即可证明 CE 垂直平分 BD , 则 $BC = CD$.

【小问 1 详解】

证明: $\because AF \perp BD$,

$$\therefore \angle AFD = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle ADB = 90^\circ = \angle DAF + \angle ADF,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle DAF;$$

【小问 2 详解】

证明：如图所示，连接 AE ，

$$\because \angle BAD = \angle BCD = 90^\circ, E \text{ 是 } BD \text{ 中点},$$

$$\therefore AE = CE = BE = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EBA = \angle DAF, \angle EAC = \angle ECA,$$

$$\therefore AC \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAC,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle EAC = \angle DAF + \angle FAC,$$

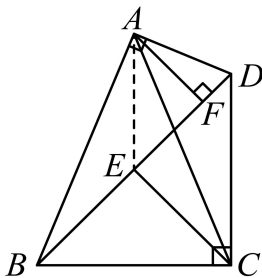
$$\therefore \angle EAC = \angle FAC = \angle ECA,$$

$$\therefore AF \parallel CE,$$

$$\therefore CE \perp BD,$$

$$\therefore CE \text{ 垂直平分 } BD,$$

$$\therefore BC = CD.$$



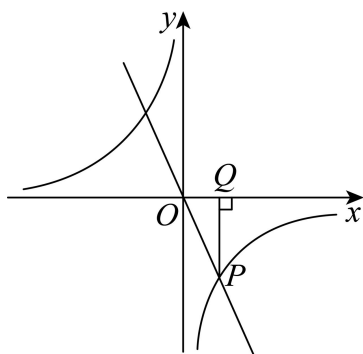
【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质与判定，直角三角形的性质，角平分线的定义，三角形内角和定理，相等垂直平分线的性质与判定等等，熟知直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键。

四、解答题：（本大题共 2 题，满分 20 分）[将下列各题的解答过程，做在答题纸的相应位置上]

24. 已知：如图，点 P 是一个反比例函数的图象与正比例函数 $y = -2x$ 的图象的公共点，PQ 垂直于 x 轴，垂足 Q 的坐标为 (2, 0)。

(1) 求这个反比例函数的解析式；

(2) 如果点 M 在这个反比例函数的图象上，且 $\triangle MPQ$ 的面积为 6，求点 M 的坐标。



【答案】(1) $y = -\frac{8}{x}$; (2) M $(5, -\frac{8}{5})$ 或 $(-1, 8)$.

【解析】

【分析】(1) 由 Q (2, 0), 推出 P (2, -4), 利用待定系数法即可解决问题;

(2) 根据三角形的面积公式求出 MN 的长, 分两种情形求出点 M 的坐标即可.

【详解】(1) 把 $x=2$ 代入 $y=-2x$ 得 $y=-4$

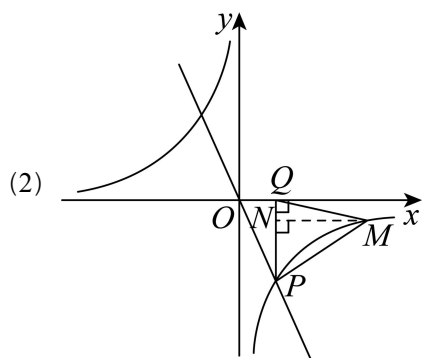
$\therefore P(2, -4)$,

设反比例函数解析式 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$),

$\therefore P$ 在此图象上

$\therefore k = 2 \times (-4) = -8$,

$\therefore y = -\frac{8}{x}$;



$\therefore P(2, -4), Q(2, 0)$

$\therefore PQ=4$, 过 M 作 $MN \perp PQ$ 于 N.

则 $\frac{1}{2} \cdot PQ \cdot MN = 6$,

$\therefore MN=3$,

设 M $(x, -\frac{8}{x})$,

则 $x=2+3=5$ 或 $x=2-3=-1$

当 $x=5$ 时, $-\frac{8}{x} = -\frac{8}{5}$,

当 $x=-1$ 时, $-\frac{8}{x} = 1$,

$\therefore M(5, -\frac{8}{5})$ 或 $(-1, 8)$.

故答案为 (1) $y = -\frac{8}{x}$; (2) $M(5, -\frac{8}{5})$ 或 $(-1, 8)$.

