

2023-2024 学年上海市浦东新区部分学校联考八年级（上）期末数学试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 3 分，共 18 分）

1. 下列二次根式中最简二次根式为（ ）

- A. $\sqrt{0.3x}$ B. $\sqrt{\frac{2}{x}}$ C. $\sqrt{x^3y}$ D. $\sqrt{x^2-1}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用最简二次根式的定义判断即可得到正确的选项.

【详解】解：A、 $\sqrt{0.3x}$ 可化为 $\frac{\sqrt{30x}}{10}$ ，不是最简二次根式，故本选项错误；

B、 $\sqrt{\frac{2}{x}}$ 可化为 $\frac{\sqrt{2x}}{x}$ ，不是最简二次根式，故本选项错误；

C、 $\sqrt{x^3y}$ 可化为 $|x|\sqrt{xy}$ ，不是最简二次根式，故本选项错误；

D、 $\sqrt{x^2-1}$ 是最简二次根式，故本选项正确；

故选：D.

【点睛】此题考查了最简二次根式以及二次根式的化简，熟练掌握最简二次根式的判断方法是解答本题的关键.

2. 在下列各组二次根式中，是同类二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ C. $\sqrt{2ab}$ 和 $\sqrt{ab^3}$ D. $\sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a+1}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式的性质化简，根据同类二次根式的概念判断即可.

【详解】解：A、 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，故 $\sqrt{12}$ 和 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

B、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 是同类二次根式，符合题意；

C、 $\sqrt{ab^3} = |b|\sqrt{ab}$ ，故 $\sqrt{2ab}$ 和 $\sqrt{ab^3}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

D、 $\sqrt{a-1}$ 和 $\sqrt{a+1}$ 不是同类二次根式，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查的是同类二次根式的概念、二次根式的化简，把几个二次根式化为最简二次根式后，解题的关键是掌握如果它们的被开方数相同，就把这几个二次根式叫做同类二次根式.

3. 下列函数中，y 随着 x 的增大而减小的是 ()

- A. $y=3x$ B. $y=-3x$ C. $y=\frac{3}{x}$ D. $y=-\frac{3}{x}$

【答案】B

【解析】

【详解】试题分析：A、 $y=3x$ ，y 随着 x 的增大而增大，故此选项错误；

B、 $y=-3x$ ，y 随着 x 的增大而减小，正确；

C、 $y=\frac{3}{x}$ ，每个象限内，y 随着 x 的增大而减小，故此选项错误；

D、 $y=-\frac{3}{x}$ ，每个象限内，y 随着 x 的增大而增大，故此选项错误；

故选 B.

考点：反比例函数的性质；正比例函数的性质.

4. 某厂今年十月份的总产量为 500 吨，十二月份的总产量达到 720 吨. 若平均每月增长率是 x，则可以列出方程 ()

- A. $500(1+2x)=720$ B. $500(1+x)^2=720$
C. $500(1+x^2)=720$ D. $720(1-x)^2=500$

【答案】B

【解析】

【分析】根据经过两个月的增长，产量从 500 吨增长到 720 吨列方程即可.

【详解】解：设平均每月的增率是 x，

由题意得： $500(1+x)^2=720$ ；

故选：B.

【点睛】本题考查求平均变化率的方法. 若设变化前的量为 a，变化后的量为 b，平均变化率为 x，则经过两次变化后的数量关系为 $a(1\pm x)^2=b$ (当增长时中间的“±”号选“+”，当降低时中间的“±”号选“-”).

5. 下列命题是真命题的个数为 ()

①两条直线被第三条直线所截，内错角相等.

②三角形的内角和是 180° .

③在同一平面内平行于同一条直线的两条直线平行.

④相等的角是对顶角.

⑤两点之间, 线段最短.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 B

【解析】

【分析】 首先判断所给命题的真假, 再选出正确的选项.

