

## 2023-2024 学年上海市静教院附校八年级（上）期末数学试卷

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 下列各式中，与  $\sqrt{2}$  不是同类根式的是（ ）

- A.  $\sqrt{0.2}$                       B.  $\sqrt{\frac{1}{2}}$                       C.  $\sqrt{\frac{1}{8}}$                       D.  $\sqrt{50x^2}$

【答案】A

【解析】

【分析】先化成最简二次根式，再根据同类二次根式的定义，两个二次根式的被开方数相等判断即可．

【详解】解：A、 $\sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，与  $\sqrt{2}$  不是同类二次根式，故本选项正确；

B、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，与  $\sqrt{2}$  是同类二次根式，故本选项错误；

C、 $\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，与  $\sqrt{2}$  是同类二次根式，故本选项错误；

D、 $\sqrt{50x^2} = 5|x|\sqrt{2}$ ，与  $\sqrt{2}$  是同类二次根式，故本选项错误．

故选 A．

【点睛】本题考查同类二次根式的概念，同类二次根式是化为最简二次根式后，被开方数相同的二次根式称为同类二次根式．

2. 如果方程  $mx^2 - 6x + 1 = 0$  有实数根，那么  $m$  的取值范围是（ ）

- A.  $m < 9$  且  $m \neq 0$ ；                      B.  $m \leq 9$  且  $m \neq 0$ ；  
C.  $m < 9$ ；                      D.  $m \leq 9$ ．

【答案】D

【解析】

【分析】根据方程有实数根，分类讨论：当  $m = 0$  时， $-6x + 1 = 0$ ；当  $m \neq 0$  时， $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ ，分别进行求解即可．

【详解】解： $\because$  方程  $mx^2 - 6x + 1 = 0$  有实数根，

当  $m = 0$  时， $-6x + 1 = 0$ ，

解得  $x = \frac{1}{6}$ ,

当  $m \neq 0$  时,  $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times m \times 1 \geq 0$ ,

解得  $m \leq 9$ ,

$\therefore m$  的取值范围是  $m \leq 9$ ,

故选: D.

3. 下列说法正确的是( )

- A. 面积一定的平行四边形的一边和这边上的高成正比例
- B. 面积一定的平行四边形的一边和这边上的高成反比例
- C. 周长一定的等腰三角形的腰长与它底边的长成正比例
- D. 周长一定的等腰三角形的腰长与它底边的长成反比例

【答案】 B

【解析】

【分析】 利用正比、反比的性质进行判断即可.

【详解】 解: 面积一定的平行四边形的一边和这边上的高成反比例, 故 A 错误, B 正确;  
周长一定的等腰三角形的腰长与它底边的长成一次函数, 故 C、D 错误.

故选: B.

【点睛】 本题考查了正比、反比的性质, 平行四边形的面积公式, 等腰三角形的腰、底、周长的关系, 解决本题的关键是明确正比与反比的意义.

4. 某工厂第四季度的每月产值的增长率都是  $x$ , 其中 12 月份的产值是 100 万元, 那么 10 月份的产值是( )

- A.  $100(1-x^2)$ ;
- B.  $100(1-x)^2$ ;
- C.  $\frac{100}{(1+x)^2}$ ;
- D.  $\frac{100}{1+x^2}$ .

【答案】 C

【解析】

【分析】 设 9 月份的产值为  $a$ , 根据题意可得  $a(1+x)^3 = 100$ , 求得  $a = \frac{100}{(1+x)^3}$ , 即可求解.

【详解】 解: 设 9 月份的产值为  $a$ ,

由题意可得,  $a(1+x)^3 = 100$ ,

$\therefore a = \frac{100}{(1+x)^3}$ ,

$$\therefore 10 \text{ 月份的产值是 } \frac{100}{(1+x)^3} \cdot (1+x) = \frac{100}{(1+x)^2},$$

故选：C.

5. 用下列长度的三条线段为边能构成直角三角形是 ( )

A.  $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

B. 4, 5, 6

C. 17, 8, 15

D.  $1, 3, 2\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了勾股定理的逆定理，根据勾股定理的逆定理逐个判断即可．注意：如果一个三角形的两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形．

【详解】A.  $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \neq \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ，不能组成直角三角形，故本选项不符合题意．

B.  $4^2 + 5^2 \neq 6^2$ ，不能组成直角三角形，故本选项不符合题意；

C.  $8^2 + 15^2 = 17^2$ ，能组成直角三角形，故本选项符合题意；

D.  $1^2 + 3^2 \neq (2\sqrt{3})^2$ ，不能组成直角三角形，故本选项不符合题意；

故选：C.