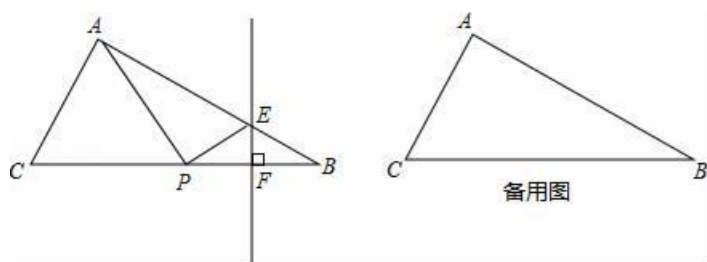
【点睛】 本题考查反比例函数与一次函数的交点问题, 解题的关键是用待定系数法求反比例函数的解析式, 利用数形结合的思想表示出三角形的面积也是解答本题的关键.

25. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AC=2\sqrt{3}$, $BC=4\sqrt{3}$, $AB=6$, 点 P 是射线 CB 上一点 (不与点 B 重合), EF 为 PB 的垂直平分线, 交 PB 于点 F , 交射线 AB 于点 E , 联结 PE 、 AP .

(1) 求 $\angle B$ 的度数;

(2) 当点 P 在线段 CB 上时, 设 $BE=x$, $\triangle ACP$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出函数的定义域;

(3) 如果 $BE=2$, 请直接写出 $\triangle ACP$ 的面积.



【答案】 (1) $\angle B=30^\circ$. (2) $y=6\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}x$, ($0 < x < 4$); (3) $9\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 先根据勾股定理逆定理判断出 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 再由 $AC=\frac{1}{2}BC$ 即可得出答案;

(2) 作 $AD \perp BC$, 垂足为点 D . 由直角三角形 30° 角所对边等于斜边一半知 $AD=\frac{1}{2}AB=3$, $EF=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}x$,

根据勾股定理知 $BF=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, 继而由 $S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}CP \cdot AD$ 可得答案.

(3) 点 P 在线段 BC 上时, 由 $BE=2$ 知 $x=2$, 代入 (2) 中所得解析式计算即可得; 当点 P 在射线 CB 上时, 作 $AM \perp BC$, 根据已知条件得出 $EF=\frac{1}{2}BE=1$, $PF=BF=\sqrt{3}$, $AM=\frac{1}{2}AB=3$, 利用三角形的面积公式计算可得.

【详解】 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\because AC=2\sqrt{3}, BC=4\sqrt{3} AB=6,$$

$$\therefore AC^2+AB^2=48, BC^2=48,$$

$$\therefore AC^2+AB^2=BC^2.$$

$$\therefore \angle BAC=90^\circ.$$

$$\text{又} \because AC=2\sqrt{3}, BC=4\sqrt{3},$$

$$\therefore AC \frac{1}{2} = BC,$$

$$\therefore \angle B=30^\circ.$$

(2) 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为点 D.

在 $\triangle ADB$ 中, $\because \angle ADB=90^\circ, \angle B=30^\circ$,

$$\therefore AD=\frac{1}{2} AB=3,$$

$$\text{同理, } EF=\frac{1}{2} BE=\frac{1}{2} x.$$

在 $\text{Rt}\triangle EFB$ 中, $EF^2+FB^2=EB^2$, 即 $(\frac{1}{2}x)^2+BF^2=x^2$,

$$\therefore BF=\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\text{又} \because BP=2BF,$$

$$\therefore BP=\sqrt{3}x.$$

$$\therefore CP=CB-PB=4\sqrt{3}-\sqrt{3}x,$$

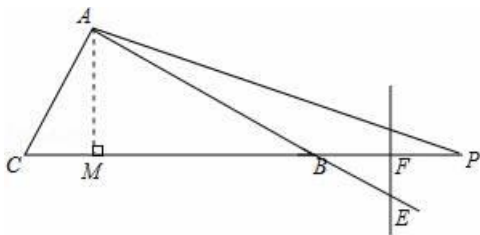
$$\therefore S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2} CP \cdot AD,$$

$$\therefore y=\frac{1}{2} (4\sqrt{3}-\sqrt{3}x) \times 3=6\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}x, (0 < x < 4);$$

(3) 当点 P 在线段 BC 上时, 由 $BE=2$ 知 $x=2$,

由 (2) 知此时 $\triangle ACP$ 的面积为 $6\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2} \times 2=3\sqrt{3}$;

当点 P 在射线 CB 上时, 如图, 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M,



$$\because BE=2, \angle EBF=\angle ABC=30^\circ,$$

$$\therefore EF \frac{1}{2} = BE=1,$$

$$\text{则 } PF=BF=\sqrt{3},$$

$$\because AB=6,$$

$$\therefore AM=\frac{1}{2}AB=3,$$

$$\text{则 } \triangle ACP \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times PC \times AM = \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}) \times 3 = 9\sqrt{3}.$$

【点睛】本题是三角形的综合问题，解题的关键是掌握勾股定理及其逆定理、直角三角形的性质及三角形的面积公式和分类讨论思想的运用.