

2021 学年第一学期初二数学期末质量调研试卷

(时间: 100 分钟 满分: 100 分)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列函数中, 反比例函数是 ()

A. $y = -\frac{3}{x} + 1$

B. $y = -\frac{1}{3}x$

C. $y = x^{-1}$

D. $y = \frac{k}{x}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据形如 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 这样的函数叫做反比例函数, 进行判断即可.

【详解】解: A、不是反比例函数, 不符合题意;

B、是正比例函数, 不符合题意;

C、是反比例函数, 符合题意;

D、当 $k = 0$ 时, 不是反比例函数, 不符合题意;

故选 C.

2. 下列计算正确的是 ()

A. $\sqrt{(-5)^2} = -5$

B. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \pm \frac{3}{4}$

C. $-(\sqrt{2})^2 = 2$

D. $\sqrt{2a} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式的性质, 逐一进行判断即可. 掌握二次根式的性质, 是解题的关键.

【详解】解: A、 $\sqrt{(-5)^2} = 5$, 选项错误;

B、 $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$, 选项错误;

C、 $-(\sqrt{2})^2 = -2$, 选项错误;

D、 $\sqrt{2a} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a}$, 选项正确;

故选 D.

3. 若关于 x 的方程 $ax^2 + x + 2 = 0$ 是一元二次方程, 则 a 的取值范围 ()

A. $a > 0$

B. $a < 0$

C. $a \neq 0$

D. $a = 1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据一元二次方程的一般形式 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，得到 $a \neq 0$ ，即可．掌握一元二次方程的定义，是解题的关键．

【详解】解： $\because ax^2 + x + 2 = 0$ 是一元二次方程，

$\therefore a \neq 0$ ；

故选：C．

4. 在下列定理中，逆命题错误的是（ ）

- A. 全等三角形的面积相等
- B. 等腰三角形的底角相等
- C. 线段的垂直平分线上的点和这条线段的两个端点距离相等
- D. 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查判断逆命题的真假．先写出逆命题，再判断真假即可．将一个命题的题设和结论互换，得到的命题为原命题的逆命题．

【详解】解：A、逆命题为：面积相等的两个三角形是全等三角形，为假命题，符合题意；

B、逆命题为：底角相等的三角形为等腰三角形，为真命题，不符合题意；

C、逆命题为：到线段两端点距离相等的点在线段的垂直平分线上，为真命题，不符合题意；

D、逆命题为：三角形一边上的中线等于这条边长度的一半的三角形为直角三角形，为真命题，不符合题意；

故选 A．

5. 若三角形一边中垂线过另一边中点，则该三角形必为（ ）

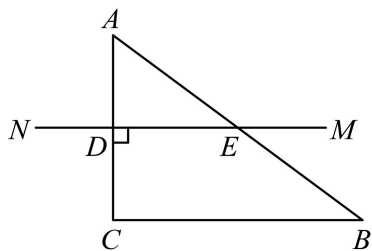
- A. 钝角三角形
- B. 锐角三角形
- C. 直角三角形
- D. 等腰三角形

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查中垂线的定义和三角形的中位线定理．如图， MN 垂直平分 AC ，则 $\angle ADM = 90^\circ$ ， D 为 AC 的中点，再根据 E 为 AB 的中点，得到 DE 为 $\triangle ACB$ 的中位线，得到 $DM \parallel BC$ ，进而得到 $\angle C = 90^\circ$ ，即可得出结论．

【详解】解：如图， MN 垂直平分 AC ，交 AC 于 D ，交 AB 于点 E ，



则: $\angle ADM = 90^\circ$, D 为 AC 的中点,

由题意, 得: E 为 AB 的中点,

$\therefore DE$ 为 $\triangle ACB$ 的中位线,

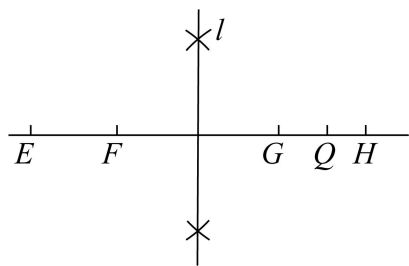
$\therefore DM \parallel BC$,

$\therefore \angle C = \angle ADM = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形;

故选 C.