6. 下列说法正确的是 ( )

A. 命题一定有逆命题

B. 所有的定理一定有逆定理

C. 真命题的逆命题一定是真命题

D. 假命题的逆命题一定是假命题

【答案】A

【解析】

【分析】根据命题的定义和定理及其逆定理之间的关系，分别举出反例，再进行判断，即可得出答案．

【详解】解：A、命题一定有逆命题，故此选项符合题意；

B、定理不一定有逆定理，如：全等三角形对应角相等没有逆定理，故此选项不符合题意；

C、真命题的逆命题不一定是真命题，如：对顶角相等的逆命题是：相等的两个角是对顶角，它是假命题而不是真命题，故此选项不符合题意；

D、假命题的逆命题定不一定是假命题，如：相等的两个角是对顶角的逆命题是：对顶角相等，它是真命题，故此选项不符合题意．

故选：A.

【点睛】本题考查了命题与定理，掌握好命题的真假及互逆命题的概念是解题的关键．把一个命题的条件

和结论互换就得到它的逆命题，所有的命题都有逆命题；正确的命题叫真命题，错误的命题叫假命题。

## 二、填空题：本题共 12 小题，每小题 2 分，共 24 分.

7. 当  $a < -1$  时， $\sqrt{(a+1)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $-a-1$  ##  $-(a+1)$  ##  $-1-a$  ##  $-(1+a)$

【解析】

【分析】 根据不等式的性质可得  $a+1 < 0$ ，再根据二次根式的性质求解即可.

【详解】 解：  $\because a < -1$ ,

$$\therefore a+1 < 0,$$

$$\therefore \sqrt{(a+1)^2} = -(a+1) = -a-1,$$

故答案为：  $-a-1$ .

8. 如果  $\sqrt{x^2(2+x)} = -x \cdot \sqrt{2+x}$ ，那么等式成立的条件是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $-2 \leq x \leq 0$  ##  $0 \geq x \geq -2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次根式的性质，求不等式组的解集，解题的关键是根据二次根式的性质得出  $x \leq 0$ ， $2+x \geq 0$ ，再求解即可.

【详解】 解：  $\because \sqrt{x^2(2+x)} = -x \cdot \sqrt{2+x}$ ,

$$\therefore \begin{cases} x \leq 0 \\ 2+x \geq 0 \end{cases},$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 0,$$

$$\therefore \text{等式成立的条件是： } -2 \leq x \leq 0,$$

故答案为：  $-2 \leq x \leq 0$ .

9. 计算：  $\frac{a-b}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

【解析】

【分析】 本题考查分母有理化和分数指数幂等知识，先把分数指数幂转化成二次根式，再利用平方差公式进行二次根式的有理化求解即可.

【详解】 解：  $\frac{a-b}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\
&= \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
&= \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \\
&= \sqrt{a}+\sqrt{b},
\end{aligned}$$

故答案为:  $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ .

10. 不等式:  $(\sqrt{3}-2)x < 1$  的解集是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x > -\sqrt{3}-2$

【解析】

【详解】  $\because \sqrt{3}-2 < 0$ ,

$\therefore (\sqrt{3}-2)x < 1$  的解集是:  $x > \frac{1}{\sqrt{3}-2}$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2} = \frac{(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = -\sqrt{3}-2.$$

故不等式的解集为:  $x > -\sqrt{3}-2$ .

故答案为  $x > -\sqrt{3}-2$ .

点睛: 解不等式的时候要判断不等式的符号是否需要改变, 掌握根式的估算及分母有理化.

11. 在实数范围内因式分解  $x^2y^2 - 3xy - 2 =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\left(xy - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(xy + \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)$

【解析】

【分析】 先利用配方法进行因式分解, 再利用平方差公式进行因式分解即可.

【详解】 解:  $x^2y^2 - 3xy - 2$

$$= (xy)^2 - 3xy + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 2$$

$$= \left( xy - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{17}{4}$$

$$= \left( xy - \frac{3}{2} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{17}}{2} \right)^2$$

$$= \left( xy - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \right) \left( xy - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \right)$$

$$= \left( xy - \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right) \left( xy + \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \right),$$

故答案为:  $\left( xy - \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \right) \left( xy + \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \right)$ .

12. 函数  $y = \frac{x-3}{2-x}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

【答案】  $x \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查了函数的自变量取值范围，分式有意义的条件，根据分数有意义的条件得到  $2-x \neq 0$ ，解得  $x \neq 2$ ，问题得解.

【详解】 解：由题意得  $2-x \neq 0$ ，

解得  $x \neq 2$ .

故答案为:  $x \neq 2$

13. 函数  $y = -\frac{2}{5x}$  的图像经过的象限是\_\_\_\_\_.

【答案】 二、四

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的性质，根据反比例函数  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，当  $k > 0$  时，图象经过第一、三象限，当  $k < 0$  时，图象经过第二、四象限，即可得出答案，熟练掌握反比例函数的性质是解此题的关键.

