

2023 学年第一学期期末考试八年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 下列各式中, 与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{12}$ C. $\sqrt{9}$ D. $\sqrt{36}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了同类二次根式的定义, 根据二次根式的性质把各个二次根式化简, 根据同类二次根式的定义判断即可, 掌握二次根式的性质是解题的关键.

【详解】A、由最简二次根式 $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同, 不是同类二次根式, 不符合题意;

B、由 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 最简二次根式 $2\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数相同, 是同类二次根式, 符合题意;

C、由 $\sqrt{9} = 3$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同, 不是同类二次根式, 不符合题意;

D、由 $\sqrt{36} = 6$ 与 $\sqrt{3}$ 被开方数不同, 不是同类二次根式, 不符合题意;

故选: B.

2. 二次根式 $\sqrt{m}-1$ 的一个有理化因式是 ()

- A. $\sqrt{m+1}$ B. $\sqrt{m}+1$ C. $\sqrt{m}-1$ D. $\sqrt{m-1}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据有理化因式的定义判断即可.

【详解】 $\because \sqrt{m}-1 \times \sqrt{m}+1 = m-1$

$\therefore$ 二次根式 $\sqrt{m}-1$ 的一个有理化因式是 $\sqrt{m}+1$

故选 B.

【点睛】本题主要考查了二次根式的有理化因式的概念, 熟练利用定义得出是解题关键.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, a 、 b 、 c 分别为 $\angle A$, $\angle B$ 和 $\angle C$ 的对边, 在下列条件中, 无法判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形的是 ()

- A. $\angle A:\angle B:\angle C = 3:4:5$ B. $b^2 = a^2 - c^2$
C. $\angle C = \angle A - \angle B$ D. $a:b:c = 12:13:5$

【答案】A

【解析】

【分析】此题考查了直角三角形的判定，根据三角形的内角和，勾股定理逆定理即可，解题的关键是熟练掌握勾股定理逆定理及三角形的内角和定理的应用.

【详解】A、设三角形的三角分别为 $3x^\circ$ ， $4x^\circ$ ， $5x^\circ$ ， $3x + 4x + 5x = 180$ ，解得： $x = 15$ ，

$\therefore \angle A = 15^\circ \times 3 = 45^\circ$ ， $\angle B = 15^\circ \times 4 = 60^\circ$ ， $\angle C = 15^\circ \times 5 = 75^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形，此选项符合题意；

B、 $\because b^2 = a^2 - c^2$ ，

$\therefore a^2 = b^2 + c^2$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，此选项不符合题意；

C、由 $\angle C = \angle A - \angle B$ 得， $\angle A = \angle C + \angle B = 12 \times 180^\circ = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，此选项不符合题意；

D、由 $a:b:c = 12:13:5$ ，设 $a = 12k$ ， $b = 13k$ ， $c = 5k$ ，则 $a^2 + c^2 = (12k)^2 + (5k)^2 = 169k^2 = b^2$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，此选项不符合题意；

故选：A.

4. 已知反比例函数 $y = \frac{5}{x}$ 的图像上有两点 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，如果 $x_1 < x_2$ ，那么 y_1 与 y_2 的大小关系是

()

A. $y_1 > y_2$

B. $y_1 < y_2$

C. $y_1 = y_2$

D. 不能确定

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数的图象与性质，根据反比例函数的图象与性质判断即可，熟练掌握反比例函数的图象与性质是解题的关键.

【详解】 $\because y = \frac{5}{x}$ 中， $5 > 0$ ，

$\therefore$ 在每一个象限， y 随 x 的增大而减小，

当 $0 < x_1 < x_2$ 时， $y_1 > y_2$ ；

当 $x_1 < x_2 < 0$ 时， $y_1 > y_2$ ，

当 $x_1 < 0 < x_2$ 时, $y_1 < y_2$,

$\therefore y_1$ 与 y_2 的大小关系不能确定,

故选: D.

5. 下列说法正确的是 ()

- A. 周长为 1 的矩形的长与宽成正比例
- B. 面积为 1 的等腰三角形的腰长与底边长成正比例
- C. 面积为 1 的矩形的长与宽成反比例
- D. 等边三角形的面积与它的边长成正比例

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了正比例函数、反比例函数的定义, 属于基础题, 关键是掌握反比例函数解析式的一般形式 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$.

根据正比例函数的定义及形式 $y = kx (k \neq 0)$ 反比例函数的定义及形式 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 可判断各个命题的真假.

【详解】 解: A、设长方形的长为 x 、宽为 y ,

$$\therefore 2(x + y) = 1, \text{ 即 } y = -x + \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 长方形的长和宽不成任何比例关系, 故本选项错误;

B、设等腰三角形的腰为 a , 底边长为 b ,

$$\therefore \text{等腰三角形底边上的高为 } \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}},$$

$\therefore$ 等腰三角形的面积为 1,

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = 1, \text{ 即 } a = b^2 + \frac{16}{b^2},$$

$\therefore$ 面积一定的等腰三角形的腰长和底边长不成任何比例关系, 故本选项错误;

C、 $\therefore$ 长方形的面积 = 长 $\times$ 宽, 该长方形的面积是定值 1,

$\therefore$ 长与宽的乘积为定值,

$\therefore$ 面积为 1 的长方形的长与宽成反比例, 故本选项正确;

D、设等边三角形的边长为 t , 面积为 S ,

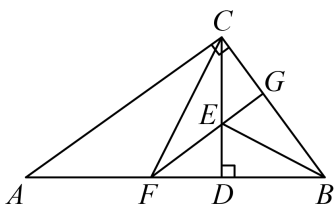
$$\therefore \text{等边三角形的高为 } \sqrt{t^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{\sqrt{3}}{4}t^2,$$

$\therefore$ 等边三角形的面积与边长不成比例关系，故本选项错误.

