

2023 学年第一学期八年级期末诊断评估

数学 试卷

考生注意:

1. 本场考试时间 90 分钟.试卷共 4 页, 满分 100 分, 答题纸共两页.
2. 作答前, 在答题纸指定位置填写班级, 姓名, 准考证号.
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域, 不得错位, 在试卷上作答一律不得分.
4. 用 2B 铅笔作答选择题, 用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分, 每题只有一个正确选项)

1. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$; B. $\sqrt{5}$; C. $\sqrt{45}$; D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了最简二次根式的定义、二次根式的性质、分母有理数, 解答的关键是熟知最简二次根式应满足下列两个条件: 1、被开方数不含分母; 2、被开方数中不含能开得尽方的因数或因式. 据此逐项判断即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 的被开方数中含有分母, 不是最简二次根式, 不符合题意;

B、 $\sqrt{5}$ 是最简二次根式, 符合题意;

C、 $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, 故不是最简二次根式, 不符合题意;

D、 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故不是最简二次根式, 不符合题意;

故选: B.

2. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + c = 0$ 无实数根, 则 c 的取值范围是 ()

- A. $c > 1$ B. $c \geq 1$ C. $c < 1$ D. $c \leq 1$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了一元二次方程根的判别式的应用, 熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关

键. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当时 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当时 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根. 据此列出不等式并求解即可.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + c = 0$ 无实数根,

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times c < 0,$$

解得 $c > 1$.

故选: A.

3. 下列函数一定是反比例函数的是 ()

A. $y = \frac{k}{x}$

B. $y = \frac{x}{2}$

C. $y = x^2$

D. $y = \frac{2}{x}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了反比例函数的识别, 一般地, 形如 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的函数叫做反比例函数, 据此求解即可.

【详解】解: A、当 $k = 0$ 时, 函数 $y = \frac{k}{x}$ 不是反比例函数, 不符合题意;

B、 $y = \frac{x}{2}$ 不是反比例函数, 不符合题意;

C、 $y = x^2$ 不是反比例函数, 不符合题意;

D、 $y = \frac{2}{x}$ 是反比例函数, 符合题意;

故选: D.

4. 下列命题的逆命题是假命题的是 ()

A. 如果 $ab = 0$, 那么 $a = b = 0$;

B. 如果 $a \geq 0$, 那么 $\sqrt{a^2} = a$;

C. 对顶角相等;

D. 同位角相等, 两直线平行.

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查逆命题和真假命题, 能够写出命题的逆命题是解题的关键.

【详解】解: A. 逆命题为: 如果 $a = b = 0$, 那么 $ab = 0$, 是真命题, 不符合题意;

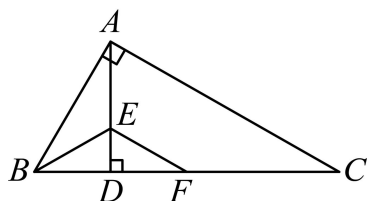
B. 逆命题为: 如果 $\sqrt{a^2} = a$, 那么 $a \geq 0$, 真命题, 不符合题意;

C. 逆命题为：相等的角是对顶角，是假命题，符合题意；

D. 两直线平行，同位角相等，是真命题，不符合题意；

故选 C.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $AD \perp BC$ ， BE 平分 $\angle ABC$ 交 AD 于点 E ， $EF \parallel AC$ 交 BC 于点 F ，下列结论不成立的是（ ）



A. $\angle ABD = \angle DAC$

B. $\angle C = \angle BAD$

C. $AC = 2AD$

D. $AD = 2DF$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了直角三角形两锐角互余，直角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半，等腰三角形的判定与性质等知识. 分别求出 $\angle ABD = \angle DAC = 60^\circ$ ，得到 A 选项成立； $\angle C = \angle BAD = 30^\circ$ ，得到 B 选项成立；根据角三角形中 30° 角所对的直角边等于斜边的一半，得到 $AC = 2AD$ ，得到 C 选项成立；证明 $BE = FE$ ， $BD = DF$ ，再证明 $AB = 2BD$ ，即可得到 $AB = 2DF$ ，即可证明 $AD \neq 2DF$ ，得到 D 选项错误.

