

2023-2024 学年上海市长宁区延安初级中学八年级（上）期末数学试卷

一、选择题（每题 2 分，共 12 分）

1. 下列关于 x 的方程中，一定是一元二次方程的是（ ）

- A. $\frac{1}{x^2} - 1 = 0$ B. $\sqrt{x} = 5x^2$ C. $ax^2 + x - 6 = 0$ D. $x(x+1) = 5x - 1$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是一元二次方程的定义，熟知只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程是解题的关键。根据一元二次方程的定义对各选项进行逐一分析即可。

【详解】解：A. $\frac{1}{x^2} - 1 = 0$ 中含有分式，不是一元二次方程，故本选项不符合题意；

B. $\sqrt{x} = 5x^2$ ，不是整式方程，故本选项不符合题意；

C. 当 $a = 0$ 时， $ax^2 + x - 6 = 0$ 不是一元二次方程，故本选项不符合题意；

D. $x(x+1) = 5x - 1$ 是一元二次方程，故本选项符合题意。

故选：D。

2. 下列二次根式中，不是最简二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{ab}$ B. $\sqrt{a^2 + b^2}$ C. $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$ D. $\sqrt{a^2 - b^2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据最简二次根式的概念判断即可。本题考查的是最简二次根式，掌握最简二次根式的概念、二次根式的性质是解题的关键。

【详解】解：A、 $\sqrt{ab}$ 是最简二次根式，不符合题意；

B、 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 是最简二次根式，不符合题意；

C、 $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$ ，不是最简二次根式，符合题意；

D、 $\sqrt{a^2 - b^2}$ 是最简二次根式，不符合题意；

故选：C。

3. 下列函数中，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大的是（ ）

A. $y = \frac{x}{2}$

B. $y = -\frac{x}{2}$

C. $y = \frac{2}{x}$

D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】分别对各项的函数解析式进行分析判断即可.

【详解】A: $y = \frac{x}{2}$ 为一次函数, x 取所有实数, $\therefore \frac{1}{2} > 0$, $\therefore$ 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大, 故选项正确;

B: $y = -\frac{x}{2}$ 为一次函数, x 取所有实数, $\therefore -\frac{1}{2} < 0$, $\therefore$ 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小, 故选项错误;

C: $y = \frac{2}{x}$ 为反比例函数, $x \neq 0$, 在 $x < 0$ 内, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小, 并且在 $x > 0$ 内, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小, 故选项错误;

D: $y = -\frac{2}{x}$ 为反比例函数, $x \neq 0$, 在 $x < 0$ 内, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大, 并且在 $x > 0$ 内, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大, 但在 x 从 $x = 0$ 左侧到 $x = 0$ 右侧时不满足条件“函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大”, 故选项错误;

故选: A.

【点睛】本题主要考查了一次函数图像与反比例函数图像的性质, 熟练掌握相关概念是解题关键.

4. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$

B. $\sqrt{24}$

C. $\sqrt{0.3}$

D. $\sqrt{18}$

【答案】A

【解析】

【分析】先化简各二次根式, 然后依据同类二次根式的定义求解即可.

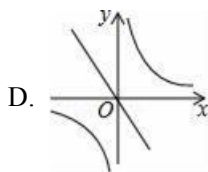
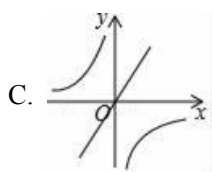
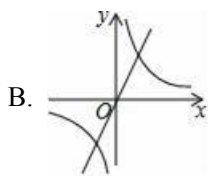
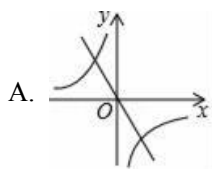
【详解】解: $\therefore \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, $\sqrt{0.3} = \sqrt{\frac{3}{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$,

$\therefore$ 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 $\sqrt{\frac{1}{3}}$,

故选: A.

【点睛】本题主要考查的是同类二次根式的定义, 将各二次根式化为最简二次根式是解题的关键.

5. 如果 $k < 0$, 那么函数 $y = (1 - k)x$ 与 $y = \frac{k}{x}$ 在同一坐标系中的图象可能是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质和一次函数的性质， $k < 0$ 时，两函数图象能共存于同一坐标系的为正确答案.

【详解】 $\because$ 当 $k < 0$ 时，反比例函数过二、四象限，

当 $1 - k > 0$ 时， $y = (1 - k)x$ 的图像在第一、三象限，

故答案为 C.

【点睛】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题，属于基础题，主要理解一次函数和反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 中 k 的几何意义. 这里体现了数形结合的思想，做此类题一定要正确理解 k 的几何意义.