【详解】 解: $\because$ 两条直线被第三条直线所截, 两直线平行, 内错角相等,

$\therefore$ ①错误;

$\because$ 三角形的内角和是 180° , $\therefore$ ②正确;

$\because$ 在同一平面内平行于同一条直线的两条直线平行, $\therefore$ ③正确;

$\because$ 相等的角可以是对顶角, 也可以是内错角、同位角等等, $\therefore$ ④错误;

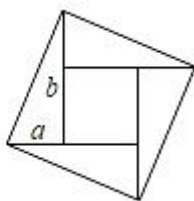
$\because$ 连接两点的所有连线中, 线段最短, $\therefore$ ⑤正确;

$\therefore$ 真命题为②③⑤,

故选 B .

【点睛】 本题考查命题的真假判断, 根据所学知识判断一个命题条件成立的情况下, 结论是否一定成立来判断命题是真命题还是假命题是解题关键.

6. 如图, 2002 年 8 月在北京召开的国际数学家大会会标其原型是我国古代数学家赵爽的《勾股弦图》, 它是由四个全等的直角三角形拼接而成, 如果大正方形的面积是 18, 直角三角形的直角边长分别为 a 、 b , 且 $a^2 + b^2 = ab + 10$, 那么小正方形的面积为 ()



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】 A

【解析】

【分析】 由正方形性质和勾股定理得 $a^2 + b^2 = 18$, 再由 $a^2 + b^2 = ab + 10$, 得 $ab + 10 = 18$, 则 $ab = 8$, 即可解决问题.

【详解】 解: 设大正方形的边长为 c ,

$\because$ 大正方形的面积是 18,

$$\therefore c^2 = 18,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2 = 18,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = ab + 10,$$

$$\therefore ab + 10 = 18,$$

$$\therefore ab = 8,$$

$$\therefore \text{小正方形的面积} = (b-a)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 18 - 2 \times 8 = 2,$$

故选：A.

【点睛】 本题考查了勾股定理、正方形的性质以及完全平方公式等知识，解题的关键是求出 $ab = 8$.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

7. 计算： $\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 根据二次根式的乘法法则计算即可.

【详解】 解： $\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{8 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ ；

故答案为 2.

【点睛】 本题考查了二次根式的乘法，属于基础题目，熟练掌握运算法则是关键.

8. 化简： $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{5} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的性质，解题的关键是掌握二次根式的性质，利用二次根式的性质进行化简.

【详解】 解： $\because 4 < 5$,

$$\therefore 2 < \sqrt{5},$$

$$\therefore \text{原式} = \sqrt{5} - 2.$$

故答案为： $\sqrt{5} - 2$

9. 已知 $x = 3$ 是方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 的一个根，那么 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 将 $x=3$ 代入方程 $x^2-2x+m=0$ ，即可得到答案.

【详解】 把 $x=3$ 代入 $x^2-2x+m=0$ 得 $9-6+m=0$ ，解得 $m=-3$.故答案为-3.

【点睛】 本题考查是有关一元二次方程的应用和一元一次方程的解法，解题的关键是熟悉有关一元二次方程的应用和一元一次方程的解法，要能够熟练灵活的应用.

10. 在实数范围内分解因式: $x^2-3x-2=$ _____.

【答案】 $(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2})(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2})$

【解析】

【分析】 首先令 $x^2-3x-2=0$ ，利用公式法即可求得此一元二次方程的解，继而可将此多项式分解.

【详解】 令 $x^2-3x-2=0$,

则 $a=1$, $b=-3$, $c=-2$,

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\therefore x^2-3x-2 = (x-\frac{3+\sqrt{17}}{2})(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}).$$

$$\text{故答案为 } (x-\frac{3+\sqrt{17}}{2})(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}).$$

【点睛】 本题考查实数范围内分解因式，解题的关键是掌握实数范围内分解因式.

11. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x-5}}$ 的定义域为_____.

【答案】 $x > 5$

【解析】

【分析】 根据二次根式被开方数大于等于 0，分母不等于 0，列不等式求解即可.

【详解】 解：根据题意得: $x-5 > 0$,

解得 $x > 5$,

故答案为: $x > 5$.