6. 如图, 点 E, F, G, Q, H 在一条直线上, 且 $EF = GH$, 我们知道按如图所作的直线 l 为线段 FG 的垂直平分线. 下列说法正确的是 ().



A. l 是线段 EH 的垂直平分线

B. l 是线段 EQ 的垂直平分线

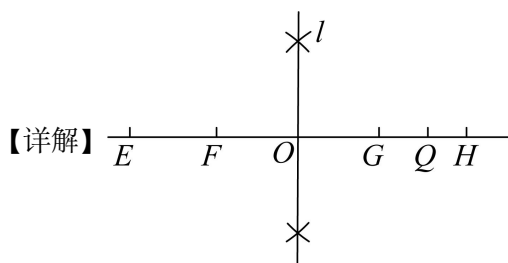
C. l 是线段 FH 的垂直平分线

D. EH 是 l 的垂直平分线

【答案】A

【解析】

【分析】根据垂直平分线的定义判断即可.



$\therefore l$ 为线段 FG 的垂直平分线,

$\therefore FO = GO$,

又 $\because EF=GH$,

$\therefore EO=HO$,

$\therefore l$ 是线段 EH 的垂直平分线, 故 A 正确

由上可知 $EO \neq QO, FO \neq OH$, 故 B、C 错误

$\therefore l$ 是直线并无垂直平分线, 故 D 错误

故选: A.

【点睛】 本题考查垂直平分线的定义, 关键在于牢记基础知识.

二、填空题: (本大题共 14 题, 每题 2 分, 满分 28 分)

7. 函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq -1$

【解析】

【详解】 由题意得: $x+1 \neq 0$, 解得: $x \neq -1$,

故答案为 $x \neq -1$.

8. 计算: $6\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{24} =$ _____.

【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了利用二次根式的性质进行化简, 二次根式的混合运算. 熟练掌握利用二次根式的性质进行化简, 二次根式的混合运算是解题的关键.

先利用二次根式的性质进行化简, 计算二次根式的乘法, 然后合并同理二次根式即可.

【详解】 解: 由题意知, $6\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{24} = 6 \times \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$,

故答案为: $\sqrt{6}$.

9. 一元二次方程 $x^2 - 2x = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 2$

【解析】

【分析】 方程整理后, 利用因式分解法求出解即可.

【详解】 方程整理得: $x(x-2)=0$

可得 $x=0$ 或 $x-2=0$

解得: $x_1=0$, $x_2=2$

故答案为: $x_1=0$, $x_2=2$.

10. 若关于 x 的方程 $x^2 - 3x + 3m = 0$ 有一个实数根为 1, 则方程的另一个实数根为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的根与系数的关系. 解题的关键在于熟练掌握: x_1 、 x_2 是

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两根, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

设方程的另一个实数根为 x_1 , 依题意得, $1 + x_1 = 3$, 计算求解即可.

【详解】 解: 设方程的另一个实数根为 x_1 ,

$\because x^2 - 3x + 3m = 0$, 关于 x 的方程 $x^2 - 3x + 3m = 0$ 有一个实数根为 1,

$\therefore 1 + x_1 = 3$,

解得, $x_1 = 2$,

故答案为: 2.

11. 2015 到 2017 年外汇市场在多重刺激下, 美元对人民币的汇率一扫连年低迷, 走上了连续强势反弹的轨道. 2015 年年初, 1 美元兑换人民币 6.2 元, 若平均每年上涨 $a\%$, 则 2017 年初美元兑换人民币价格为 1 美元=_____元 (人民币). (用含 a 的代数式表示)

【答案】 $6.2(1+a\%)^2$

【解析】

【分析】 本题考查了列代数式, 根据题意列代数式即可, 读懂题意是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 2015 年年初, 1 美元兑换人民币 6.2 元, 若平均每年上涨 $a\%$,

$\therefore$ 2017 年初美元兑换人民币价格为 1 美元 $= 6.2(1+a\%)^2$.