6. 已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上（点 D 不与点 A 、点 B 重合），连接 CD .

①如果 $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是边 AB 上的中线，那么 $AB = 2CD$.

②如果 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 2CD$ ，那么 CD 是边 AB 上的中线.

③如果 CD 是边 AB 上的中线， $AB = 2CD$ ，那么 $\angle ACB = 90^\circ$.

下列说法正确的是（ ）

A. ①②是真命题，③是假命题；

B. ①③是真命题，②是假命题；

C. ②③是真命题，①是假命题；

D. ①②③都是真命题.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解直角三角形的性质及判定方法，难度不大. 根据直角三角形的性质和判定方法分别判断即可确定正确的选项.

【详解】解：根据直角三角形的性质：斜边上的中线等于斜边的一半可以判断①正确；

故①正确，是真命题；

如果 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 2CD$ ，那么 CD 是边 AB 上的中线，

故②正确，是真命题；

根据一边上的中线等于这条边的一半的三角形是直角三角形可以判定③正确，

故③是真命题.

综上所述可知，①②③都是真命题.

故选：D.

二、填空题（每题3分，共36分）

7. 函数 $y = \frac{\sqrt{2}-x}{x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq 0$

【解析】

【分析】此题主要考查了确定函数自变量的取值范围，熟练掌握函数自变量的范围是解题的关键. 由于 x 是分母，由此得到 $x \neq 0$ ，由此即可确定自变量 x 的取值范围.

【详解】解：依题意得 $x \neq 0$.

故答案为： $x \neq 0$.

8. 化简： $\sqrt{\frac{x}{2}}$ =_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2x}}{2}$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质即可化简得出答案. 本题主要考查二次根式的性质与化简，关键是熟练掌握二次根式的性质.

【详解】解： $\sqrt{\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{x \times 2}{2 \times 2}} = \frac{\sqrt{2x}}{2}$.

故答案为： $\frac{\sqrt{2x}}{2}$.

9. 如果函数 $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ，那么 $f(\sqrt{2}-1)$ _____.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查求函数值. 把 $x = \sqrt{2}-1$ 代入函数解析式进行计算即可.

【详解】解：∵函数 $f(x) = \frac{2}{x+1}$,

$$\therefore f(\sqrt{2}-1) = \frac{2}{\sqrt{2}-1+1} = \sqrt{2}.$$

故答案为: $\sqrt{2}$.

10. 在直角坐标平面内点 $A(2, -1)$ 与点 $B(-2, -3)$ 的距离等于_____.

【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查两点间的距离公式: 设有两点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则这两点间的距离为

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, 直接利用两点间的距离公式求解, 熟练掌握两点间的距离公式是解此题的关键.

【详解】解: ∵ $A(2, -1)$ 、 $B(-2, -3)$,

$$\therefore \text{点 } A \text{ 和点 } B \text{ 的距离} = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + [-1 - (-3)]^2} = 2\sqrt{5},$$

故答案为: $2\sqrt{5}$.

11. 到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是_____.

【答案】 以 P 为圆心, 以 3cm 为半径的圆

【解析】

【分析】 根据到定点的距离等于定长的点都在圆上, 反过来圆上各点到定点的距离等于定长, 得出结论到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是以 P 为圆心, 以 3cm 为半径的圆.

【详解】解: 到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是以 P 为圆心, 以 3cm 为半径的圆.

故答案为: 以 P 为圆心, 以 3cm 为半径的圆.

【点睛】 本题考查了学生的理解能力, 理解到点 P 的距离等于 3cm 的点的轨迹是以 P 为圆心, 以 3cm 为半径的圆是解题的关键.

12. 命题“对顶角相等”的逆命题是_____.

【答案】 相等的角为对顶角

【解析】

【分析】 本题考查了命题与定理: 判断一件事情的语句, 叫做命题. 许多命题都是由题设和结论两部分组成, 题设是已知事项, 结论是由已知事项推出的事项, 一个命题可以写成“如果...那么...”形式. 有些命题的

正确性是用推理证实的，这样的真命题叫做定理。也考查了逆命题。

所以此题可根据交换原命题的题设与结论即可得到其逆命题。

【详解】解：命题“对顶角相等”的逆命题是“相等的角为对顶角”。

故答案为：相等的角为对顶角。

13. 如果点 $M(-1, y_1)$ 、点 $N\left(-\frac{1}{2}, y_2\right)$ 都在函数 $y = \frac{2+m}{x}$ 的图象上，且 $y_1 < y_2$ ，那么 m 的取值范围是 _____。