【点睛】 本题考查求函数自变量的范围，一般从三个方面考虑: (1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数; (2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0; (3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数为非负数.

12. 已知反比例函数 $y = \frac{3m-1}{x}$ 的图像有一支在第二象限, 那么常数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 由函数图象有一支在第二象限, 可得 $3m-1 < 0$, 解上步得到的不等式即可得到 m 的取值范围.

【详解】 由反比例函数的图象有一支在第二象限, 可得 $3m-1 < 0$, 解得 $m < \frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查反比例函数的性质, 解题的关键是掌握反比例函数的性质.

13. 已知直角坐标平面上点 $P(3,2)$ 和 $Q(-1,5)$, 那么 $PQ=$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 根据平面直角坐标系中两点的距离公式直接计算即可.

【详解】 $\because P(3,2)$ 和 $Q(-1,5)$,

$$\therefore PQ = \sqrt{(3+1)^2 + (2-5)^2} = 5.$$

【点睛】 本题考查两点间的距离公式, 解题的关键是掌握两点间的距离公式.

14. “有两角及其中一角的平分线对应相等的两个三角形全等”是_____命题. (填“真”或“假”)

【答案】 真

【解析】

【分析】 将原命题写出已知和求证, 然后进行证明后即可得到该命题为真命题.

【详解】 已知: $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle B$ 、 $\angle B'$ 的角平分线, $BD = B'D'$,

求证: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

证明: $\because \angle B = \angle B'$ 且 $\angle B$ 、 $\angle B'$ 的角平分线分别为 BD 和 $B'D'$,

$$\therefore \angle ABD = \angle A'B'D' = \frac{1}{2} \angle B,$$

$$\because BD = B'D', \angle A = \angle A',$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D',$$

$$\therefore AB = A'B',$$

$$\because \angle A = \angle A', \angle B = \angle B',$$

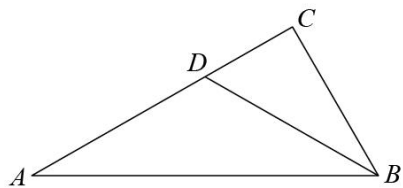
$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

$\therefore$ “有两角及其中一角的平分线对应相等的两个三角形全等”是真命题,

故答案为真.

【点睛】 本题考查命题与定理, 解题的关键是掌握命题证明的基本步骤.

15. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, $AD=4$, $CD=2$, 那么 $\angle A=$ ____度.



【答案】 30

【解析】

【分析】 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 取 A 、 D 的中点 F , 连接 EF , 根据角平分线性质求出 $DE = CD = 2$, 然后通过证明 $\triangle EFD$ 是等边三角形得出 $\angle EDF = 60^\circ$, 由三角形内角和定理即可求解.

【详解】 证明: 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 取 A 、 D 的中点 F , 连接 EF , 则 $\angle DEA = 90^\circ$,

$$\because AD = 4,$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}AD = 2,$$

$\because EF$ 是 $Rt\triangle AED$ 的中线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AD = 2,$$

$\because \angle C = 90^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, $CD=2$,

$$\therefore DE = CD = 2,$$

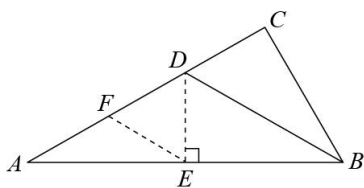
$$\therefore DF = EF = DE,$$

$\therefore \triangle EFD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle EDF = 60^\circ,$$

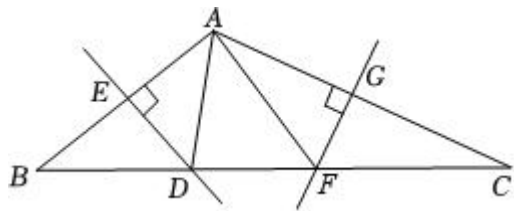
$$\therefore \angle A = 180^\circ - 90^\circ - \angle EDF = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

故答案为: 30.