【详解】 解：  $\because y = -\frac{2}{5x} = -\frac{2}{5} \times \frac{1}{x} = -\frac{\frac{2}{5}}{x}$ ,

$$\therefore k = -\frac{2}{5} < 0,$$

$\therefore$  函数  $y = -\frac{2}{5x}$  的图像经过的象限是二、四，

故答案为: 二、四.

14. 函数  $y = \frac{x}{2m-3}$  ( $m$  为常数) 中,  $y$  的值随  $x$  的增大而减小, 那么  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $m < \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据一次函数的增减性与自变量的系数的关系可得  $2m-3 < 0$ , 再求解即可.

【详解】 解:  $\because$  函数  $y = \frac{x}{2m-3}$  ( $m$  为常数) 中,  $y$  的值随  $x$  的增大而减小,

$\therefore$  一次函数  $y = \frac{x}{2m-3}$  ( $m$  为常数) 经过第二、四象限,

$\therefore 2m-3 < 0$ ,

$\therefore m < \frac{3}{2}$ ,

故答案为:  $m < \frac{3}{2}$ .

15. “等腰三角形两腰上的高相等”的逆命题是\_\_\_\_\_

【答案】 若一个三角形两条边上的高相等, 则三角形是等腰三角形

【解析】

【分析】 把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题.

【详解】 解: 命题“等腰三角形两腰上的高相等”的逆命题: 若三角形两边上的高相等, 则这个三角形是等腰三角形.

故答案为: 若三角形两边上的高相等, 则这个三角形是等腰三角形.

【点睛】 本题主要考查命题与定理的知识点, 两个命题中, 如果第一个命题的条件是第二个命题的结论, 而第一个命题的结论又是第二个命题的条件, 那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题.

16. 已知线段  $AB$ , 以  $\angle A$  为顶角的等腰  $\triangle ABC$  的顶点  $C$  的轨迹是\_\_\_\_\_.

【答案】 以点  $A$  为圆心, 线段  $AB$  为半径的圆 (点  $B$  除外)

【解析】

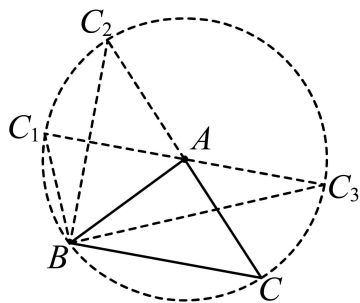
【分析】 根据等腰三角形的性质可得  $AB = AC$ , 即可求解.

【详解】 解: 如图,  $\because \triangle ABC$  是等腰三角形,  $\angle A$  为顶角,

$\therefore AB = AC$ ,

$\therefore$  顶点  $C$  的轨迹是以点  $A$  为圆心, 线段  $AB$  为半径的圆 (点  $B$  除外),

故答案为: 以点  $A$  为圆心, 线段  $AB$  为半径的圆 (点  $B$  除外).



17. 直角三角形的两条边长分别为 5, 12, 那么它斜边上的中线长是\_\_\_\_\_.

【答案】 6.5 或 6

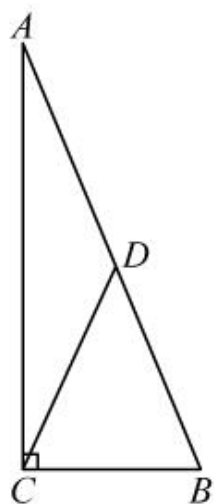
【解析】

【分析】 根据题意不能确定斜边，分情况讨论，当以 12 为斜边时，根据直角三角形的性质得出答案；当以 12,5 为直角边时，根据勾股定理求出斜边，再根据“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”得出答案.

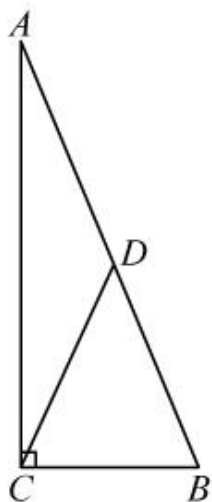
【详解】 当以 12 为斜边时，即  $AB = 12$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $CD$  为斜边的中线，

所以  $CD = \frac{1}{2} AB = 6$ ;



当以 5,12 为直角边时，如图，根据题意可知  $AC = 12$ ,  $BC = 5$ ,



勾股定理可知  $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ .

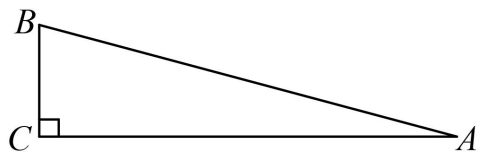
因为  $CD$  是斜边上的中线,

所以  $CD = \frac{1}{2} AB = 6.5$ .

故答案为: 6.5 或 6.

【点睛】 本题主要考查了勾股定理, 直角三角形斜边中线的性质等, 勾股定理是求线段长的常用方法.

18. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 15^\circ$ ,  $AB = 6$ , (如图), 点  $D$  是  $AB$  的中点, 将  $\triangle ACD$  沿直线  $CD$  翻折后点  $A$  落在点  $E$ , 那么  $BE$  的长为\_\_\_\_\_.



【答案】  $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 连接  $AE$ , 过点  $E$  作  $EG \perp AB$  于点  $G$ , 由折叠的性质得,  $CE = CA$ ,  $\angle ECD = \angle ACD$ ,  $\angle CDE = \angle CDA$ ,  $ED = AD$ , 根据直角三角形的性质可得  $CD = AD = 3$ , 由三角形外角的性质可得  $\angle BDC = 30^\circ$ , 根据直角三角形的性质求得  $\angle DEG = 30^\circ$ ,  $DG = \frac{1}{2} DE = \frac{3}{2}$ , 利用勾股定理求得

$EG = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 从而可得  $BG = \frac{9}{2}$ , 再利用勾股定理即可求解.

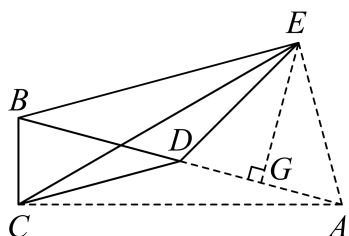
【详解】 解: 如图, 连接  $AE$ , 过点  $E$  作  $EG \perp AB$  于点  $G$ ,

由折叠的性质得,  $CE = CA$ ,  $\angle ECD = \angle ACD$ ,  $\angle CDE = \angle CDA$ ,  $DE = AD$ ,

$\because \angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 15^\circ$ , 点  $D$  是  $AB$  的中点,

$$\begin{aligned}
&\therefore CD = AD = 3, \\
&\therefore \angle DCA = \angle DAC = 15^\circ, \\
&\therefore \angle BDC = \angle DCA + \angle A = 30^\circ, \\
&\therefore DE = AD = 3, \\
&\therefore \angle CDE = \angle CDA = 180^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 150^\circ, \\
&\therefore \angle BDE = \angle CDE - \angle BDC = 150^\circ - 30^\circ = 120^\circ, \\
&\therefore \angle EDG = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ, \\
&\therefore \angle EGD = 90^\circ, \\
&\therefore \angle DEG = 30^\circ, \\
&\therefore DG = \frac{1}{2}DE = \frac{3}{2}, \\
&\therefore EG = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \\
&\therefore BG = BD + DG = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}, \\
&\text{在 } Rt\triangle EGB \text{ 中, } BE = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = 3\sqrt{3},
\end{aligned}$$

故答案为:  $3\sqrt{3}$ .



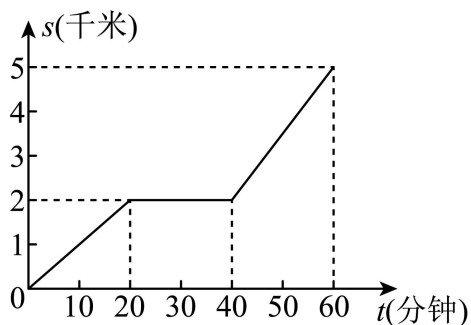
【点睛】本题考查等腰三角形的性质、勾股定理、直角三角形的性质、三角

形外角的性质、折叠的性质，添加辅助线，构造直角三角形是解题的关键.

### 三、计算题：本大题共 1 小题，共 6 分.

19. 甲、乙两人同时从 A 地前往相距 5 千米的 B 地.甲骑自行车，途中修车耽误了 20 分钟，甲行驶的路程  $s$  (千米) 关于时间  $t$  (分钟) 的函数图像如图所示；乙慢跑所行的路程  $s$  (千米) 关于时间  $t$  (分钟) 的函数解析式为  $s = \frac{1}{12}t$  ( $0 \leq t \leq 60$ ).

- (1) 在图中画出乙慢跑所行的路程关于时间的函数图像；
- (2) 乙慢跑的速度是每分钟\_\_\_\_\_千米；
- (3) 甲修车后行驶的速度是每分钟\_\_\_\_\_千米；
- (4) 甲、乙两人在出发后，中途\_\_\_\_\_分钟时相遇.



【答案】(1) 图像见解析; (2)  $\frac{1}{12}$ ; (3)  $\frac{3}{20}$ ; (4) 24.

【解析】

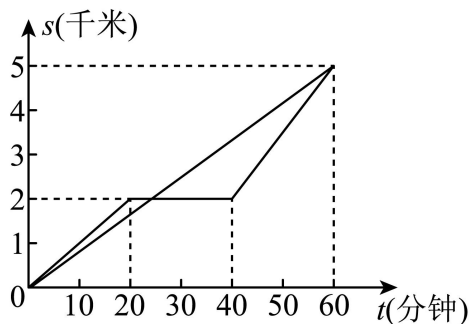
【分析】(1) 根据所给解析式可知函数过原点, 并过点 (60, 5), 由这两点即可得出答案.