故答案为: $6.2(1+a\%)^2$.

12. 在实数范围内分解因式: $x^2 - 2x - 1 =$ _____.

【答案】 $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

【解析】

【分析】 根据完全平方式进行配方, 再运用平方差公式在实数范围内因式分解.

【详解】 $x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 1 = (x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

故答案为: $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$

【点睛】 考核知识点: 在实数范围内分解因式, 运用配方法和平方差公式进行因式分解是关键.

13. 已知函数 $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$, 那么 $f(4)$ 的值是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题考查求函数值, 直接代入求出值即可.

【详解】 解: $f(4) = \frac{2}{\sqrt{4}-1} = \frac{2}{2-1} = 2$,

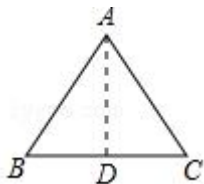
故答案为: 2.

14. 边长为 2 的正三角形的面积是_____.

【答案】 $\sqrt{3}$.

【解析】

【详解】 试题分析: 过 A 作 $AD \perp BC$, $\because AB=AC=BC=2$, $\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC=1$, 在 $Rt\triangle ABD$ 中, 根据勾股定理得: $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{3}$, 则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC \cdot AD=\sqrt{3}$, 故答案为 $\sqrt{3}$.



考点: 等边三角形的性质.

15. 已知正比例函数 $y = (k-1)x$, y 随 x 的增大而减小, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】 本题考查正比例函数的性质, 根据 y 随 x 的增大而减小, 得到 $k-1 < 0$, 求解即可.

【详解】 解: 由题意, 得: $k-1 < 0$,

$\therefore k < 1$;

故答案为: $k < 1$.

16. 在直角坐标平面内, 到点 $A(3,2)$ 的距离是 10 的轨迹是_____.

【答案】以点 A 为圆心，10 为半径的圆

【解析】

【分析】本题考查圆的定义，根据到定点为定长的点的轨迹为圆，即可得出结果.

【详解】解：到点 $A(3,2)$ 的距离是 10 的轨迹是以点 A 为圆心，10 为半径的圆；

故答案为：以点 A 为圆心，10 为半径的圆.

17. 已知一个直角三角形的两条直角边长分别是 1 和 2，那么斜边上的中线是_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】

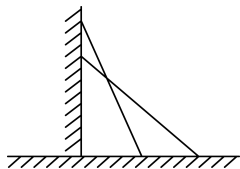
【分析】勾股定理求出斜边的长，再根据斜边上的中线等于斜边的一半，进行求解即可. 掌握斜边上的中线等于斜边的一半，是解题的关键.

【详解】解：由题意，得：斜边长为 $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ，

$\therefore$ 斜边上的中线是 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ；

故答案为： $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

18. 如图，一架云梯长 25 m，斜靠在一面墙上，梯子底端离墙 7 m，如果梯子的顶端下滑了 4 m，那么梯子的底部在水平方向上滑动了_____ m.

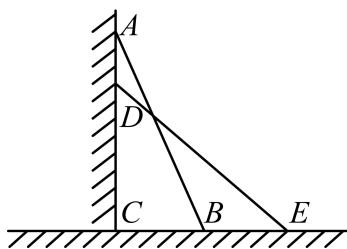


【答案】 8

【解析】

【分析】根据梯子长度不会变这个等量关系，我们可以根据 BC 求 AC，根据 AD、AC 求 CD，根据 CD 计算 CE，根据 CE、BC 计算 BE，即可解题.