【详解】解： $\because \angle BAC = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle C = 60^\circ,$$

$$\because AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 90^\circ - \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DAC, \text{ 故 A 选项成立, 不符合题意;}$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ, \angle DAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle BAD = 30^\circ, \text{ 故 B 选项成立, 不符合题意;}$$

$$\because \angle ADC = 90^\circ, \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = 2AD, \text{ 故 C 选项成立, 不符合题意;}$$

$$\because EF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle EFD = \angle C = 30^\circ,$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle EBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle AEF,$$

$$\therefore BE = FE,$$

$$\because ED \perp BF,$$

$$\therefore BD = DF,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\because \angle BAD = 30^\circ$,

$$\therefore AB = 2BD,$$

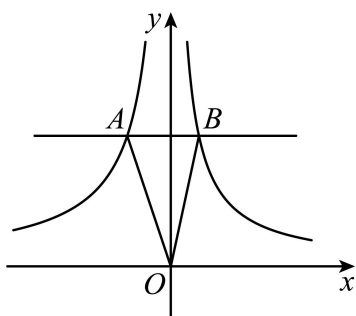
$$\therefore AB = 2DF,$$

$$\because AB > AD,$$

$\therefore AD \neq 2DF$, 故 D 选项错误, 符合题意.

故选: D

6. 如图, 函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 和 $y = \frac{2}{x}$ 的部分图像与直线 $y = a (a > 0)$ 分别交于 A、B 两点, 如果 $\triangle ABO$ 的面积是 2.5, 则 k 的值为 ()



A. 3

B. -3

C. $\frac{3}{2}$

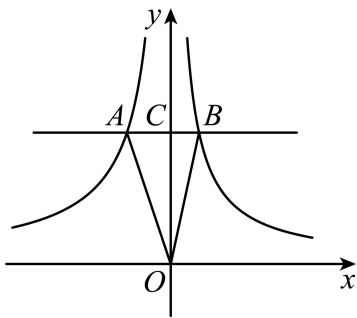
D. $-\frac{3}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查反比例函数 k 的几何意义, 记 AB 交 y 轴于点 C , 根据 $y = \frac{2}{x}$ 求出 $S_{\triangle OBC}$, 再由 $S_{\triangle OAC} = S_{\triangle ABO} - S_{\triangle OBC}$ 求出 $S_{\triangle OAC}$, 即可解题.

【详解】解: 记 AB 交 y 轴于点 C , 如图所示:



由 $y = \frac{2}{x}$ 知, $S_{\triangle OBC} = 1$,

$\therefore \triangle ABO$ 的面积是 2.5,

$\therefore S_{\triangle OAC} = S_{\triangle ABO} - S_{\triangle OBC} = 2.5 - 1 = 1.5$,

$\therefore |k| = 2S_{\triangle OAC} = 3$,

$\therefore k = -3$,

故选: B.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. 计算: $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{6}$.

【解析】

【详解】解: $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$; 故答案为 $\sqrt{6}$.

点睛: 此题考查了二次根式的乘法, 掌握二次根式的运算法则: 乘法法则 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 是本题的关键.

8. 函数 $y = \frac{1}{x-2024}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x \neq 2024$

【解析】

【分析】本题考查了函数自变量的取值范围, 熟练掌握分母不为 0 是解题的关键. 由题意, 得 $x - 2024 \neq 0$, 再解不等式即可.

【详解】解: 由题意, 得 $x - 2024 \neq 0$,

$x \neq 2024$.

故答案为: $x \neq 2024$.

9. 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{x}$, 则 $f(9) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了求函数的值，把 $x=9$ 代入 $f(x)=2\sqrt{x}$ 计算即可.

【详解】 解：把 $x=9$ 代入 $f(x)=2\sqrt{x}$ ，得

$$\therefore f(9)=2\sqrt{9}=6.$$

故答案为：6.