【答案】 $m < -2$

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数图象的性质，根据题意可得在每个象限内 y 随 x 增大而增大，据此可得 $2+m < 0$ ，则 $m < -2$ 。

【详解】解：∵点 $M(-1, y_1)$ 、点 $N\left(-\frac{1}{2}, y_2\right)$ 都在函数 $y = \frac{2+m}{x}$ 的图象上，且 $y_1 < y_2$ ，

∴在每个象限内 y 随 x 增大而增大，

∴ $2+m < 0$ ，

∴ $m < -2$ ，

故答案为： $m < -2$ 。

14. 在实数范围内因式分解： $3x^2 - xy - y^2 =$ _____。

【答案】 $3\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6}y\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}y\right)$

【解析】

【分析】本题考查了因式分解，先把原式变形为 $3x^2 - xy - y^2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}y^2\right)$ ，可得到

$3\left[\left(x - \frac{1}{6}y\right)^2 - \frac{13}{36}y^2\right]$ ，再利用平方差公式进行因式分解，即可求解本题考查了实数范围内分解因式：一

些式子在有理数的范围内无法分解因式，可是在实数范围内就可以继续分解因式。通过补项配成完全平方公式是解决问题的关键。

【详解】解： $3x^2 - xy - y^2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}y^2\right)$

$$= 3 \left[x^2 - \frac{1}{3}xy + \left(-\frac{1}{6}y\right)^2 - \frac{1}{36}y^2 - \frac{1}{3}y^2 \right]$$

$$= 3 \left[\left(x - \frac{1}{6}y\right)^2 - \frac{13}{36}y^2 \right]$$

$$= 3 \left[\left(x - \frac{1}{6}y\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{6}y\right)^2 \right]$$

$$= 3 \left(x - \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{13}}{6}y \right) \left(x - \frac{1}{6}y - \frac{\sqrt{13}}{6}y \right)$$

$$= 3 \left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6}y \right) \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}y \right).$$

故答案为: $3 \left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{6}y \right) \left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{6}y \right).$

15. 如果关于 x 的方程 $kx^2 + 3x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 k 的取值范围是 _____.

【答案】 $k > -\frac{9}{4}$ 且 $k \neq 0$

【解析】

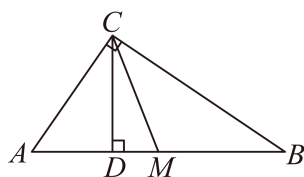
【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与根的关系, 熟练掌握根的判别式与根的关系式解答本题的关键. 当 $\Delta > 0$ 时, 一元二次方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 一元二次方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 一元二次方程没有实数根. 根据 $k \neq 0$ 且 $\Delta > 0$ 列式求解即可.

【详解】 解: 根据题意得 $k \neq 0$ 且 $\Delta = 3^2 - 4k \times (-1) > 0$,

解得 $k > -\frac{9}{4}$ 且 $k \neq 0$.

故答案为: $k > -\frac{9}{4}$ 且 $k \neq 0$.

16. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD, CM 分别是 $\triangle ABC$ 的高和中线, 如果 $\angle DCM = 20^\circ$, 那么 $\angle A$ 的度数等于 _____.



【答案】 55°

【解析】

【分析】由直角三角形斜边中线的性质推出 $CM = AM$ ，得到 $\angle A = \angle ACM$ ，求出 $\angle ACD = \angle ACM - \angle DCM = \angle A - 20^\circ$ ，由直角三角形的性质得到 $\angle A + \angle ACD = 90^\circ$ ，因此 $\angle A + \angle A - 20^\circ = 90^\circ$ ，即可求出 $\angle A = 55^\circ$ ．本题考查直角三角形斜边的中线，直角三角形的性质，等腰三角形的性质．

【详解】解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， CD, CM 分别是 $\triangle ABC$ 的高和中线，

$$\therefore CM = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore CM = AM,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACM,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle ACM - \angle DCM = \angle A - 20^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

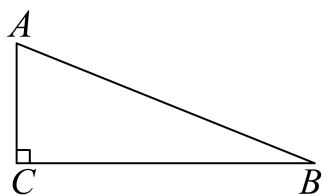
$$\therefore \angle A + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle A - 20^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 55^\circ.$$

故答案为： 55° ．

17. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 5$ ， $AB = 13$ ，点 D 在边 BC 上，连接 AD ，将 $\triangle ADC$ 沿着 AD 翻折，点 C 的对应点为点 E ，连接 EB ，如果 $AE \parallel BC$ ，那么 BE 的长等于 _____．