(2) 乙慢跑的速度即是乙慢跑所行的路程  $s$  (千米) 关于时间  $t$  (分钟) 的函数解析式的斜率;

(3) 甲修车后行驶路程是 3km, 所用时间是 20min, 即可求出速度;

(4) 甲乙相遇, 体现在 (1) 中的图形即是它们的交点, 即求出交点得出答案.

【详解】(1) 所画图形如下所示:



(2) 乙慢跑的速度为:  $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$  千米/分钟;

(3) 甲修车后行驶 20min, 所行路程为 3km,

故甲修车后行驶的速度为:  $3 \div 20 = \frac{3}{20}$  km/min;

(4) 由甲行驶的路程  $s$  (千米) 关于时间  $t$  (分钟) 的函数图象与乙慢跑所行的路程  $s$  (千米) 关于时间  $t$  (分钟) 的函数图象可知:

在距离 A 地 2km 处甲乙相遇, 此时乙行驶了  $2 \times 12 = 24$  分钟,

即甲、乙两人在出发后, 中途 24 分钟时相遇.

【点睛】本题考查了一次函数的实际应用, 难度不大, 读懂题意是关键, 同时注意与图形结合解答问题.

四、解答题: 本题共 7 小题, 共 52 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

20. 计算:  $2\sqrt{12} + \frac{6}{1-\sqrt{3}} - \sqrt{6}\left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

【答案】  $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据二次根式的混合运算法则进行计算即可.

【详解】解：原式  $= 4\sqrt{3} - 3(1 + \sqrt{3}) - \sqrt{6} \times \left( \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$

$$= 4\sqrt{3} - 3 - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3$$

$$= -\sqrt{3}.$$

21. 已知函数  $f(x) = a^2 \sqrt{4-3x} - \frac{4a}{\sqrt{4x-2}}$ ,

(1) 求函数的定义域;

(2) 当  $f(1) = 3$  时, 求  $a$  的值.

【答案】21.  $\frac{1}{2} < x \leq \frac{4}{3}$

22.  $a_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ ,  $a_2 = \sqrt{2} - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】本题主要考查了二次根式有意义的条件, 求函数值, 解一元二次方程, 解题的关键是理解题意.

(1) 根据二次根式有意义的条件可得  $4-3x \geq 0$ ,  $4x-2 > 0$ , 再进行求解即可;

(2) 根据  $f(1) = 3$  可得,  $a^2 - 2\sqrt{2}a = 3$ , 再解一元二次方程即可.

【小问1详解】

解:  $\because 4-3x \geq 0$ ,

$$\therefore x \leq \frac{4}{3},$$

又  $\because 4x-2 > 0$ ,

$$\therefore x > \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{函数的定义域为 } \frac{1}{2} < x \leq \frac{4}{3};$$

【小问2详解】

解: 当  $f(1) = 3$  时,  $a^2 \cdot \sqrt{4-3} - \frac{4a}{\sqrt{4-2}} = 3$ ,

$$\text{即 } a^2 - 2\sqrt{2}a = 3,$$

$$\text{解得 } a_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}, \quad a_2 = \sqrt{2} - \sqrt{5}.$$

22. 关于  $x$  的方程  $(k+2)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$  的两个实数根为  $\alpha$ 、 $\beta$ ，且  $\alpha^2 = \beta^2$ ，求  $k$  的值.

【答案】0 或 2

【解析】

【分析】本题考查了根与系数的关系：若  $x_1, x_2$  是一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的两根，则

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，利用一元二次方程的定义和根的判别式的意义得到  $k+2 \neq 0$  且

$\Delta = (-2k)^2 - 4(k+2)(k-1) \geq 0$ ，解得  $k \leq 2$  且  $k \neq -2$ ，再利用根与系数的关系得到  $\alpha + \beta = \frac{2k}{k+2}$ ，所

以当  $\alpha = \beta$  时，利用判别式的意义得到  $\Delta = (-2k)^2 - 4(k+2)(k-1) = 0$ ；当  $\alpha = -\beta$  时， $\alpha + \beta = \frac{2k}{k+2}$ ，

然后分别解方程得到  $k$  的值.