【详解】解：由题意知 $AB=DE=25$ 米， $BC=7$ 米， $AD=4$ 米，



在直角 $\triangle ABC$ 中，AC 为直角边，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 24$ 米，

已知 $AD=4$ 米, 则 $CD=24-4=20$ 米,

在直角 $\triangle CDE$ 中, CE 为 直角边,

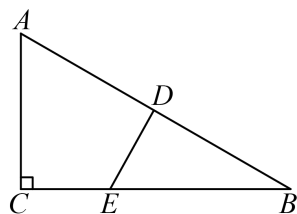
$$\therefore CE = \sqrt{DE^2 - CD^2} = 15 \text{ 米},$$

$$BE = 15 \text{ 米} - 7 \text{ 米} = 8 \text{ 米}.$$

故答案为 8.

【点睛】 本题考查了勾股定理在实际生活中的运用, 考查了直角三角形中勾股定理的运用, 本题中正确使用勾股定理求 CE 的长度是解题的关键.

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, DE 为 AB 的垂直平分线, 且 $DE = CE = 3$, 那么 $BE =$ _____.

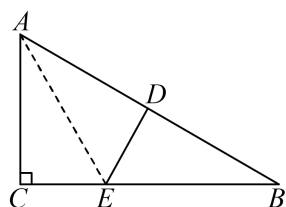


【答案】 6

【解析】

【分析】 如图, 连接 AE , 则 $AE = BE$, $DE \perp AD$, $\angle EAB = \angle B$, 由 $DE \perp AD$, $CE \perp AC$, $DE = CE = 3$, 可知 AE 是 $\angle CAB$ 的平分线, 则 $\angle EAB = \angle CAE$, 由三角形内角和定理可求 $\angle EAB = \angle CAE = \angle B = 30^\circ$, 根据 $BE = AE = 2CE$, 计算求解即可.

【详解】 解: 如图, 连接 AE ,



$\because DE$ 为 AB 的垂直平分线,

$$\therefore AE = BE, \quad DE \perp AD,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle B,$$

$$\because DE \perp AD, \quad CE \perp AC, \quad DE = CE = 3,$$

$\therefore AE$ 是 $\angle CAB$ 的平分线,

$$\therefore \angle EAB = \angle CAE,$$

$$\because \angle EAB + \angle CAE + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

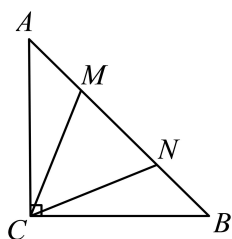
$$\therefore \angle EAB = \angle CAE = \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore BE = AE = 2CE = 6,$$

故答案为：6.

【点睛】本题考查了垂直平分线的性质，角平分线的判定定理，等边对等角，三角形内角和定理，含 30° 的直角三角形. 熟练掌握垂直平分线的性质，角平分线的判定定理，等边对等角，三角形内角和定理，含 30° 的直角三角形是解题的关键.

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， M 、 N 在斜边 AB 上， $\angle MCN = 45^\circ$ ，已知 $AM = 1$ ， $MN = \sqrt{3}$ ，那么 BN 的长是_____.



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】将 $\triangle ACM$ 绕点 C 旋转 90° 度，得到 $\triangle BCD$ ，易得 $\triangle NBD$ 为直角三角形，证明 $\triangle MCN \cong \triangle DCN$ ，得到 $DN = MN$ ，利用勾股定理求出 BN 的长即可.

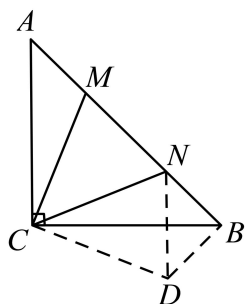
【详解】解： $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，

$$\therefore \angle A = \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MCN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACM + \angle BCN = 45^\circ,$$

将 $\triangle ACM$ 绕点 C 旋转 90° 度，得到 $\triangle BCD$ ，



则： $CM = CD$ ， $\angle CBD = \angle A = 45^\circ$ ， $\angle DCB = \angle ACM$ ， $BD = AM = 1$ ，

$$\therefore \angle DBN = \angle ABC + \angle CBD = 90^\circ, \quad \angle DCB + \angle BCN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCN = \angle MCN,$$

又 $CN = CN$ ，

$$\therefore \triangle MCN \cong \triangle DCN,$$

$$\therefore DN = MN = \sqrt{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle DBN \text{ 中: } BN = \sqrt{DN^2 - BD^2} = \sqrt{2};$$

故答案为: $\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查旋转的性质, 全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 解题的关键是通过旋转构造全等三角形.