10. 如果关于 x 的一元二次方程 $2x^2-3x+k=0$ 有一个根是1，则 $k=$ ____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 把 $x=1$ 代入 $2x^2-3x+k=0$ ，转化为 k 的方程求解即可. 本题考查了方程根的定义即使方程左右两边相等的未知数的值，转化求解是解题的关键.

【详解】 把 $x=1$ 代入 $2x^2-3x+k=0$ ，

$$\text{得 } 2-3+k=0,$$

$$\text{解得 } k=1,$$

故答案为：1.

11. 在实数范围内因式分解： $x^2-2x-2=$ ____.

【答案】 $(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})$

【解析】

【分析】 本题考查了在实数范围内分解因式，公式法分解因式等知识. 先将原式化为 $x^2-2x+1-3$ ，再分别利用完全平方公式和平方差公式即可分解因式.

【详解】 解： x^2-2x-2

$$=x^2-2x+1-3$$

$$=(x-1)^2-(\sqrt{3})^2$$

$$=(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3}).$$

$$\text{故答案为： } (x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3}).$$

12. 已知正比例函数 $y=(k-3)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而增大，则 k 的取值范围为__.

【答案】 $k>3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了正比例函数的图像与性质、解一元一次不等式等知识，理解并掌握正比例函数的图像与性质是解题关键。在正比例函数 $y = kx$ 中，当 $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大，据此列不等式并求解即可。

【详解】 解：根据题意，正比例函数 $y = (k-3)x$ 的函数值 y 随 x 的增大而增大，
则 $k-3 > 0$ ，
解得 $k > 3$ 。
故答案为： $k > 3$ 。

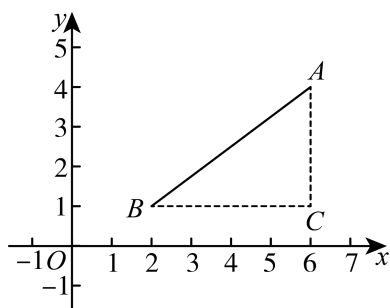
13. 已知直角坐标平面内两点 $A(6,4)$ 和 $B(2,1)$ ，则线段 AB 的长为_____。

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理的应用，过点 A 作 y 轴的平行线，过点 B 作 x 轴的平行线，两平行线交于点 C ，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形，由点 $A(6,4)$ 和 $B(2,1)$ 可得 $C(6,1)$ ，从而 $BC = 4$ ， $AC = 3$ ，根据勾股定理即可求得线段 AB 的长。

【详解】 过点 A 作 y 轴的平行线，过点 B 作 x 轴的平行线，两平行线交于点 C ，
 $\therefore AC \perp BC$ ，



$\therefore A(6,4)$ ， $B(2,1)$ ，

$\therefore C(6,1)$ ，

$\therefore BC = 6 - 2 = 4$ ， $AC = 4 - 1 = 3$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 。

故答案为： 5。

14. 平面内，到点 A 的距离等于 2 的点的轨迹是_____。

【答案】 以 A 为圆心，2 为半径的圆

【解析】

【分析】 本题考查了圆的定义，解题关键是掌握圆是平面内到一定点的距离等于定长的所有点的集合.

【详解】 解：由圆的定义可知，平面内到点 A 的距离等于 2 的点的轨迹是以 A 为圆心 2 为半径的圆，
故答案为：以 A 为圆心，2 为半径的圆.

15. 某工厂七月份产值是 100 万元，计划九月份的产值要达到 144 万元，如果每月的产值的增长率相同，则增长率为_____.

【答案】 20% .

【解析】

【分析】 根据七月份的产值 $\times (1 + \text{增长率})^2 =$ 九月份的产值，把相关数值代入求合适的解即可.

【详解】 解：设增长率为 x .

$$100(1+x)^2 = 144,$$

$$\because 1+x > 0,$$

$$\therefore 1+x = 1.2,$$

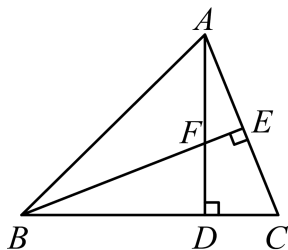
$$\therefore x = 20% .$$

故每月的增长率是 20% .