【详解】解：根据题意得  $k+2 \neq 0$  且  $\Delta = (-2k)^2 - 4(k+2)(k-1) \geq 0$ ，

解得  $k \leq 2$  且  $k \neq -2$ ，

$\because$  关于  $x$  的方程  $(k+2)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$  的两个实数根为  $\alpha$ 、 $\beta$ ，

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{2k}{k+2},$$

$$\because \alpha^2 = \beta^2,$$

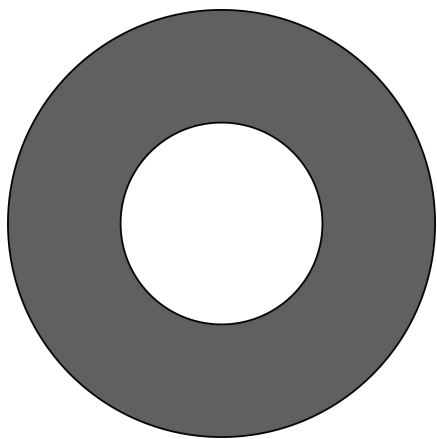
$$\therefore \alpha = \beta \text{ 或 } \alpha = -\beta,$$

当  $\alpha = \beta$  时， $\Delta = (-2k)^2 - 4(k+2)(k-1) = 0$ ，解得  $k = 2$ ；

当  $\alpha = -\beta$  时， $\alpha + \beta = \frac{2k}{k+2}$ ，解得  $k = 0$ ，

综上所述， $k$  的值为 0 或 2.

23. 如图，圆环的内外圈用铁丝围成，其中大圆半径比小圆半径的 2 倍多 1 米，如果圆环的面积等于  $40\pi$  平方米，求围成圆环铁丝的总长度.



【答案】  $20\pi$

【解析】

【分析】 设小圆的半径为  $r$ ，则大圆的半径为  $2r+1$ ，根据  $S_{\text{圆环}} = S_{\text{大圆}} - S_{\text{小圆}}$ ，列方程求得大圆和小圆的半径，再计算大圆和小圆的周长之和即可求解。

【详解】 解：设小圆的半径为  $r$ ，则大圆的半径为  $2r+1$ ，

由图可得，  $S_{\text{圆环}} = S_{\text{大圆}} - S_{\text{小圆}}$ ，即  $(2r+1)^2 \cdot \pi - \pi r^2 = 40\pi$ ，

解得，  $r = -\frac{13}{3}$  (舍)，  $r = 3$ ，

$\therefore 2r+1 = 2 \times 3 + 1 = 7$ ，

$\therefore 2\pi \times 3 + 2\pi \times 7 = 20\pi$ ，

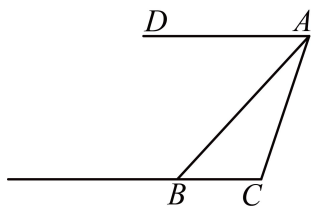
答：围成圆环铁丝的总长度为  $20\pi$ 。

24. 已知：如图，  $\triangle ABC$  中，  $AD \parallel BC$ ，  $\angle DAB = 2\angle BAC$ 。

操作：过点  $C$  作  $CE \perp AD$ ，垂足为  $E$ ，在  $CB$  的延长线上，求作一点  $P$ ，使点  $P$  到  $\angle BAD$  两边的距离相等，连接  $AP$ ，  $AP$  与  $CE$  相交于点  $Q$ 。

猜想：线段  $PQ$  与  $AC$  之间的数量关系为：\_\_\_\_\_。

证明：



【答案】 猜想  $PA = 2AC$ ，证明见解析

【解析】

【分析】 根据题意可知点  $P$  在  $\angle BAD$  的角平分线上，则  $\angle BAP = \angle DAP = \frac{1}{2} \angle BAD$ ，由此推出

$\angle BAP = \angle DAP = \angle BAC$ ，设  $\angle BAP = \angle DAP = \angle BAC = x$ ，由平行线的性质可得

$\angle BPA = \angle DAP = x$ ,  $CE \perp BC$ , 如图所示, 取  $PQ$  中点  $H$ , 连接  $CH$ , 则  $PH = CH = \frac{1}{2}PQ$ , 根据等边对等角得到  $\angle CPH = \angle PCH = x$ , 由三角形外角的性质得到  $\angle CHA = \angle CPH + \angle PCH = 2x$ , 进而可证明  $\angle CHA = \angle CAH = \angle CAB + \angle BAP = 2x$ , 得到  $CH = AC$ , 则  $PA = 2AC$ .

【详解】解: 猜想  $PQ = 2AC$ , 证明如下:

$\because$  点  $P$  到  $\angle BAD$  两边的距离相等,

$\therefore$  点  $P$  在  $\angle BAD$  的角平分线上,

$\therefore \angle BAP = \angle DAP = \frac{1}{2} \angle BAD$ ,

$\because \angle DAB = 2\angle BAC$ ,

$\therefore \angle BAP = \angle DAP = \angle BAC$ ,

设  $\angle BAP = \angle DAP = \angle BAC = x$ ,

$\because AD \parallel BC$ ,  $CE \perp AD$ ,

$\therefore \angle BPA = \angle DAP = x$ ,  $CE \perp BC$ ,

如图所示, 取  $PQ$  中点  $H$ , 连接  $CH$ ,

$\therefore PH = CH = \frac{1}{2}PQ$ ,

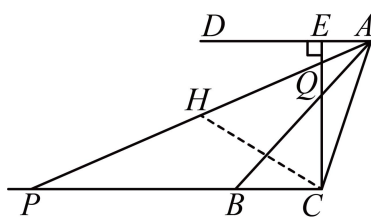
$\therefore \angle CPH = \angle PCH = x$ ,

$\therefore \angle CHA = \angle CPH + \angle PCH = 2x$ ,

$\therefore \angle CHA = \angle CAH = \angle CAB + \angle BAP = 2x$ ,

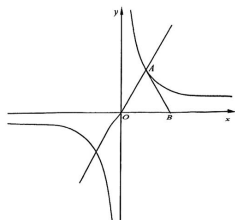
$\therefore CH = AC$ ,

$\therefore PA = 2AC$ .