【答案】 $\sqrt{74}$

【解析】

【分析】由 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 5$ ， $AB = 13$ ，根据勾股定理求得 $BC = 12$ ，由翻折得 $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$ ，由 $AE \parallel BC$ ，得 $\angle CAE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BDE = \angle AED = 90^\circ$ ，可证明四边形 $ACDE$ 是正方形，则 $DC = DE = AC = 5$ ，所以 $BD = 7$ ，则 $BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \sqrt{74}$ ，于是得到问题的答案．

【详解】解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 5$ ， $AB = 13$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

由翻折得 $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore AE \parallel BC$,

$\therefore \angle CAE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$, $\angle BDE = \angle AED = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是矩形,

$\therefore AE = AC$,

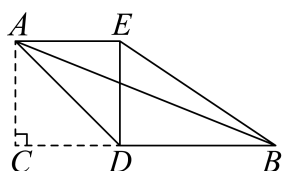
$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是正方形,

$\therefore DC = DE = AC = 5$,

$\therefore BD = BC - DC = 12 - 5 = 7$,

$\therefore BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}$,

故答案为: $\sqrt{74}$.



【点睛】此题重点考查勾股定理、轴对称的性质、平行线的性质、正方形的判定与

性质等知识,求得 $DC = DE = 5$ 是解题的关键.

18. 我们把两个不全等但面积相等的三角形叫做一对偏等积三角形. 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是一对面积都等于 S 的偏等积三角形, 且 $AB = AC = DE = DF$, $BC = a$, 那么 EF 的长等于 _____ (结果用含 a 和 S 的代数式表示).

【答案】 $\frac{4s}{a}$

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的判定和性质、等腰三角形的性质、三角形的面积等知识, 由面积相等可得相应等式, 作出三角形的高, 作出辅助线构造三角形全等, 证明三角形全等是解题的关键.

【详解】解: 如图: $AB = AC = DE = DF$, 过 C 作 $CM \perp AB$ 于 M , 过 F 作 $FN \perp ED$ 交 ED 延长线于 N , 延长 BA 到 K 使 $AK = AB$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = S, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} DE \cdot FN = S$$

$$\therefore CM = FN$$

$$\because AC = DF$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AMC \cong \text{Rt}\triangle DNF (\text{HL})$$

$$\therefore \angle MAC = \angle NDF$$

$$\because \angle CAK = 180^\circ - \angle MAC, \quad \angle EDF = 180^\circ - \angle NDF$$

$$\therefore \angle CAK = \angle EDF$$

$$\because AK = AC = DE = DF$$

$$\therefore \triangle ACK \cong \triangle DFE (\text{SAS})$$

$$\therefore EF = CK, \quad S_{\triangle KBC} = 2S$$

$$\because AK = AC = DE = DF$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB, \quad \angle K = \angle ACK$$

$$\therefore \angle ACB + \angle ACK = \angle ABC + \angle K = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BCK = 90^\circ$$

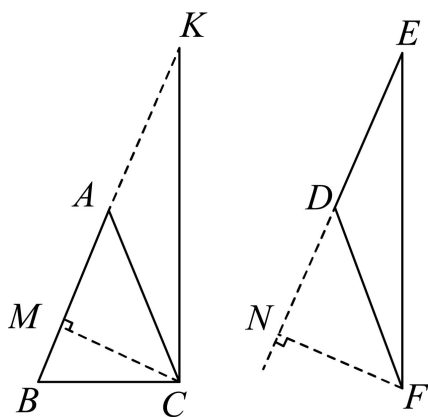
$$\therefore S_{\triangle KBC} = \frac{1}{2} BC \cdot CK = 2S$$

$$\because BC = a$$

$$\therefore CK = \frac{4S}{a}$$

$$\therefore EF = \frac{4S}{a}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{4S}{a}.$$



三、解答题 (共 52 分)

19. 计算: $\sqrt{2} \times \sqrt{10} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{3\frac{1}{5}}.$

【答案】 $\frac{11\sqrt{5}}{5} + 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算，掌握运算法则以及性质是解题的关键．根据二次根式的乘法法则以及二次根式的性质计算乘法和分母有理化，再进行加减运算即可．

【详解】 解： $\sqrt{2} \times \sqrt{10} + \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{3\frac{1}{5}}$

$$= 2\sqrt{5} + \sqrt{5} + 2 - \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{11\sqrt{5}}{5} + 2.$$

20. 解方程： $(x-1)^2 - 4x - 1 = 12$.