三、简答题: (本大题共 5 题, 每题 6 分, 满分 30 分)

$$21. \text{ 计算: } (\sqrt{2}-2)^2 + \frac{2}{\sqrt{2}-1} - \left(\sqrt{\pi} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^0.$$

【答案】 $7-2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查实数的混合运算, 分母有理化, 零指数幂. 先化简各数, 再进行加减运算即可. 掌握相关运算法则, 正确的计算是解题的关键.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: 原式} &= 2 - 4\sqrt{2} + 4 + 2\left(\sqrt{2} + 1\right) - 1 \\ &= 2 - 4\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} + 2 - 1 \\ &= 7 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$22. \text{ 解方程: } (x+3)^2 - 4 = 0.$$

【答案】 $x_1 = -1, x_2 = -5$

【解析】

【分析】 本题考查解一元二次方程, 直接开方法解方程即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } (x+3)^2 - 4 &= 0 \\ (x+3)^2 &= 4, \\ \therefore x+3 &= \pm 2, \\ \therefore x_1 &= -1, x_2 = -5. \end{aligned}$$

23. 已知 $y = y_1 + y_2$, y_1 与 x 成正比例, y_2 与 $2x$ 成反比例. 当 $x = 2$ 时, $y = 7$; 当 $x = -1$ 时, $y = -5$. 求 y 与 x 的函数关系式.

【答案】 $y = 3x + \frac{2}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查待定系数法求函数解析式. 设 $y_1 = kx, y_2 = \frac{m}{2x}$, 得到 $y = y_1 + y_2 = kx + \frac{m}{2x}$, 待定系数法求出 k, m 的值, 即可. 熟练掌握待定系数法求解析式, 是解题的关键.

【详解】 解: 设 $y_1 = kx, y_2 = \frac{m}{2x}$,

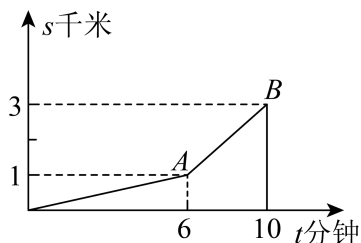
则: $y = y_1 + y_2 = kx + \frac{m}{2x}$,

$\because$ 当 $x = 2$ 时, $y = 7$; 当 $x = -1$ 时, $y = -5$;

$$\therefore \begin{cases} 2k + \frac{m}{4} = 7 \\ -k - \frac{m}{2} = -5 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 3 \\ m = 4 \end{cases},$$

$$\therefore y = 3x + \frac{2}{x}.$$

24. 小强骑车从家到学校要经过一段先上坡后下坡的路, 在这段路上小强骑车的距离 s (千米)与骑车的时间 t (分钟)之间的函数关系如图所示, 请根据图中信息回答下列问题:



(1) 小强去学校时下坡路长____千米;

(2) 小强下坡的速度为____千米/分钟;

(3) 若小强回家时按原路返回, 且上坡的速度不变, 下坡的速度也不变, 那么回家骑车走这段路的时间是____分钟.

【答案】 (1) 2 (2) 0.5 (3) 14

【解析】

【分析】 (1) 根据题意和函数图象可以得到下坡路的长度;

(2) 根据函数图象中的数据可以求的小强下坡的速度;

(3) 根据题意可以求得小强上坡的速度, 进而求得小强返回时需要的时间.

【详解】 (1) 由题意和图象可得: 小强去学校时下坡路为: $3 - 1 = 2$ (千米).
故答案为 2;

(2) 小强下坡的速度为: $2 \div (10 - 6) = 0.5$ 千米/分钟.