【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质与判定, 直角三角形的性质, 角平分线的定义和角平分线的判定, 平行线的性质, 熟知直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

25. 如图, 已知点  $O$  为坐标原点, 点  $A$  在正比例函数  $y = \sqrt{3}x$  第一象限的图像上,  $OA = 4$ , 反比例函数的图像经过点  $A$ .



(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 已知点  $B$  在  $x$  轴上, 且  $AB = AO$ . 如果点  $P$  在反比例函数的图像上 (点  $P$  与点  $A$  不重合),  $Q$  在  $x$  轴上,  $\triangle PQB$  为等边三角形, 求点  $Q$  的坐标.

【答案】(1) 反比例函数表达式为  $y = \frac{4\sqrt{3}}{x}$

(2)  $Q\left(-\frac{14}{3}, 0\right)$  或  $Q\left(\frac{32}{5}, 0\right)$

【解析】

【分析】(1) 过点  $A$  作  $AC \perp OB$  于点  $C$ , 设点  $A(a, \sqrt{3}a)$ , 反比例函数表达式为  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ , 则  $AC = \sqrt{3}a$ ,  $OC = a$ , 利用勾股定理列方程求得  $A(2, 2\sqrt{3})$ , 再把点  $A$  的坐标代入反比例函数表达式求解即可;

(2) 过点  $P$  作  $PD \perp x$  轴于点  $D$ , 根据等腰三角形的性质可得  $OB = 4$ , 设  $P(b, 4\sqrt{3}b)$ , 则  $PD = 4\sqrt{3}b$ ,  $BD = b - 4$ ,  $BQ = 2BD = 2b - 8$ , 利用勾股定理求得  $BP^2 = (4\sqrt{3}b)^2 + (b - 4)^2$ , 再根据等边三角形的性质可得  $BP = BQ$ , 即  $(4\sqrt{3}b)^2 + (b - 4)^2 = (2b - 8)^2$ , 从而求得  $P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$  或  $P\left(\frac{4}{5}, \frac{16\sqrt{3}}{5}\right)$ , 再根据等边三角形的性质分别求解即可.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过点  $A$  作  $AC \perp OB$  于点  $C$ ,

设点  $A(a, \sqrt{3}a)$ , 反比例函数表达式为  $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ,

$$\therefore AC = \sqrt{3}a, \quad OC = a,$$

$$\therefore (\sqrt{3}a)^2 + a^2 = 4^2,$$

解得  $a = \pm 2$ ,

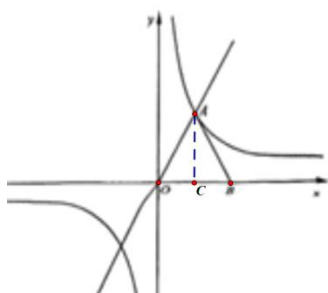
$\therefore$  点  $A$  在第一象限,

$$\therefore A(2, 2\sqrt{3}),$$

又  $\therefore$  点  $A$  在反比例函数图象上,

$$\therefore k = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{反比例函数表达式为 } y = \frac{4\sqrt{3}}{x};$$



【小问 2 详解】

解：过点  $P$  作  $PD \perp x$  轴于点  $D$ ,

$$\because AB = AO = 4, \quad AC \perp OB,$$

$$\therefore BC = OC,$$

$$\therefore A(2, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore OB = 4,$$

$$\text{设 } P(b, 4\sqrt{3}b),$$

$$\therefore PD = 4\sqrt{3}b, \quad BD = b - 4,$$

$$\therefore BQ = 2BD = 2b - 8,$$

$$\therefore BP^2 = (4\sqrt{3}b)^2 + (b - 4)^2,$$

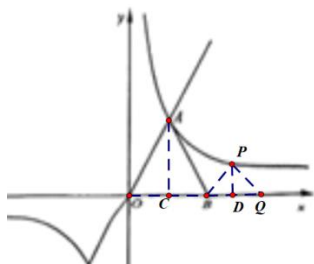
又  $\because \triangle PQB$  为等边三角形,

$$\therefore BP = BQ,$$

$$\therefore (4\sqrt{3}b)^2 + (b - 4)^2 = (2b - 8)^2,$$

$$\text{解得 } b = -\frac{4}{3} \text{ 或 } b = \frac{4}{5},$$

$$\therefore P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{3}\right) \text{ 或 } P\left(\frac{4}{5}, \frac{16\sqrt{3}}{5}\right),$$