【答案】 $x_1 = 7, x_2 = -1$

【解析】

【分析】 本题考查了因式分解法解一元二次方程，把方程看作关于 $x-1$ 的一元二次方程，利用因式分解法把方程转化为 $x-1-6=0$ 或 $x-1+2=0$ ，然后解两个一次方程即可．

【详解】 解： $(x-1)^2 - 4x - 1 = 12$,

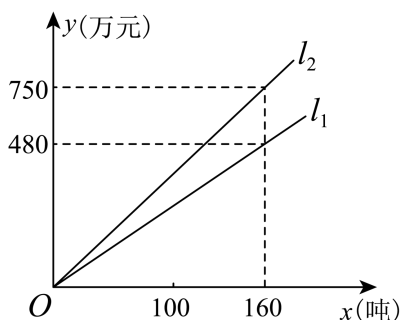
$$(x-1)^2 - 4x - 1 - 12 = 0,$$

$$x-1-6x-1+2=0,$$

$$x-1-6=0 \text{ 或 } x-1+2=0,$$

所以 $x_1 = 7, x_2 = -1$.

21. 某工厂购买的原材料的单价从前年开始进行了调整．如图， l_1 、 l_2 分别表示该工厂前年和今年采购原材料的总价 y （万元）与数量 x （吨）之间的关系，请根据函数图象提供的信息回答下列问题：



- (1) 该厂前年采购原材料的单价是每吨 ____ 万元；
- (2) 该厂今年采购原材料的总价 y 关于数量 x 的函数解析式是 ____；
- (3) 如果该原材料的单价从前年开始，每年的增长率都相同，那么这个增长率是 ____.

【答案】 (1) 3 (2) $y = \frac{75}{16}x$

(3) 25%

【解析】

【分析】 本题考查一次函数和一元二次方程的应用，解答本题的关键是求出相应的函数解析式，利用数形结合的思想解答.

(1) 根据购买 160 吨原材料需要花费 480 万元可得出结论；

(2) 根据函数图象中的数据，可以计算出该厂去年采购原材料的价格 y 关于数量 x 的函数解析式；

(3) 设每年的增长率是 a ，根据题意列出一元二次方程，解方程即可.

【小问 1 详解】

解：由图可知，该厂前年采购原材料的单价是每吨 $\frac{480}{160} = 3$ (万元)，

故答案为：3；

【小问 2 详解】

解：设该厂今年采购原材料的价格 y 关于数量 x 的函数解析式是 $y = ax$ ，

$\because$ 点 (160, 750) 在该函数图象上，

$\therefore 750 = 160a$ ，

解得 $a = \frac{75}{16}$ ，

即该厂今年采购原材料的价格 y 关于数量 x 的函数解析式是 $y = \frac{75}{16}x$ ，

故答案为： $y = \frac{75}{16}x$ ；

【小问 3 详解】

解：设每年的增长率是 a ，

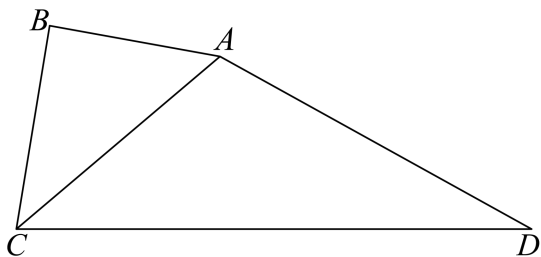
根据题意得： $480(1+a)^2 = 750$ ，

解得 $a_1 = \frac{1}{4} = 25\%$ ， $a_2 = -\frac{9}{4}$ (舍去)，

$\therefore$ 该原材料的单价从前年开始，每年的增长率是 25%，

故答案为：25%.

22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 4$ ， $AC = 2\sqrt{7}$.



(1) 求证: $AB \perp BC$;

(2) 如果 CA 平分 $\angle BCD$, 且 $\angle D = 30^\circ$, 求 $\triangle ACD$ 的面积.

【答案】 (1) 见解析 (2) $10\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 (1) 利用勾股定理的逆定理证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形, 从而可得 $\angle ABC = 90^\circ$, 即可解答;

(2) 过点 A 作 $AE \perp CD$, 垂足为 E , 先利用角平分线的性质可得 $AB = AE = 2\sqrt{3}$, 然后在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, 利用勾股定理求出 CE 的长, 再在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 利用含 30° 度角的直角三角形的性质求出 DE 的长, 从而求出 CD 的长, 最后利用三角形的面积公式进行计算, 即可解答.