故选 C.

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BCA = 90^\circ$ ， CD 是高， BE 平分 $\angle ABC$ 交 CD 于点 E ，过 E 作 $EF \parallel AC$ 交边 AB 于点 F ，交边 BC 于点 G ，连接 CF ，下列结论中，不一定成立的是（ ）



- A. $\angle EFD = \angle BCD$ B. $\angle ACF = \angle DCF$ C. $BF = BC$ D. $AF = CF$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了角平分线的定义，全等三角形的判定与性质，直角三角形的性质，等腰直角三角形的性质，根据性质逐项判断即可，熟练掌握以上知识点的应用是解题的关键.

【详解】A、 $\because EF \parallel AC$ ， $\angle BCA = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle CGE = \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD + \angle CEG = 90^\circ,$$

又 $\because CD$ 是高，

$$\therefore \angle EFD + \angle FED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CEG = \angle FED,$$

$$\therefore \angle EFD = \angle BCD, \text{ 故此选项正确;}$$

B、由上可得： $\angle EFD = \angle BCD$ ，

又由 C 选项得： $\triangle BCE \cong \triangle BFE$ ，

$$\therefore BF = BC,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle BCF,$$

$$\therefore \angle BFC - \angle EFD = \angle BCF - \angle BCE, \text{ 即 } \angle DCF = \angle CFG,$$

$$\therefore EF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle CFG,$$

$\therefore \angle ACF = \angle DCF$ ，故此选项正确；

C、由 A 证明得 $\angle EFD = \angle BCD$ ，

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ，

$\therefore \angle EBC = \angle EBF$ ，

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BFE$ 中，

$$\begin{cases} \angle EFD = \angle BCD \\ \angle EBF = \angle EBC, \\ BE = BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle BFE (AAS)$ ，

$\therefore BF = BC$ ，故此选项正确；

D、由上可知： $\angle ACF = \angle DCF$ ，若 $AF = CF$ ，则有 $\angle ACF = \angle DCF = \angle A$ ，

则有 $\angle A = 30^\circ$ ，与题意不符，故此选项不一定成立；

故选：D。

二、填空题（本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 化简： $\sqrt{45} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $3\sqrt{5}$ 。

【解析】

【分析】直接逆用二次根式的乘法公式进行化简即可；

【详解】解：原式 $= \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ 。

故答案为 $3\sqrt{5}$ 。

【点睛】本题考查二次根式的化简，解题关键是熟练掌握二次根式的性质以及二次根式的乘法。

8. 方程 $x^2 = 2x$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = 2$

【解析】

【分析】根据因式分解法解一元二次方程，即可求解。

【详解】解： $x^2 = 2x$ ，

$\therefore x^2 - 2x = 0$ ，

即 $x(x - 2) = 0$ ，

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x-2=0,$$

$$\text{解得: } x_1=0, x_2=2,$$

$$\text{故答案为: } x_1=0, x_2=2.$$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

$$9. \text{ 计算: } \sqrt{18a^2b^5} (a>0) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】 } 3ab^2\sqrt{2b}$$

【解析】

【分析】 此题考查二次根式的性质与化简，根据二次根式性质化简即可求解，解题关键在于掌握运算法则.

$$\text{【详解】 解: } \sqrt{18a^2b^5} = \sqrt{3^2a^2(b^2)^2 \times 2b} = 3ab^2\sqrt{2b},$$

$$\text{故答案为: } 3ab^2\sqrt{2b}.$$

$$10. \text{ 若关于 } x \text{ 的一元二次方程 } (m-1)x^2 + 5x + m^2 = 1 \text{ 的常数项为 } 0, \text{ 则 } m = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】 } -1$$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的有关概念，一元二次方程的一般形式是： $ax^2+bx+c=0$ （ a, b, c 是常数且 $a \neq 0$ ）特别要注意 $a \neq 0$ 的条件，其中 ax^2 叫二次项， bx 叫一次项， c 是常数项，其中 a, b, c 分别叫二次项系数，一次项系数，常数项.

$$\text{【详解】 由 } (m-1)x^2 + 5x + m^2 = 1 \text{ 得 } (m-1)x^2 + 5x + m^2 - 1 = 0,$$

$$\therefore \text{常数项为 } 0,$$

$$\therefore m^2 - 1 \text{ 且 } m - 1 \neq 0,$$

$$\text{解得: } m = -1,$$

$$\text{故答案为: } -1.$$

$$11. \text{ 在实数范围内因式分解: } x^2 - 4x - 2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】 } (x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$$

【解析】

【分析】 此题考查了实数范围内因式分解，首先配成完全平方公式，然后利用平方差公式进行因式分解即可，配成完全平方公式及熟练掌握因式分解的方法是解题的关键.