故答案是：20% .

【点睛】 考查一元二次方程的应用；得到九月份产值的等量关系是解决本题的关键.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 F 是高 AD 、 BE 的交点，且 $BF = AC$ ，则 $\angle ABC =$ _____度.



【答案】 45

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的性质与判定，等边对等角，三角形内角和定理，先根据三角形高的定义得到 $\angle BDF = \angle ADC = \angle AEF = 90^\circ$ ，进而利用三角形内角和定理证明 $\angle DBF = \angle DAC$ ，进一步证明 $\triangle DBF \cong \triangle DAC$ (AAS) 得到 $AD = BD$ ，即可得到 $\angle ABC = 45^\circ$.

【详解】 解： $\because AD$ 、 BE 都是 $\triangle ABC$ 的高，

$$\therefore \angle BDF = \angle ADC = \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle BFD,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle DAC,$$

$$\text{又} \because BF = AC,$$

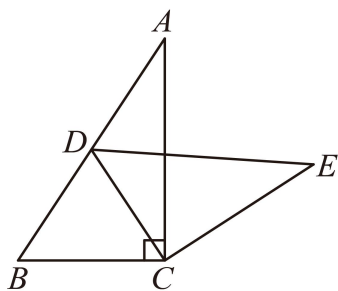
$$\therefore \triangle DBF \cong \triangle DAC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

故答案为：45.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 是边 AB 的中点， $\angle B = \angle ACE$ ， $DE = 4$ ， $CE = \sqrt{10}$ ，则 AB 的长为_____.



【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理，直角三角形的性质，先根据 $\angle B = \angle ACE$ ，可得 $\angle DCE = 90^\circ$ ，再根据勾股定理求出 CD ，然后根据直角三角形的性质得出 $CD = \frac{1}{2}AB$ 可得答案.

【详解】 $\because \angle B = \angle ACE$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 是边 AB 的中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACE.$$

$$\therefore \angle ACE + \angle ACD = \angle B + \angle ACD = \angle ACB = 90^\circ$$

$$\text{即 } \angle DCE = 90^\circ$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, } DE = 4, CE = \sqrt{10},$$

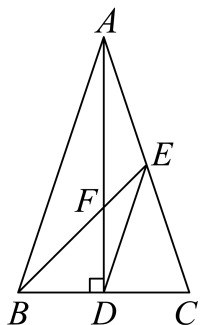
$$\text{根据勾股定理, 得 } CD = \sqrt{DE^2 - CE^2} = \sqrt{6}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, 点 } D \text{ 是边 } AB \text{ 的中点,}$$

$$\therefore AB = 2CD = 2\sqrt{6}.$$

故答案为： $2\sqrt{6}$.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AD \perp BC$, 垂足为点 D , 点 E 为 AC 的中点, 连接 DE 、 BE 交 AD 于点 F , 若 $\angle BFD = 45^\circ$, 则 $\frac{EF}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$.

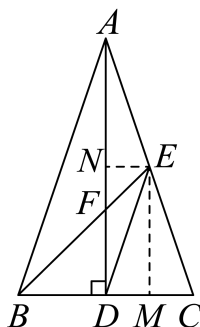


【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{10}$

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的三线合一性质, 等腰直角三角形的判定和性质, 勾股定理, 三角形中位线定理, 设 $BD = DC = DF = 2k$, 根据题意计算出 EF, AC 得长, 计算即可.