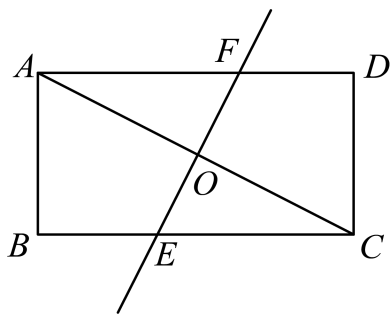
故答案为 0.5;

(3) 小强上坡时的速度为: $1 \div 6 = \frac{1}{6}$ 千米/分钟, 故小强回家骑车走这段路的时间是: $\frac{2}{\frac{1}{6}} + \frac{1}{0.5} = 14$ (分钟).

故答案为 14.

【点睛】 本题考查了函数图象, 解题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件.

25. 如图, 矩形 (长方形) $ABCD$ 中, 对角线 AC 的垂直平分线 EF 分别交 AC, BC, AD 于点 O, E, F .



(1) 求证: $AF = CE$;

(2) 若 $BE = 3$, $AF = 5$, 求 AB 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 4

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质, 线段的中垂线的性质, 全等三角形的判定和性质.

(1) 证明 $\triangle AOF \cong \triangle COE$, 即可;

(2) 连接 AE , 中垂线的性质, 得到 $AE = CE = AF$, 勾股定理求 AB 的长即可.

掌握相关性质, 证明 $\triangle AOF \cong \triangle COE$, 是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 矩形 $ABCD$,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle FAO = \angle ECO$,

$\because EF$ 垂直平分 AC ,

$\therefore OA = OC$, $\angle AOF = \angle COE$,

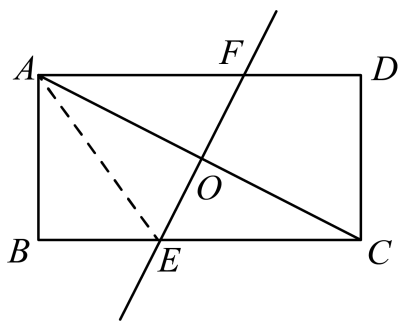
$\because \angle FAO = \angle ECO$, $OA = OC$, $\angle AOF = \angle COE$

$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE$,

$\therefore AF = CE$;

【小问 2 详解】

连接 AE , 则: $AE = CE = AF = 5$,



$\therefore$ 矩形 $ABCD$,

$\therefore \angle B = 90^\circ$,

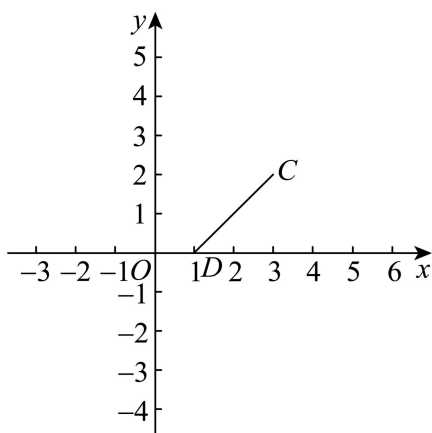
$\therefore BE = 3$,

$\therefore AB = \sqrt{AE^2 - BE^2} = 4$.

四、解答题: (本大题共 3 题, 满分 30 分)

26. (1) 已知, $C(3,2)$, $D(1,0)$, B 为 y 轴上一点, $\triangle CDB$ 为直角三角形, 且 $\angle D = 90^\circ$, 求点 B 的坐标;

(2) 已知, $C(3,2)$, $D(1,0)$, E 为 x 轴上一点, $\triangle CDE$ 为以 CD 为腰的等腰三角形, 求点 E 的坐标.



【答案】 (1) $B(0,1)$ (2) $E(1 \pm 2\sqrt{2}, 0)$ 或 $E(5,0)$

【解析】

【分析】 本题考查坐标与图形, 勾股定理.

(1) 设 $B(0, y)$, 求出 CD^2 , BD^2 , BC^2 , 根据 $\triangle CDB$ 为直角三角形, 且 $\angle D = 90^\circ$, 得到 $BC^2 = CD^2 + BD^2$, 求解即可;

(2) 设 $E(x, 0)$, 分 $CD = DE$, $DC = CE$, 两种情况进行求解即可.