【详解】解： $x^2 - 4x - 2 = x^2 - 4x + 4 - 4 - 2$,

$$= (x-2)^2 - (\sqrt{6})^2,$$

$$= (x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6}),$$

故答案为： $(x-2+\sqrt{6})(x-2-\sqrt{6})$.

12. 函数 $y = \frac{\sqrt{1-2x}}{x+2}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \leq \frac{1}{2}$ 且 $x \neq -2$

【解析】

【分析】 本题考查了求函数定义域，二次根式有意义的条件和分式有意义的条件，熟知二次根式有意义的条件和分式有意义的条件是解题的关键.

根据二次根式有意义的条件（被开方数大于等于 0）和分式有意义的条件（分母不等于 0），即可解答.

【详解】 $\because y = \frac{\sqrt{1-2x}}{x+2}$

$$\therefore 1-2x \geq 0, \quad x+2 \neq 0$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{2} \text{ 且 } x \neq -2.$$

故答案为： $x \leq \frac{1}{2}$ 且 $x \neq -2$.

13. 一个直角三角形两条直角边的比是 3: 4，斜边长为 10cm，那么这个直角三角形面积为__.

【答案】 24cm^2 ##24 平方厘米

【解析】

【分析】 设两直角边是 $3x$ 、 $4x$ ，利用勾股定理求出两直角边的长即可得到答案.

【详解】 根据题意，设两直角边是 $3x$ 、 $4x$,

$$\text{则 } (3x)^2 + (4x)^2 = 10^2,$$

解得 $x=2$ ，所以两直角边为 6cm，8cm，

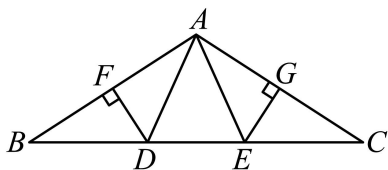
$$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24,$$

所以它的面积是 24cm^2 ,

故答案为 24cm^2 .

【点睛】 本题主要考查了勾股定理，熟知勾股定理是解题的关键.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 分别作 AB 、 AC 的垂直平分线, 交 BC 于点 D 、 E , 垂足为 F 、 G , 若 $\angle BAC=110^\circ$, 则 $\angle DAE =$ _____ 度.



【答案】 40

【解析】

【分析】 此题考查了线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等的性质，等边对等角的性质，三角形的内角和定理，根据线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等可得 $AD = BD$ ， $AE = CE$ ，根据等边对等角可得 $\angle B = \angle BAD$ ， $\angle EAC = \angle C$ ，然后利用三角形的内角和定理列式计算即可得解，解题的关键是熟练掌握以上知识的应用及整体思想的应用.

【详解】 $\because DF$ 垂直平分 AB 、 EG 垂直平分 AC ，

$$\therefore AD = BD, \quad AE = CE,$$

$$\therefore \angle B = \angle BAD, \quad \angle EAC = \angle C,$$

$$\because \angle BAC = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle EAC = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC - (\angle BAD + \angle EAC) = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ,$$

故答案为：40.

15. 经过定点 A 且半径为 5cm 的圆的圆心的轨迹是_____.

【答案】 以点 A 为圆心，5cm 为半径的圆.

【解析】

【分析】 要求作经过定点 A，且半径为 5 厘米的圆的圆心，则圆心应满足到点 A 的距离恒等于 5cm，根据点和圆的位置关系与数量之间的联系进行分析.

【详解】 解：所求圆心的轨迹，就是到 A 点的距离等于 5 厘米的点的集合，因此应该是一个以点 A 为圆心，5cm 为半径的圆.

故答案为以点 A 为圆心，5cm 为半径的圆.

【点睛】 此题考查了轨迹，就是到定点的距离等于定长的点的集合，因此应该是一个圆.

16. 已知直角坐标平面内两点 $A(3,1)$ 和 $B(1,-2)$ ，那么 A、B 两点间的距离等于_____.

【答案】 $\sqrt{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了勾股定理，两点间的距离，解题的关键是掌握两点间的距离公式.

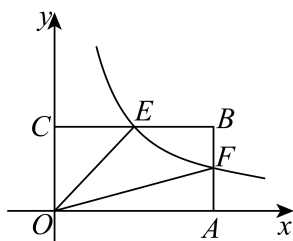
根据两点间的距离公式 $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 解答即可.

【详解】 $\because$ 直角坐标平面内两点 $A(3,1)$ 和 $B(1,-2)$,

$\therefore A、B$ 两点间的距离等于 $\sqrt{(3-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}$.

故答案为: $\sqrt{13}$.

17. 如图, 点 B 为第一象限内一点, 过点 B 分别作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足为点 $A、C$, E 为 BC 的中点, 函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过点 E 且交 AB 于 F , 已知四边形 $OEBF$ 的面积为 2, 则 k 的值为_____.