本题考查了勾股定理, 勾股定理的逆定理, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 角平分线的性质, 根据题目的逐一条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 4$, $AC = 2\sqrt{7}$,

$$\therefore AB^2 + BC^2 = (2\sqrt{3})^2 + 4^2 = 28 = (2\sqrt{7})^2 = AC^2,$$

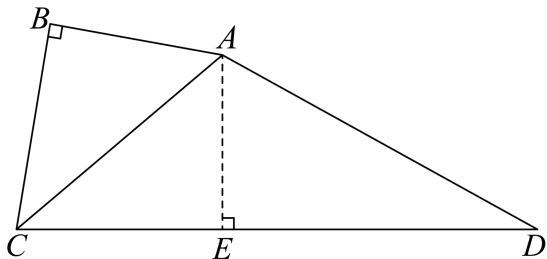
$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore AB \perp BC$.

【小问 2 详解】

解: 过点 A 作 $AE \perp CD$, 垂足为 E ,



$\because CA$ 平分 $\angle BCD$, $AE \perp CD$, $AB \perp CB$,

$\therefore AB = AE = 2\sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $AC = 2\sqrt{7}$,

$$\therefore CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\angle D = 30^\circ$,

$$\therefore AD = 2AE = 4\sqrt{3},$$

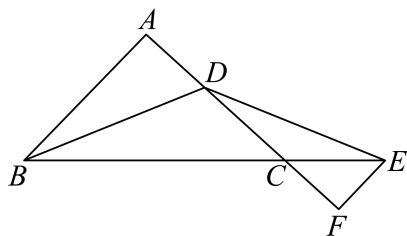
$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = 6,$$

$$\therefore CD = CE + DE = 10,$$

$$\therefore \triangle ACD \text{ 的面积为: } \frac{1}{2}CD \cdot AE = \frac{1}{2} \times 10 \times 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle ACD \text{ 的面积为 } 10\sqrt{3}.$$

23. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 在边 AC 上, 点 E 在 BC 的延长线上, $BD = DE$, $EF \perp AC$, 交 AC 延长线于点 F , $AD = EF$.



(1) 求证: $\angle ABD = \angle FDE$;

(2) 求证: $AB = CD + EF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定和性质, 证明三角形全等是解题的关键.

(1) 由“HL”可证 $\text{Rt}\triangle BAD \cong \text{Rt}\triangle DEF$, 可得 $\angle ABD = \angle FDE$;

(2) 由全等三角形的性质可得 $AB = DF$, $\angle DFB = \angle DEF$, 由等腰三角形的性质和外角性质可证 $CF = EF$, 即可求解.

【小问1详解】

证明: $\because EF \perp AC$,

$$\therefore \angle F = 90^\circ = \angle BAC,$$

在 $\text{Rt}\triangle BAD$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} BD = DE \\ AD = EF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BAD \cong \text{Rt}\triangle DEF (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle ABD = \angle FDE;$$

【小问2详解】

证明: $\because \text{Rt}\triangle BAD \cong \text{Rt}\triangle DEF (\text{HL}),$

$$\therefore AB = DF, \quad \angle DFB = \angle DEF,$$

$$\because BD = DE,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DEB,$$

$$\therefore \angle ADB - \angle DBE = \angle DEF - \angle DEB,$$

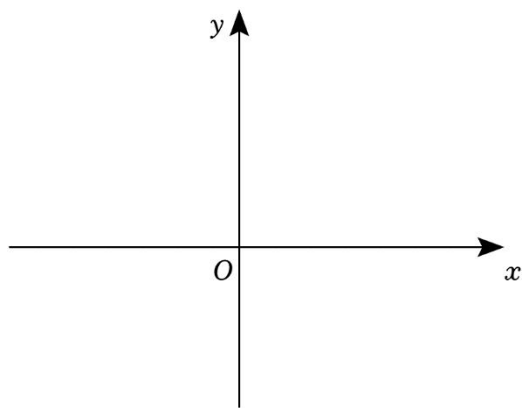
$$\therefore \angle BCD = \angle CEF,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle CEF,$$

$$\therefore CF = EF,$$

$$\therefore AB = DF = DC + CF = DC + EF.$$

24. 已知在直角坐标平面内, 函数 $y = -\frac{8}{x}$ 的图象经过点 $A(-4, a)$, 点 A 关于 x 轴的对称点 B 在直线 $y = kx$ 上.



(1) 求 k 的值:

(2) 点 P 在射线 BO 上, 点 Q 是坐标平面内一点, $PQ \perp x$ 轴. 如果 $\triangle PAQ$ 是等腰直角三角形, $\angle PAQ = 90^\circ$, 求点 Q 的坐标.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\left(-\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$

【解析】

【分析】本题考查待定系数法求函数解析式, 全等三角形的判定和性质, 本题的关键是根据题意画图, 通

过构造全等研究线段的数量关系，从而求出点 Q 的坐标.