【点睛】 本题考查了三角形内角和定理、角平分线性质的应用及直角三角形斜边上的中线, 解题的关键是做辅助线证明 $\triangle EFD$ 是等边三角形, 注意: 角平分线上的点到角的两边的距离相等.

16 如图, DE 垂直平分 AB , FG 垂直平分 AC , 若 $\angle BAC=110^\circ$, 则 $\angle DAF=$ ____度.



【答案】 40

【解析】

【分析】 本题考查线段垂直平分线的性质，三角形内角和定理，等边对等角等知识点，根据三角形内角和定理得到 $\angle B + \angle C = 70^\circ$ ，根据线段垂直平分线的性质得到 $DA = DB$ ， $EA = EC$ ，根据等边对等角得到 $\angle DAB = \angle B$ ， $\angle PAC = \angle C$ ，进而得到 $\angle DAB + \angle PAC = \angle B + \angle C = 70^\circ$ ，则 $\angle DAF = \angle BAC - \angle BAD - \angle CAF = 40^\circ$ 。

【详解】 解： $\because \angle BAC = 110^\circ$ ，

$$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ，$$

$\because DE$ 垂直平分 AB ，

$$\therefore DA = DB，$$

$$\therefore \angle DAB = \angle B，$$

同理可得： $\angle PAC = \angle C$ ，

$$\therefore \angle DAB + \angle PAC = \angle B + \angle C = 70^\circ，$$

$$\therefore \angle DAF = \angle BAC - \angle BAD - \angle CAF = 110^\circ - 70^\circ = 40^\circ，$$

故答案为： 40。

17. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线， $AD \perp AB$ ， 如果 $AC=5$ ， $AD=2$ ， 那么 AB 的长是_____。

【答案】 3

【解析】

【分析】 过点 C 作 $CE \parallel AB$ 交 AD 延长线于 E ， 先证 $\triangle ABD \cong \triangle ECD$ (AAS)， 求出 $AE = 2AD = 4$ ， 在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中， $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ 即可。

【详解】 解： 过点 C 作 $CE \parallel AB$ 交 AD 延长线于 E ，

$\because AD$ 是 BC 边上的中线，

$$\therefore BD = CD，$$

$$\because AD \perp AB， CE \parallel AB，$$

$$\therefore AD \perp CE， \angle ABD = \angle ECD，$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ，$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$ 中

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle EDC \\ \angle ABD = \angle ECD, \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$ (AAS),

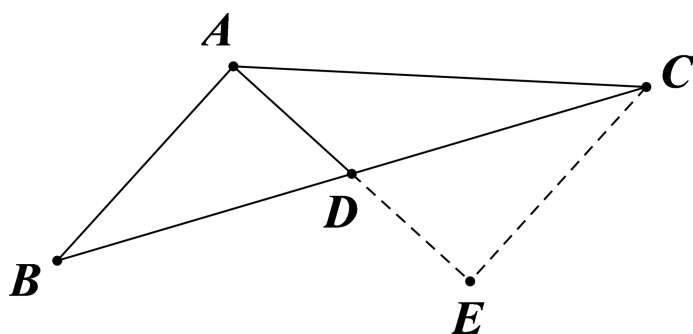
$\therefore AB = EC, AD = ED = 2,$

$\therefore AE = 2AD = 4,$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$

$\therefore AB = CE = 3.$

故答案为: 3.



【点睛】 本题考查中线性质的, 平行线性质的, 三角形全等判定与性质, 勾股定理, 掌握中线性质的, 平行线性质的, 三角形全等判定与性质, 勾股定理, 关键是利用辅助线构造三角形全等.

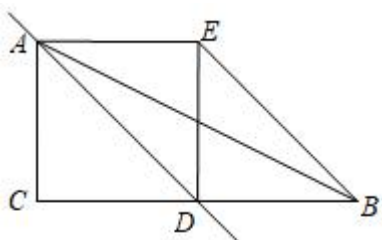
18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, 点 D 为边 BC 上一点, 将 $\triangle ACD$ 沿直线 AD 翻折得到 $\triangle AED$, 点 C 的对应点为点 E , 联结 BE , 如果 $\triangle BDE$ 是以 BD 为直角边的等腰直角三角形, 那么 BC 的长等于_____.