【答案】 2

【解析】

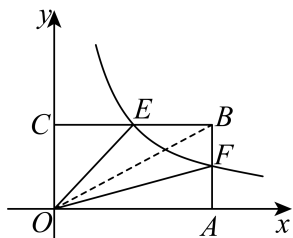
【分析】 此题考查了反比例函数的系数 k 的几何意义及矩形的性质与判定, 连接 OB , 由四边形 $OACB$ 为

矩形, 可得 $BC \parallel x$, 则 $S_{\triangle OBE} = S_{\triangle OCE} = \frac{|k|}{2}$, 同理 $S_{\triangle OAF} = S_{\triangle OBF} = \frac{1}{2} S_{\triangle OAB} = \frac{|k|}{2}$, 再根据四边形 $OEBF$ 的

面积为 2 即可求解,

解题的关键是正确理解系数 k 的几何意义, 运用数形结合的思想方法.

【详解】 连接 OB ,



$\because BC \perp y, BC \perp x,$

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 为矩形,

$$\therefore BC \parallel x,$$

$$\therefore S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OBA},$$

$\therefore E$ 为 BC 的中点,

$$\therefore S_{\triangle OCE} = S_{\triangle OBE} = \frac{1}{2} S_{\triangle OBC} = \frac{|k|}{2},$$

$\therefore F$ 在函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上,

$$\therefore S_{\triangle OAF} = \frac{|k|}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle OAF} = S_{\triangle OBF} = \frac{1}{2} S_{\triangle OAB} = \frac{|k|}{2},$$

$\therefore$ 四边形 $OEBF$ 的面积为 2,

$$\therefore \frac{|k|}{2} + \frac{|k|}{2} = |k| = 2,$$

$$\therefore k > 0,$$

$$\therefore k = 2,$$

故答案为: 2.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = 4$, 如果将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 B 与点 A 重合, 且折痕交边 AB 于点 M , 交边 BC 于点 N , 如果 $\triangle CAN$ 是直角三角形, 那么 $\triangle ABC$ 的面积是_____.

【答案】 4 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 分两种情况: 当 $\angle ANC = 90^\circ$ 时, 根据 $AB = AC$, $BC = 4$, $\angle ANC = 90^\circ$ 及将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 B 与点 A 重合, 可得 $BN = AN = 2$, 可得到 $\triangle ABC$ 的面积; 当 $\angle NAC = 90^\circ$ 时, 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H , 设 $BN = x$, 则 $NH = 2 - x$, 可得 $AH^2 = 4x - 4$, $AC^2 = 4x$, 又 $AN^2 + AC^2 = CN^2$, 可得 $BN = AN = \frac{4}{3}$,

$NH = \frac{2}{3}$, 再利用勾股定理可得 $AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 可得到 $\triangle ABC$ 的面积.

【详解】 解: 当 $\angle ANC = 90^\circ$ 时, 如图:

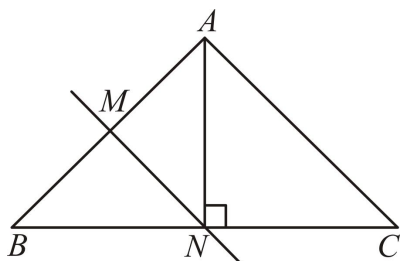
$$\therefore AB = AC, \quad BC = 4, \quad \angle ANC = 90^\circ,$$

$$\therefore BN = CN = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 B 与点 A 重合,

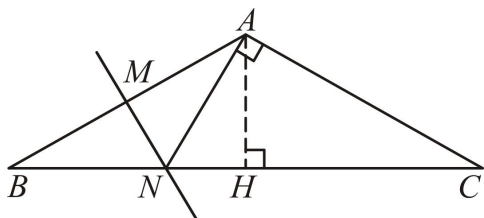
$$\therefore AN = BN = 2,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积是: } \frac{1}{2}BC \cdot AN = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4;$$



当 $\angle NAC = 90^\circ$ 时,

如图, 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ,



设 $BN = x$,

$$\because AB = AC, \quad BC = 4,$$

$$\therefore BH = CH = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$$\therefore NH = 2 - x,$$

$\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 B 与点 A 重合,

$$\therefore AN = BN = x, \quad CN = BC - BN = 4 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ANH \text{ 中, } AH^2 = AN^2 - NH^2 = x^2 - (2 - x)^2 = 4x - 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACH \text{ 中, } AC^2 = AH^2 + CH^2 = 4x - 4 + 4 = 4x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle NAC \text{ 中, } AN^2 + AC^2 = CN^2,$$

$$\therefore x^2 + 4x = (4 - x)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore BN = AN = \frac{4}{3}, \quad NH = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AH = \sqrt{4x-4} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积是: } \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

综上所述, 如果 $\triangle CAN$ 是直角三角形, 那么 $\triangle ABC$ 的面积是 4 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

故答案为: 4 或 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】本题是等腰三角形的折叠问题, 考查了折叠的性质, 等腰三角形三线合一性质, 勾股定理, 三角形面积等知识. 解题的关键是分类画出图形, 求出 BC 边上的高.

三、简答题 (本大题共 4 题, 每题 6 分, 满分 24 分)

19. 计算: $(2-\sqrt{3})^2 + \frac{4}{\sqrt{3}+2} + 9\sqrt{\frac{1}{3}} - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^0$.

【答案】 $14-5\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】此题考查了二次根式的化简和分母有理化, 根据二次根式的化简法则依次化简后再计算加减法, 掌握二次根式的性质是解题的关键.