(1) 把 $A(-4, a)$ 代入 $y = -\frac{8}{x}$, 得到点 A 的坐标, 从而得到点 B 的坐标, 代入 $y = kx$ 解出 k 的值;

(2) 设点 P 的坐标为 $(m, \frac{1}{2}m)$, 连接 AP , 作 $\angle PAQ = 90^\circ$, $AQ = AP$, 过点 A 作直线平行于 y 轴, 分别过点 P, Q 作 PM, QN 垂直于该直线, 垂足为 M, N , 证明 $\triangle ANQ \cong \triangle PMA$, 求出点 Q 的坐标, 通过 $x_P = x_Q$, 求出点 Q 的坐标.

【小问 1 详解】

解: 把 $A(-4, a)$ 代入 $y = -\frac{8}{x}$, 得 $a = 2$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-4, 2)$,

$\therefore$ 点 A 与点 B 关于 x 轴对称,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-4, -2)$,

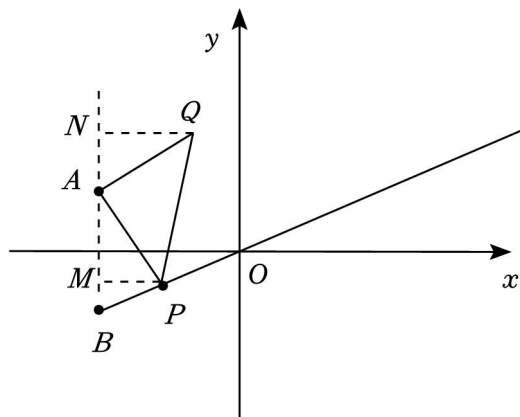
把点 $B(-4, -2)$ 代入 $y = kx$,

解得: $k = \frac{1}{2}$;

【小问 2 详解】

解: 设点 P 的坐标为 $(m, \frac{1}{2}m)$, 连接 AP , 作 $\angle PAQ = 90^\circ$, $AQ = AP$, 过点 A 作直线平行于 y 轴, 分

别过点 P, Q 作 PM, QN 垂直于该直线, 垂足为 M, N ,



$\therefore \triangle PAQ$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AQ = AP,$$

$$\because \angle MAP + \angle APM = 90^\circ, \quad \angle MAP + \angle QAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APM = \angle QAN,$$

$$\because \angle QNA = \angle AMP = 90^\circ, \quad AQ = AP,$$

$$\therefore \triangle ANQ \cong \triangle PMA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AM = NQ, \quad AN = PM,$$

$$\because A(-4, 2), \quad P\left(m, \frac{1}{2}m\right),$$

$$\therefore AM = NQ = 2 - \frac{1}{2}m, \quad AN = PM = m + 4,$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的坐标为 } \left(-2 - \frac{1}{2}m, m + 6\right),$$

$$\because PQ \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore x_P = x_Q,$$

$$\text{即 } m = -2 - \frac{1}{2}m,$$

$$\text{解得 } m = -\frac{4}{3},$$

$$-\frac{4}{3} + 6 = \frac{14}{3},$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right).$$

25. 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 P 在边 AC 上, 连接 BP .

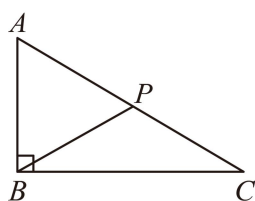


图1

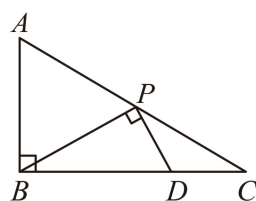
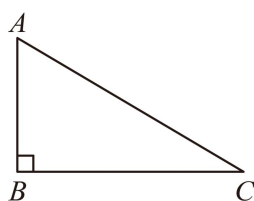


图2



备用图

(1) 如图 1, 如果点 P 在线段 AB 的垂直平分线上, 求证: $AP = PC$;

(2) 过点 P 作 $PD \perp BP$, 交边 BC 于点 D ,

①如图 2, 如果点 P 是线段 AC 的中点, 且 $BD = 2CD$, 求 $\angle C$ 的度数;

②填空：如果 $AB=6$ ， $BC=8$ ，且 $\triangle ABP$ 是以 BP 为腰的等腰三角形，那么 PD 的长等于 _____.