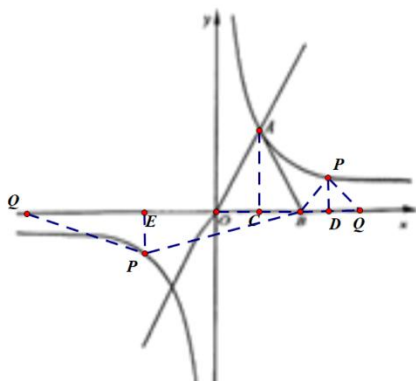


如图，当点  $P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)$  时，  $BE = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$ ,

$$\therefore QE = \frac{10}{3},$$

$$\therefore QO = \frac{10}{3} + \frac{4}{3} = \frac{14}{3},$$

$$\therefore Q\left(-\frac{14}{3}, 0\right),$$

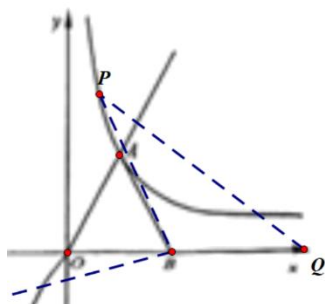


如图，当点  $P\left(\frac{4}{5}, \frac{16\sqrt{3}}{5}\right)$  时，  $BQ = PA = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{768}{25}} = \frac{28}{5}$ ,

$$\therefore QO = \frac{28}{5} + \frac{4}{5} = \frac{32}{5},$$

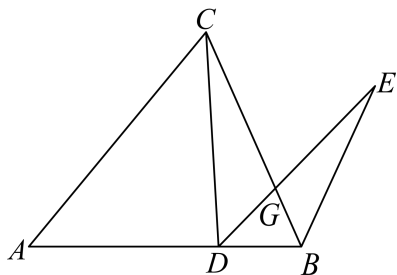
$$\therefore Q\left(\frac{32}{5}, 0\right),$$

综上所述，  $Q\left(-\frac{14}{3}, 0\right)$  或  $Q\left(\frac{32}{5}, 0\right)$ .



【点睛】 本题考查勾股定理、解一元二次方程、等边三角形的性质和等腰三角形的性质、利用待定系数法求反比例函数解析式，利用待定系数法求出反比例函数解析式是解题的关键.

26. 已知：如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB = AC$ ，点  $D$  在边  $AB$  上， $\angle CDE = \angle CBE = \angle A$ .



(1)  $\angle DBE$  与  $\angle A$  之间有怎样的数量关系？并证明你所得的结论.

(2) 求证： $DE = DC$ .

【答案】 (1)  $\angle DBE = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ，证明过程见解析

(2) 证明过程见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理可得  $\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ ，再根据  $\angle DBE = \angle DBC + \angle A$ ，即可得出结论；

(2) 在  $BC$  上截取  $DB = DF$ ，根据对顶角相等可得  $\angle DGC = \angle BGE$ ，再根据三角形内角和可得  $\angle DCF = \angle BEG$ ，由  $\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ ，可得  $\angle CFD = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ，从而可得  $\angle CFD = \angle EBD$ ，可证  $\triangle CFD \cong \triangle EBD$  (AAS)，即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：  $\angle DBE = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ，理由如下：

$\because AB = AC$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ ，

$\because \angle DBE = \angle DBC + \angle CBE$ ， $\angle CBE = \angle A$ ，

$\therefore \angle DBE = \angle DBC + \angle A$ ，

$\therefore \angle DBE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A + \angle A = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ；

【小问 2 详解】

证明：在  $BC$  上截取  $DB = DF$ ，

$\because \angle CDE = \angle CBE$ ， $\angle DGC = \angle BGE$ ，

$\therefore \angle DCF = \angle BEG$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\text{又} \because DB = DF,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore \angle CFD = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle A\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A,$$

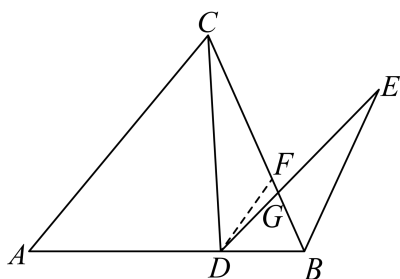
$$\therefore \angle EBD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A + \angle A = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore \angle CFD = \angle EBD,$$

$$\text{又} \because DB = DF,$$

$$\therefore \triangle CFD \cong \triangle EBD (AAS),$$

$$\therefore CD = ED.$$



【点睛】 本题考查等腰三角形的性质、对顶角相等、三角形内角和定理及全等三角形的判定与性质，添加辅助线，构造全等三角形是解题的关键.