【详解】解: 原式 $= 2^2 - 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + \frac{4(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} + 3\sqrt{9 \times \frac{1}{3}} - 1$,

$$= 4 - 4\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3} + 8 + 3\sqrt{3} - 1,$$

$$= 14 - 5\sqrt{3}.$$

20. 用配方法解方程: $3x^2 + 6x - 1 = 0$

【答案】 $x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3}-1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$

【解析】

【分析】先将二次项系数化为 1, 然后根据配方法, 可即答案.

【详解】解: $x^2 + 2x - \frac{1}{3} = 0$

$$x^2 + 2x + 1 = 1 + \frac{1}{3}$$

$$(x+1)^2 = \frac{4}{3}$$

$$x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

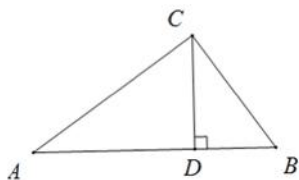
$$\text{故答案为 } x_1 = +\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1, x_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$$

【点睛】本题考查了配方法解一元二次方程，解题时要注意解题步骤的准确应用．选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为1，一次项的系数是2的倍数．

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CD \perp AB$ 于点D， $AC=20$ ， $BC=15$ ， $DB=9$ ，

(1) 求DC的长；

(2) 求证： $\triangle ABC$ 是直角三角形．



【答案】(1) 12；(2) 证明见详解．

【解析】

【分析】(1) 直接根据勾股定理求出CD即可；

(2) 根据勾股定理的逆定理即可证明出 $\triangle ABC$ 是直角三角形．

【详解】解：(1) $\because CD \perp AB$ ，

$$\therefore \angle CDB = \angle CDA = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDB$ 中， $\because BC=15$ ， $DB=9$ ，

$$\therefore \text{根据勾股定理，得 } CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 12;$$

(2) 证明：在 $\text{Rt}\triangle CDA$ 中， $CD^2 + AD^2 = AC^2$ ，

$$\therefore 12^2 + AD^2 = 20^2,$$

$$\therefore AD = 16,$$

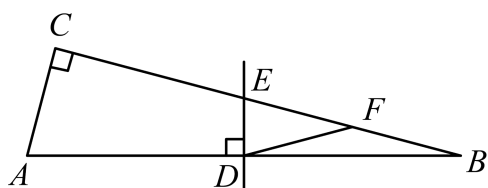
$$\therefore AB = AD + BD = 16 + 9 = 25,$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = 20^2 + 15^2 = 625 = AB^2$$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形．

【点睛】本题考查勾股定理、勾股定理逆定理的内容，求出AB是解题的关键．

22. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 15^\circ$, 边 AB 的垂直平分线交边 BC 于点 E , 垂足为点 D . 取线段 BE 的中点 F , 联结 DF . 求证: $AC = DF$.

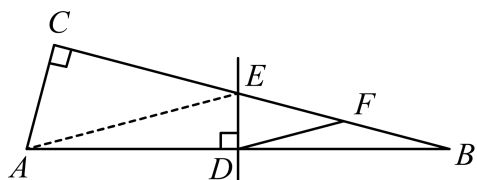


【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查中垂线的性质, 直角三角形斜边中线的性质, 直角三角形 30° 角所对的边与斜边之间的关系; 先根据线段垂直平分线的性质得: $AE = BE$, 再利用直角三角形斜边中线的性质得: DF 与 BE 的关系, 最后根据直角三角形 30° 度的性质得 AC 和 AE 的关系, 从而得出结论.

【详解】证明: 如图所示, 连接 AE ,



$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore AE = BE$, $\angle EDB = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAB = \angle EBA = 15^\circ$,

$\therefore \angle AEC = 30^\circ$,

$\text{Rt}\triangle EDB$ 中, $\because F$ 是 BE 的中点,

$\therefore DF = \frac{1}{2} BE$,

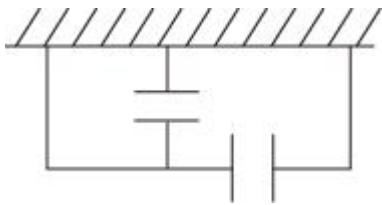
$\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $\because \angle AEC = 30^\circ$,

$\therefore AC = \frac{1}{2} AE$,

$\therefore AC = DF$.

四、解答题 (本大题共 5 题, 第 23 题 6 分, 第 24、25、26 题 8 分, 第 27 题 10 分, 满分 40 分)

23. 如图所示, 要建设一个面积为 90 平方米的仓库, 仓库的一边靠墙, 这堵墙长 16 米; 仓库如图要求开两扇 1.5 米宽的小门. 已知围建仓库的现有材料可使新建木墙的总长为 30 米, 那么这个仓库设计的长和宽应分别是多少米?



【答案】仓库的长是 15 米，宽是 6 米.

【解析】

【分析】设仓库的宽是 x 米，长是 $(30-3x+1.5\times 2)$ ，根据面积为 90 平方米可列方程求解.