【答案】 12 或 $3\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据题意可知, 需要分两种情况, $\angle BDE = 90^\circ$, $\angle DBE = 90^\circ$, 画出对应的图形, 再根据折叠的性质及等腰直角三角形的性质可求解.

【详解】 解: ①当 $\angle BDE = 90^\circ$ 时, 如图,



此时, 四边形 $ACDE$ 是正方形,

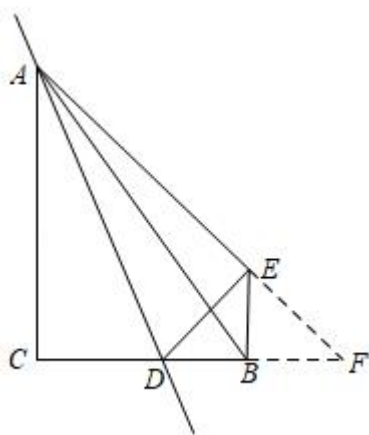
则 $CD = DE = AC = 6$,

又 $\triangle BDE$ 是等腰直角三角形,

属于 $BD = DE = 6$,

所以 $BC = CD + BD = 12$;

②当 $\angle DBE = 90^\circ$ 时, 如图,



设 $BD = x$, 则 $BE = x$, $DE = \sqrt{2}x$,

由折叠可知, $CD = DE = \sqrt{2}x$,

由题意可知, $\angle BDE = \angle DEB = 45^\circ$,

$\therefore \angle CDE = 135^\circ$,

$\therefore \angle CAE = 45^\circ$,

即 $\triangle ACF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AC = CF = 6$, $\angle F = 45^\circ$,

$\therefore BE = BF = x$,

$\therefore \sqrt{2}x + x + x = 6$,

解得 $x = 6 - 3\sqrt{2}$,

$\therefore BC = \sqrt{2}x + x = 3\sqrt{2}$.

故答案为: 12 或 $3\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了翻折变换、勾股定理、解直角三角形、等腰直角三角形的性质与判定等知识, 解题的关键是学会用分类讨论的思想解决问题.

三、简答题: (本大题共 4 题, 每题 6 分, 共 24 分)

19. 计算: $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{6}) + \sqrt{8}$

【答案】 4

【解析】

【分析】 先进行分母有理化，计算二次根式的乘法，然后计算二次根式的加减.

【详解】 解: 原式 $= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + 3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$

$$= \sqrt{2} + 1 + 3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$

$$= 4.$$

【点睛】 本题考查二次根式的运算，熟练掌握分母有理化和二次根式运算法则是解题关键.

20. 解方程: $\frac{x^2-1}{3} + \frac{x}{2} = x$

【答案】 $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 利用因式分解法求解即可.

【详解】 解: $\frac{x^2-1}{3} + \frac{x}{2} = x,$

$$2x^2 - 2 + 3x = 6x,$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0,$$

$$(2x+1)(x-2) = 0$$

解得 $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}.$

所以方程的解是 $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}.$

【点睛】 本题考查了因式分解法解方程，熟练掌握因式分解的技巧是解题的关键.

21. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m-1)x + m^2 = 0$ ，其根的判别式的值为 9，求 m 的值及这个方程的根.

【答案】 $m = -2; x_1 = 1, x_2 = 4.$

【解析】

【分析】 根据根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = 9$ ，求得 m 的值；进而得到原方程，再解方程求出方程的根即可.

【详解】 解: 由题意得: $(2m-1)^2 - 4 \times m^2 = 9,$

解得 $m = -2$,

当 $m = -2$ 时, 原方程为: $x^2 - 5x + 4 = 0$,

解得: $x_1 = 1, x_2 = 4$.

【点睛】 本题考查根的判别式以及解一元二次方程, 熟知根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 是解题关键.

22. 已知: $y = y_1 + y_2$, 并且 y_1 与 $(x-1)$ 成正比例, y_2 与 x 成反比例. 当 $x=2$ 时, $y=5$; 当 $x=-2$ 时, $y=-9$

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 求当 $x=8$ 时的函数值.