【答案】(1) 见解析 (2) ① 30° ；② $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】(1) 由线段垂直平分线的性质得 $AP=BP$ ，则 $\angle A=\angle ABP$ ，再证 $\angle CBP=\angle C$ ，得 $PC=BP$ ，即可得出结论；

(2) ①取 BD 的中点 E ，连接 PE ，由直角三角形斜边上的中线性质的得 $PE=\frac{1}{2}BD=BE=DE$ ，再证 $\triangle BPE\cong\triangle CPD(SAS)$ ，得 $\angle BPE=\angle CPD$ ，则 $\angle EPD=\angle EDP=\angle C+\angle CPD=2\angle C$ ，即可解决问题；
②分两种情况， a 、 $BP=AP$ 时， b 、 $BP=AB=6$ 时，由直角三角形的性质和勾股定理分别求出 PD 的长即可.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，

$$\therefore AP=BP,$$

$$\therefore \angle A=\angle ABP,$$

$$\because \angle ABC=90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABP+\angle CBP=90^\circ, \angle A+\angle C=90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBP=\angle C,$$

$$\therefore PC=BP,$$

$$\therefore AP=PC;$$

【小问 2 详解】

解：①如图 2，取 BD 的中点 E ，连接 PE ，

$$\text{则 } BE=DE, \quad BD=2BE=2DE,$$

$$\because PD\perp BP,$$

$$\therefore \angle BPD=90^\circ,$$

$$\therefore PE=\frac{1}{2}BD=BE=DE,$$

$$\therefore \angle BPE=\angle PBC, \quad \angle EPD=\angle EDP,$$

$$\because BD=2CD,$$

$$\therefore BE=CD,$$

$$\because \angle ABC=90^\circ, \text{ 点 } P \text{ 是线段 } AC \text{ 的中点},$$

$$\therefore BP=\frac{1}{2}AC=CP,$$

$$\therefore \angle PBE = \angle C,$$

在 $\triangle BPE$ 和 $\triangle CPD$ 中,

$$\begin{cases} BP = CP \\ \angle PBE = \angle C, \\ BE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BPE \cong \triangle CPD (SAS),$$

$$\therefore \angle BPE = \angle CPD,$$

$$\therefore \angle BPE = \angle CPD = \angle PBC = \angle C,$$

$$\therefore \angle EPD = \angle EDP = \angle C + \angle CPD = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle BPD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPE + \angle EPD = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle C + 2\angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ,$$

即 $\angle C$ 的度数为 30° ;

$$\textcircled{2} \because AB = 6, BC = 8, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

分两种情况:

a、如图 3, $BP = AP$ 时,

$$\text{由 (1) 可知, } BP = AP = PC = \frac{1}{2}AC = 5,$$

过点 P 作 $PM \perp BC$ 于点 M ,

$$\text{则 } BM = CM = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\therefore PM = \sqrt{BP^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

设 $DM = x$, 则 $BD = 4 + x$,

在 $Rt\triangle BPD$ 和 $Rt\triangle PDM$ 中, 由勾股定理得: $PD^2 = BD^2 - BP^2 = PM^2 + DM^2$,

$$\text{即 } (4+x)^2 - 5^2 = 3^2 + x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{9}{4},$$

$$\therefore DM = \frac{9}{4},$$

$$\therefore PD = \sqrt{PM^2 + DM^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{15}{4};$$

b、如图 4, $BP = AB = 6$ 时, $\angle A = \angle BPA$,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore PD \perp BP,$$

$$\therefore \angle BPD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BPA + \angle CPD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle CPD,$$

$$\therefore PD = CD,$$

设 $PD = CD = m$, 则 $BD = 8 - m$,

在 $Rt\triangle BPD$ 中, 由勾股定理得: $BP^2 + PD^2 = BD^2$,

$$\text{即 } 6^2 + m^2 = (8 - m)^2,$$

$$\text{解得: } m = \frac{7}{4},$$

$$\therefore PD = \frac{7}{4};$$

综上所述, PD 的长等于 $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{7}{4}$,

故答案为: $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{7}{4}$.

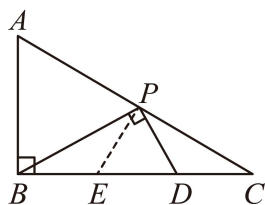


图2

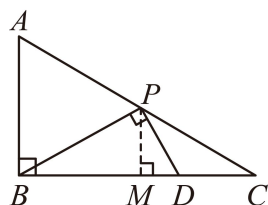


图3

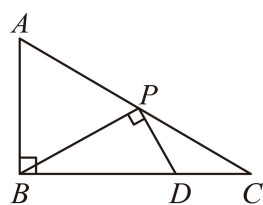


图4

【点睛】本题是三角形综合题, 考查了线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质、全等三角形的判定与性质、直角三角形斜边上的中线性质的性质、勾股定理以及分类讨论等知识, 本题综合性强, 熟练掌握全等三角形的判定与性质、等腰三角形的性质以及勾股定理是解题的关键, 属于中考常考题型.