【详解】解：设仓库的宽是 x 米，

$$(30-2x+1.5\times 2) x=90,$$

整理得， $x^2 - 11x + 30 = 0$

解得， $x=5$ 或 $x=6$ ，

当 $x=5$ 米时，长为 $30-2\times 5+1.5\times 2=18$ 米 > 16 米，

故 $x=5$ 米不符合题意；

当 $x=6$ 米时，长为 $30-2\times 6+1.5\times 2=15$ 米 < 16 米，

答：仓库的长是 15 米，宽是 6 米.

【点睛】本题考查理解题意的能力，关键是设出长，表示出宽，以面积做为等量关系列方程求解.

24. 小李在一网上购物平台购物，恰逢周年庆，平台推出优惠活动，如图广告所示：

三重惊喜!!!
◇免运费!
◇全部商品七折
◇购物金额(折后)满56元减10元

(1) 请写出小李的实付金额 y (元) 关方购物的商品总价 x (元) 的函数解析式及其定义域；

(2) 小李和好朋友小方拼单购物，小李和小方所购商品的总价分别为 60 元和 40 元，那么小李和小方应如何分配实付金额？请写出你的理由.

【答案】(1) $y = \begin{cases} 0.7x, (0 < x < 80) \\ 0.7x - 10, (x \geq 80) \end{cases}$

(2) 小李和小方分别应实付金额 36 元和 24 元.

【解析】

【分析】本题主要考查一次函数的应用，

(1) 分情况：当商品总价折后小方 56 元时可以求得实付金额；当商品总价折后大方等方 56 元时可以求得实付金额；

(2) 判断小李和小方拼单购物商品总价，根据第一问的函数解析式算的拼单后实付金额，再按比例求得每

人所付实际金额;

【小问 1 详解】

解: 根据题意得: 商品总价 x 打折之后为 $0.7x$, 且满 56 减 10, 根据情况分类得:

当 $0.7x < 56$, 得 $0 < x < 80$, 实付金额 $y = 0.7x$;

当 $0.7x \geq 56$, 得 $x \geq 80$, 实付金额 $y = 0.7x - 10$;

$$\text{则 } y = \begin{cases} 0.7x, (0 < x < 80) \\ 0.7x - 10, (x \geq 80) \end{cases}.$$

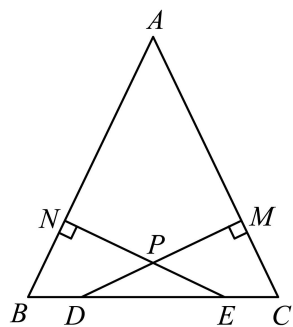
【小问 2 详解】

小李和小方所购商品的总价分别为 60 元和 40 元, 商品总价为 100 元.

因为商品总价大于 80, 代入: $y = 0.7x - 10$, 则 $y = 0.7 \times 100 - 10 = 60$,

则小李应实付 $\frac{60}{100} \times 60 = 36$ (元), 小方应实付 $\frac{60}{100} \times 40 = 24$ (元).

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 在边 BC 上, $BD = CE$, $DM \perp AC$, 垂足为 M , $EN \perp AB$, 垂足为 N , DM 与 EN 交于点 P , 且 $BN = CM$.



(1) 求证: $PD = PE$;

(2) 求证: 过点 A 、 P 的直线垂直平分线段 BC .

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 利用等式的性质可知 $BE = CD$, 再运用 HL 证明 $Rt\triangle BNE \cong Rt\triangle CMD$, 得 $\angle NED = \angle MDC$, 则有 $PD = PE$;

(2) 连接 AP 并延长交 BC 于点 Q , 由 (1) 知 $AB = AC$, 再说明 AP 平分 $\angle BAC$, 从而证明结论.

【小问 1 详解】

证明: (1) $\because DM \perp AC, EN \perp AB$,

$\therefore \angle BNE = \angle CMD = 90^\circ$,

$$\therefore BD = CE,$$

$$\therefore BD + DE = CE + DE,$$

$$\therefore BE = CD,$$

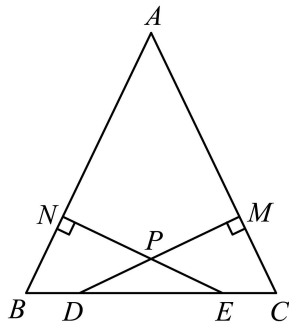
在 $Rt\triangle BNE$ 与 $Rt\triangle CMD$ 中,

$$\begin{cases} BE = CD \\ BN = CM \end{cases},$$

$$\therefore Rt\triangle BNE \cong Rt\triangle CMD \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle NED = \angle MDC,$$

$$\therefore PD = PE;$$



【小问 2 详解】

解: 连接 AP 并延长交 BC 于点 Q ,

$$\therefore Rt\triangle BNE \cong Rt\triangle CMD,$$

$$\therefore \angle B = \angle C, \quad NE = MD,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore NE = MD, \quad PD = PE,$$

$$\therefore NE - PE = MD - PD,$$

$$\therefore PN = PM,$$

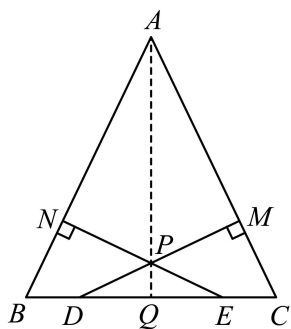
$$\text{又} \because PN \perp AB, \quad PM \perp AC,$$

$$\therefore AP \text{ 平分 } \angle BAC,$$

即 AQ 平分 $\angle BAC$,

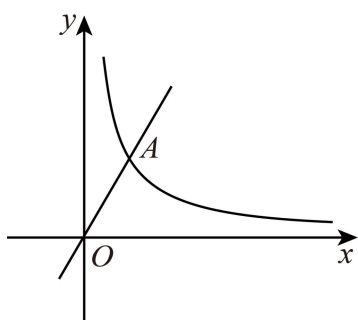
$$\therefore AQ \perp BC, \quad BQ = CQ,$$

即过点 A 、 P 的直线垂直平分线段 BC .