【答案】 (1) $y = 2x + \frac{6}{x} - 2$

(2) $\frac{59}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 先根据正比例关系、反比例关系可设 $y = k(x-1) + \frac{b}{x}$, 再将两组 x, y 的值代入求解即可得;

(2) 将 $x=8$ 代入函数解析式即可得.

【小问 1 详解】

解: 由题意可设 $y = k(x-1) + \frac{b}{x}$,

$$\text{则} \begin{cases} k + \frac{b}{2} = 5 \\ -3k - \frac{b}{2} = -9 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = 6 \end{cases},$$

则 $y = 2(x-1) + \frac{6}{x}$, 即 $y = 2x + \frac{6}{x} - 2$.

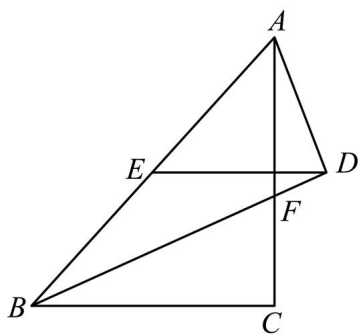
【小问 2 详解】

解: 当 $x=8$ 时, $y = 2 \times 8 + \frac{6}{8} - 2 = \frac{59}{4}$.

【点睛】 本题考查了反比例函数与正比例函数的综合, 熟练掌握待定系数法是解题关键.

四、解答题: (本大题共 3 题, 第 23 题 6 分, 第 24 题 8 分, 第 25 题 8 分, 共 22 分)

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, E 为 AB 中点, $ED \parallel BC$, 且与 $\angle ABC$ 的平分线 BD 交于点 D , 联结 AD .



(1) 求证: $AD \perp BD$;

(2) 记 BD 与 AC 的交点为 F , 求证: $BF = 2AD$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由平行线的性质和角平分线的性质可得 $BE = AE = DE$, 由等腰三角形的性质和三角形内角和定理可得 $\angle ADB = 90^\circ$, 可证 $AD \perp BD$;

(2) 由“ASA”可证 $\triangle ABD \cong \triangle NBD$, 可得 $AD = DN$, 由“AAS”可证 $\triangle ACN \cong \triangle BCF$, 可得 $BF = AN = 2AD$.

【小问1详解】

解: 证明: $\because E$ 为 AB 中点,

$$\therefore BE = AE,$$

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD,$$

$\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle CBD = \angle EDB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BDE,$$

$$\therefore BE = DE,$$

$$\therefore DE = AE,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle EDA,$$

$$\because \angle EAD + \angle EDA + \angle ABD + \angle BDE = 180^\circ,$$

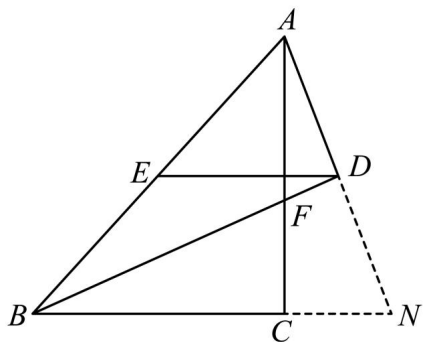
$$\therefore \angle ADE + \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \perp BD;$$

【小问2详解】

解: 延长 AD , BC 交于点 N ,



在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle NDB$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CBD \\ BD = BD \\ \angle ADB = \angle NDB = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle NBD (ASA),$$

$$\therefore AD = DN,$$

$$\therefore AN = 2AD,$$

$$\because \angle ADB = 90^\circ = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle N + \angle DBN = 90^\circ = \angle DBN + \angle BFC,$$

$$\therefore \angle N = \angle BFC,$$

在 $\triangle ACN$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle N = \angle BFC \\ \angle ACN = \angle BCF = 90^\circ, \\ AC = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACN \cong \triangle BCF (AAS),$$

$$\therefore BF = AN,$$

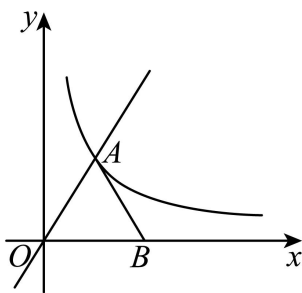
$$\therefore BF = 2AD.$$

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质，解题的关键是添加恰当辅助线构造全等三角形.