利用数形结合, 分类讨论的思想, 进行求解, 是解题的关键.

【详解】 解: (1) 设 $B(0, y)$,

$$\therefore C(3,2), D(1,0),$$

$$\therefore BC^2 = 3^2 + (y-2)^2, BD^2 = 1 + y^2, CD^2 = (3-1)^2 + 2^2 = 8,$$

$\therefore \triangle CDB$ 为直角三角形, 且 $\angle D = 90^\circ$,

$$\therefore BC^2 = CD^2 + BD^2,$$

$$\text{即: } 3^2 + (y-2)^2 = 1 + y^2 + 8,$$

解得: $y = 1$;

$$\therefore B(0,1);$$

(2) 设 $E(x,0)$,

$$\therefore C(3,2), D(1,0),$$

$$\therefore CE^2 = (x-3)^2 + 4, DE^2 = (x-1)^2, CD^2 = 8,$$

$\therefore \triangle CDE$ 为以 CD 为腰的等腰三角形,

$$\therefore \text{当 } CD = DE \text{ 时: } 8 = (x-1)^2, \text{ 解得: } x = 1 + 2\sqrt{2} \text{ 或 } x = 1 - 2\sqrt{2},$$

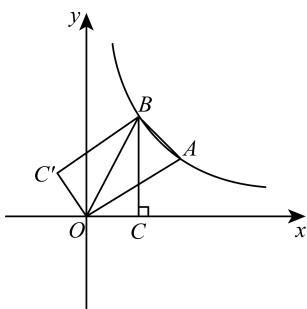
$$\therefore E(1 \pm 2\sqrt{2}, 0);$$

$$\text{当 } DC = CE \text{ 时, } (x-3)^2 + 4 = 8, \text{ 解得: } x = 5 \text{ 或 } x = 1 \text{ (舍去);}$$

$$\therefore E(5,0);$$

综上: $E(1 \pm 2\sqrt{2}, 0)$ 或 $E(5,0)$.

27. 如图, 反比例函数图象经过点 $A(2\sqrt{3}, 2)$, 点 B 在反比例函数的图象上, 横坐标为 2, 过点 B 作 $BC \perp x$ 轴, 垂足为 C .



(1) 求反比例函数解析式及 B 点坐标;

(2) 连接 OB , 若将 $\triangle BOC$ 沿 OB 翻折, 得到 $\triangle BOC'$, 求四边形 $OABC'$ 的面积.

【答案】 (1) $y = \frac{4\sqrt{3}}{x}$, (2, $2\sqrt{3}$)

(2) $2\sqrt{3} + 4$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求反比例函数的解析式，三角形的面积的计算，正确地作出辅助线是解题的关键.

(1) 设反比例函数解析式的解析式为 $y = \frac{k}{x}$, 把点 $A(2\sqrt{3}, 2)$ 代入求得 $k = 4\sqrt{3}$, 于是得到反比例函数解析式为 $y = \frac{4\sqrt{3}}{x}$; 根据点 B 在反比例函数的图象上, 横坐标为 2, 于是得到 B 点坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$;

(2) 过 A 作 $AD \perp x$ 轴于 D , 根据三角形的面积公式即可得到结论.

【小问 1 详解】

解: 设反比例函数解析式的解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

$\because$ 反比例函数图象经过点 $A(2\sqrt{3}, 2)$,

$$\therefore k = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{4\sqrt{3}}{x};$$

$\because$ 点 B 在反比例函数的图象上, 横坐标为 2,

$$\therefore \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore B \text{ 点坐标为 } (2, 2\sqrt{3});$$

【小问 2 详解】

过 A 作 $AD \perp x$ 轴于 D ,

$\because$ 过点 B 作 $BC \perp x$ 轴, 垂足为 C ,

$$\therefore S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$\because$ 反比例函数图象经过点 $A(2\sqrt{3}, 2)$,