【点睛】 本题主要考查了全等三角形的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，角平分线的判定，线段垂直平分线的判定，熟知等腰三角形的性质与判定条件是解题的关键.

26. 如图，直线 OA 与反比例函数 $y = \frac{m}{x} (m \neq 0)$ 的图像在第一象限交于点 A ，已知 $OA = 4$ ，直线 OA 与 y 轴的夹角为 30° .



(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 若点 P 是坐标轴上的一点，当 $\triangle AOP$ 是直角三角形时，直接写出点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{4\sqrt{3}}{x}$;

(2) $(0, 2\sqrt{3})$ 或 $(2, 0)$ 或 $(0, \frac{8\sqrt{3}}{3})$ 或 $(8, 0)$.

【解析】

【分析】 (1) 把点 A 的坐标代入反比例函数即可得出答案；

(2) 分点 P 在 x 轴上和 y 轴上两种情况，再分别分 $\angle OPA = 90^\circ$ 和 $\angle OAP = 90^\circ$ 两种情况考虑即可；

本题考查了待定系数法求反比例函数的解析式，含 30° 角的直角三角形的性质，勾股定理，函数图象上点的坐标特征，解题的关键是熟练掌握以上知识点的应用.

【小问 1 详解】

如图 1，过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E ，

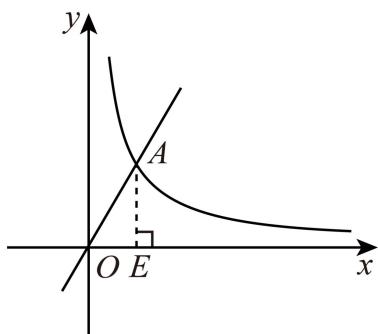


图1

$$\because \angle AOE = 60^\circ, \quad AE \perp OE,$$

$$\therefore \angle OAE = 30^\circ,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OA = 2, \quad \text{由勾股定理得: } AE = \sqrt{OA^2 - OE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 A 的坐标为 } (2, 2\sqrt{3}),$$

$$\because \text{反比例函数 } y = \frac{m}{x} \text{ 的图象过点 A,}$$

$$\therefore m = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为: } y = \frac{4\sqrt{3}}{x};$$

【小问 2 详解】

如图 2,

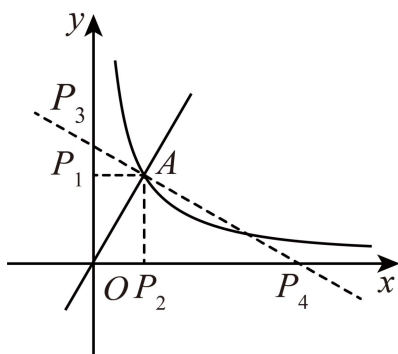


图2

当点 P_1 在 y 轴上时, 且 $\angle AP_1O = 90^\circ$,

$$\text{又} \because \angle AOP_1 = 30^\circ,$$

$$\therefore AP_1 = 2, \quad OP_1 = \sqrt{3}AP_1 = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } P_1(0, 2\sqrt{3});$$

当点 P_2 在 x 轴上, 且 $\angle AP_2O = 90^\circ$,

又 $\because \angle OAP_2 = 30^\circ$,

$\therefore OP_2 = 2$,

$\therefore$ 点 $P_2(2, 0)$;

当点 P_3 在 y 轴上, 且 $\angle P_3AO = 90^\circ$,

又 $\because \angle AOP_3 = 30^\circ$,

$\therefore OP_3 = 2AP_3$, $AO = \sqrt{3}AP_3 = 4$,

$\therefore OP_3 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, $\therefore$ 点 $P_3\left(0, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$;

当点 P_4 在 x 轴上, 且 $\angle P_4AO = 90^\circ$,

$\because \angle AOP_4 = 60^\circ$,

$\therefore \angle AP_4O = 30^\circ$,

$\therefore OP_4 = 2OA = 8$,

$\therefore$ 点 $P_4(8, 0)$,

综上所述: 点 P 的坐标为 $(0, 2\sqrt{3})$ 或 $(2, 0)$ 或 $\left(0, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $(8, 0)$.

27. 已知点 D 是等边 $\triangle ABC$ 边 BC 的中点, E 、 F 分别为边 AB 、射线 AC 上的点, 且 $\angle EDF = 120^\circ$.