24. 如图，在平面直角坐标系中， O 为坐标原点，正比例函数 $y = \sqrt{3}x$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像都经过点 $A (2, m)$.

(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 点 B 在 x 轴的上，且 $OA = BA$ ，反比例函数图像上有一点 C ，且 $\angle ABC = 90^\circ$ ，求点 C 坐标.



【答案】(1) 反比例函数的解析式为: $y = \frac{4\sqrt{3}}{x}$; (2) 点 C 坐标为 $(4, \sqrt{3})$.

【解析】

【分析】(1) 将点 A 坐标代入正比例函数解析式求出 m, 可得点 A 的完整坐标, 再将点 A 代入反比例函数的解析式求出 k 即可;

(2) 过点 A 作 AD 垂直 OB 于 D, 根据等腰三角形三线合一可得 OD=BD, 求出 B 点坐标, 利用两点间距离公式表示出 AB、BC 和 AC, 根据 $\angle ABC=90^\circ$ 利用勾股定理列出方程, 解方程即可解决问题.

【详解】解: (1) 将点 A $(2, m)$ 代入 $y = \sqrt{3}x$, 得: $m = 2\sqrt{3}$,

$\therefore A(2, 2\sqrt{3})$,

将点 A $(2, 2\sqrt{3})$ 代入 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 得: $2\sqrt{3} = \frac{k}{2}$,

$\therefore k = 4\sqrt{3}$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为: $y = \frac{4\sqrt{3}}{x}$;

(2) 过点 A 作 AD 垂直 OB 于 D,

$\therefore OA = BA$,

$\therefore OD = BD$,

$\therefore A(2, 2\sqrt{3})$,

$\therefore OD = 2$,

$\therefore OB = 4$, 即 B $(4, 0)$,

设点 C 坐标为 $(a, \frac{4\sqrt{3}}{a})$,

则 $AB^2 = (2-4)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4$, $BC^2 = (a-4)^2 + \frac{48}{a^2} = a^2 + \frac{48}{a^2} - 8a + 16$,

$$AC^2 = (a-2)^2 + \frac{48}{a} - 2\sqrt{3} = a^2 - 4a - \frac{48}{a} + \frac{48}{a^2} + 16,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2, \text{ 即 } 4 + a^2 + \frac{48}{a^2} - 8a + 16 = a^2 - 4a - \frac{48}{a} + \frac{48}{a^2} + 16,$$

$$\text{整理得: } \frac{48}{a} - 4a + 4 = 0,$$

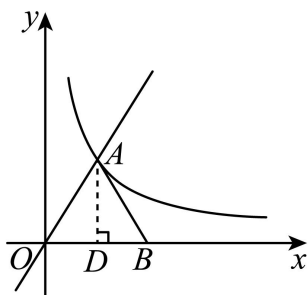
$$\text{解得: } a = 4 \text{ 或 } -3,$$

经检验, $a = 4$ 或 -3 均是分式方程的解,

$$\because x > 0,$$

$$\therefore a = 4,$$

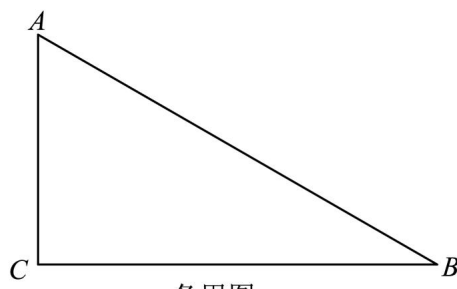
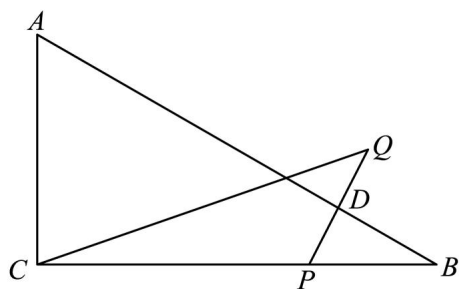
$$\therefore \text{点 } C \text{ 坐标为 } (4, \sqrt{3}).$$