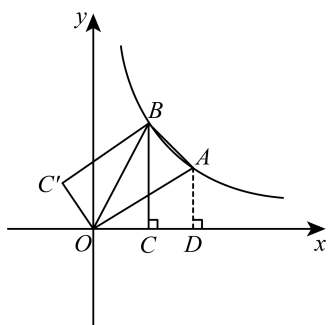
$$\therefore S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOD},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2} \times (2 + 2\sqrt{3}) \times (2\sqrt{3} - 2) = 4,$$

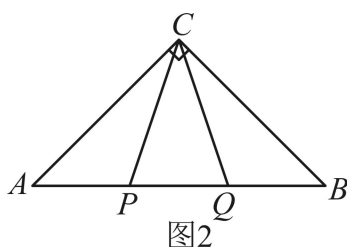
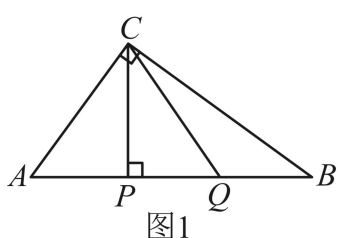
∴ 将 $\triangle BOC$ 沿 OB 翻折, 得到 $\triangle BOC'$,

$$\therefore S_{\triangle BOC'} = S_{\triangle BOC} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{四边形 } ABC'O \text{ 的面积} = 2\sqrt{3} + 4.$$



28. 如图, 点 P 、 Q 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 的三等分点.



(1) 如图 1, 若 $CP \perp AB$, $CP = 3$, 求斜边 AB 的长;

(2) 如图 2, 若 $CP = CQ = 3$, 求斜边 AB 的长.

【答案】(1) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

(2) $\frac{9\sqrt{10}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理, 等腰三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 解题的关键是掌握并运用勾股定理.

(1) 由勾股定理可得;

(2) 过 C 点作高线, 再全等三角形的性质和判定和等腰三角形的判定与性质证明判定 $AC = BC$, 最后由勾股定理列方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle APC$ 中, $AC = \sqrt{3^2 + AP^2}$,

在 $\text{Rt}\triangle BPC$ 中, $BC = \sqrt{3^2 + BP^2}$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB^2 = AC^2 + BC^2$,

$$\therefore AB^2 = 18 + AP^2 + BP^2,$$

$\because$ 点 P 、 Q 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 的三等分点,

$$\therefore AP = \frac{1}{3}AB, \quad BP = \frac{2}{3}AB,$$

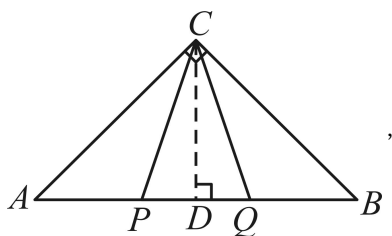
$$AB^2 = 18 + \left(\frac{1}{3}AB\right)^2 + \left(\frac{2}{3}AB\right)^2,$$

$$\text{解得: } AB = \frac{9\sqrt{2}}{2},$$

答: 斜边 AB 的长为 $\frac{9\sqrt{2}}{2}$;

【小问 2 详解】

过 C 作 $CD \perp AB$, 交 AB 于点 D ,



$$\because CP = CQ = 3,$$

$$\therefore \angle CPQ = \angle CQP, \quad \angle CPA = \angle CQB,$$

$\because$ 点 P 、 Q 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 的三等分点,

$$\therefore AP = BQ = PQ,$$

$$\therefore \triangle CAP \cong \triangle CBQ (\text{SAS}),$$

$\therefore AC = BC$, 即 $\text{Rt}\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB, \quad AD = BD,$$

在 $\text{Rt}\triangle CPD$ 中, $PD = \sqrt{3^2 - CD^2}$,

$$\because PD = \frac{1}{6}AB,$$

$$\therefore \frac{1}{6}AB = \sqrt{3^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2},$$

$$\text{解得: } AB = \frac{9\sqrt{10}}{5},$$

答: 斜边 AB 的长为 $\frac{9\sqrt{10}}{5}$.