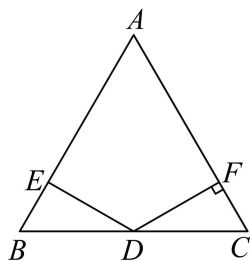


图1

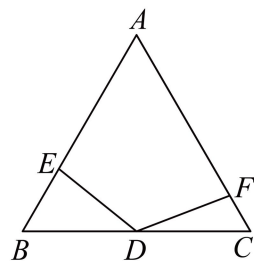


图2

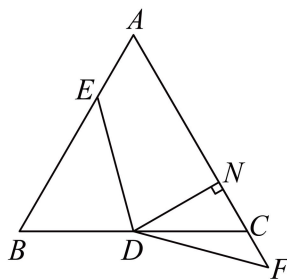


图3

(1) 如图1, 当 $DF \perp AC$, $AB = 4$ 时, 求 BE 的长;

(2) 如图2, 当 F 在边 AC 上时, 求证: $BE + CF = \frac{1}{2}AB$;

(3) 如图3, 当 F 在边 AC 的延长线上时, 作 $DN \perp AC$ 于点 N , 如果 $DN = FN$, 设 $BE = x$, $CF = y$, 求出 y 关于 x 的函数关系式.

【答案】(1) $BE = 1$;

(2) 证明见解析; (3) $y = (2 - \sqrt{3})x$.

【解析】

【分析】(1) 由 $\angle EDF = 120^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle DFC = 90^\circ$ 得 $\angle AED = 90^\circ$, 再根据全等, 等边三角形性质求得 BE 长度;

(2) 先由 D 点作 AB 、 AC 垂线, 再证 $\triangle MBD \cong \triangle NCD$, 再证 $\triangle EMD \cong \triangle FND$, 再结合有一个角为 30° 的直角三角形的特点, 从而得出;

(3) 先由 D 点作 AB 的垂线, 再用图中线段表示出 $x - y$ 和 $x + y$, 然后求出 x 和 y 之间的关系;
本题考查了等边三角形的性质、四边形的内角和定理、全等三角形的判定与性质、 30° 角的直角三角形的性质以及勾股定理等知识, 正确添加辅助线、熟练掌握上述知识是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 如图 1,

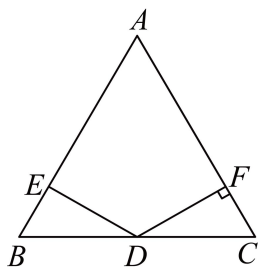


图1

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ$, $BC = AC = AB = 4$,

$\because$ 点 D 是线段 BC 的中点,

$\therefore BD = DC = \frac{1}{2}BC = 2$,

$\because DF \perp AC$,

$\therefore \angle AFD = 90^\circ$,

$\therefore \angle AED = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle BED = 90^\circ$,

$\therefore \angle BDE = 30^\circ$,

$\therefore BE = \frac{1}{2}BD = 1$;

【小问 2 详解】

解: 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 作 $DN \perp AC$ 于 N , 如图 2,

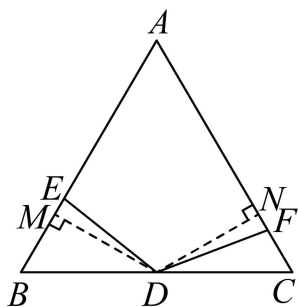


图2

则有 $\angle AMD = \angle BMD = \angle AND = \angle CND = 90^\circ$,

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle MDN = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle MDE = \angle NDF,$$

在 $\triangle MBD$ 和 $\triangle NCD$ 中,

$$\begin{cases} \angle BMD = \angle CND \\ \angle B = \angle C \\ BD = CD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle MBD \cong \triangle NCD (\text{AAS}),$$

$$\therefore BM = CN, \quad DM = DN,$$

在 $\triangle EMD$ 和 $\triangle FND$ 中,

$$\begin{cases} \angle EMD = \angle FND \\ DM = DN \\ \angle MDE = \angle NDF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EMD \cong \triangle FND (\text{ASA})$$

$$\therefore EM = FN,$$

$$\therefore BE + CF = BM + EM + CN - FN = BM + CN = 2BM = BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB;$$

【小问 3 详解】

解: 过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 如图 3,

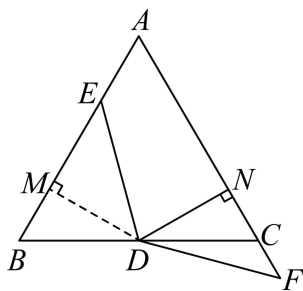


图3

同 (2) 的方法可得: $BM = CN$, $DM = DN$, $EM = FN$,

$$\therefore DN = FN,$$

$$\therefore DM = DN = FN = EM,$$

$$\therefore BE + CF = BM + EM + FN - CN = NF + EM = 2DM = x + y,$$

$$BE - CF = BM + EM - (FN - CN) = BM + NC = 2BM = x - y,$$

在 $\text{Rt}\triangle BMD$ 中,

$$\therefore \angle BDM = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = 2BM,$$

$$\text{由勾股定理得: } DM = \sqrt{BD^2 - BM^2} = \sqrt{3}BM,$$

$$\therefore x + y = \sqrt{3}(x - y), \text{ 整理得: } y = (2 - \sqrt{3})x,$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数关系式 } y = (2 - \sqrt{3})x.$$