【点睛】本题主要考查了待定系数法求函数解析式、函数图象上点的坐标特征、

等腰三角形的性质、两点间距离公式、勾股定理以及解分式方程和一元二次方程等知识,灵活运用相关知识进行推理计算是解答本题的关键.

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2\sqrt{3}$, $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 6$, 点 P 为边 BC 上的一个动点 (不与点 B 、 C 重合), 点 P 关于直线 AB 的对称点为点 Q , 联结 PQ 、 CQ , PQ 与边 AB 交于点 D .



备用图

- (1) 求 $\angle B$ 的度数;
- (2) 联结 BQ , 当 $\angle BQC = 90^\circ$ 时, 求 CQ 的长;
- (3) 设 $BP = x$, $CQ = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出函数的定义域.

【答案】(1) 30° (2) $3\sqrt{3}$

$$(3) y = \sqrt{x^2 - 6x + 36} \quad (0 < x < 6)$$

【解析】

【分析】(1) 由勾股定理的逆定理可得出 $\angle ACB = 90^\circ$ ，由直角三角形的性质可得出答案；

(2) 求出 $\angle BCQ = 30^\circ$ ，由直角三角形的性质得出 $BQ = \frac{1}{2}BC = 3$ ，由勾股定理可得出答案；

(3) 过点 Q 作 $QH \perp BC$ 于点 H ，证明 $\triangle BPQ$ 为等边三角形，由勾定理得出 $(6 - \frac{1}{2}x)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 = y^2$ ，则可得出答案。

【小问 1 详解】

解： $\because AC = 2\sqrt{3}$ ， $AB = 4\sqrt{3}$ ， $BC = 6$ ，

$$\therefore AC^2 + BC^2 = 48, \quad AB^2 = 48,$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because AC = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ;$$

【小问 2 详解】

解： $\because$ 点 P 关于直线 AB 的对称点为点 Q ，

$$\therefore BD \text{ 垂直平分 } PA,$$

$$\therefore PB = BQ,$$

$$\therefore \angle QBD = \angle PBD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle PBQ = 60^\circ,$$

$$\because \angle BQC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCQ + \angle PBQ = 90^\circ,$$

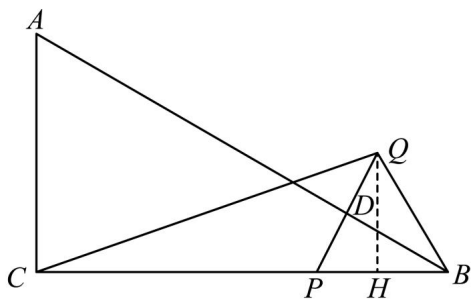
$$\therefore \angle BCQ = 30^\circ,$$

$$\therefore BQ = \frac{1}{2}BC = 3.$$

$$\therefore CQ = \sqrt{BC^2 - BQ^2} = 3\sqrt{3};$$

【小问 3 详解】

解： 过点 Q 作 $QH \perp BC$ 于点 H ，



$$\because BP = BQ, \angle PBQ = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BPQ$ 为等边三角形,

$$\because QH \perp BP, BP = x,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore CH = 6 - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore QH = \sqrt{BQ^2 - BH^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\because \angle CHQ = 90^\circ, CQ = y,$$

$$\therefore \left(6 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = y^2,$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式为 } y = \sqrt{x^2 - 6x + 36} (0 < x < 6).$$

【点睛】 本题是三角形综合题，考查了直角三角形的性质，等边三角形的判定与性质，勾股定理，轴对称的性质，解题的关键是熟练掌握勾股定理.