【详解】 $\because AB = AC, AD \perp BC$,



$\therefore BD = DC, \angle BDF = \angle CDF = 90^\circ$,

取 DC 的中点 M , 取 AD 的中点 N , 连接 EN, EM ,

$\because$ 点 E 为 AC 的中点,

$\therefore EN \parallel DC, EN = \frac{1}{2}DC, EM \parallel AD, EM = \frac{1}{2}AD$,

$\therefore \angle END = \angle EMD = \angle CDF = 90^\circ$, 四边形 $ENDM$ 是矩形,

$\therefore EN = DM$,

$\because \angle BFD = 45^\circ$,

$\therefore \angle FBD = \angle BFD = \angle NFE = \angle NEF = \angle BEM = 45^\circ$,

$\therefore BM = EM, EN = FN = DM = CM$,

设 $BD = DC = DF = 2k$,

$\therefore BM = EM = 3k, EN = FN = DM = CM = k$,

$\therefore EC = \sqrt{EM^2 + CM^2} = \sqrt{10}k, EF = \sqrt{EN^2 + FN^2} = \sqrt{2}k$,

$\therefore AB = AC = 2EC = 2\sqrt{10}k$,

$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{\sqrt{2}k}{2\sqrt{10}k} = \frac{\sqrt{5}}{10}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

三、简答题 (本大题共 4 题, 共 32 分)

19. (1) 计算: $\sqrt{8} \times \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \sqrt{20}$

(2) 计算: $\frac{1}{2}\sqrt{6a^3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3a^2} \div \sqrt{2a^4}$

【答案】 (1) $3\sqrt{6} - \sqrt{5}$; (2) $\sqrt{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式的混合运算, 按照二次根式的性质, 化简计算即可.

(1) 按照二次根式的混合运算法则, 依次化简计算即可, 分母有理化时要特别小心.

(2) 按照二次根式的混合运算法则, 依次化简计算即可.

【详解】 (1) 解: 原式 $= 2\sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

$= 3\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

(2) 解: 原式 $= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) \sqrt{6a^3 \cdot 3a^2 \cdot \frac{1}{2a^4}}$

$= \frac{1}{3} \sqrt{9a}$

$= \sqrt{a}$.

20. (1) 用配方法解方程: $2x^2 + 4x - 7 = 0$

(2) 解方程: $x(x-3) = 2(x-3)$

【答案】 (1) $x_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$, $x_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$; (2) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程：

- (1) 利用配方法即可求解；
- (2) 利用因式分解法即可求解；

熟练掌握配方法和因式分解法解一元二次方程是解题的关键.

【详解】 解：(1) 移项得： $x^2 + 2x = -\frac{7}{2}$ ，

配方得： $x^2 + 2x + 1 = -\frac{7}{2} + 1$ ， 即： $(x+1)^2 = -\frac{5}{2}$ ，

开方得： $x+1 = \pm \sqrt{-\frac{5}{2}}$ ，

解得： $x_1 = -1 + \sqrt{-\frac{5}{2}}$ ， $x_2 = -1 - \sqrt{-\frac{5}{2}}$ 。

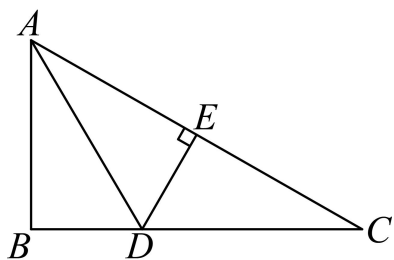
(2) 移项得： $x(x-3) - 2(x-3) = 0$ ，

因式分解得： $(x-3)(x-2) = 0$ ，

即： $x-3 = 0$ 或 $x-2 = 0$ ，

解得： $x_1 = 3$ ， $x_2 = 2$ 。

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 6$ ， $AC = 4\sqrt{3}$ ， DE 垂直平分 AC ，分别交边 BC 、 AC 于点 D 、 E ，连结 AD 。



- (1) 求 $\angle C$ 的度数；
- (2) 求 AD 的长。

【答案】 (1) $\angle C = 30^\circ$

(2) $AD = 4$

【解析】

【分析】 (1) 本题考查了勾股定理的逆定理，直角三角形的性质，解题的关键是证明 $\angle B = 90^\circ$ ；

(2) 本题考查了垂直平分线的性质，直角三角形的性质，勾股定理，解题的关键是证明 $\angle DAE = 30^\circ$ 。

【小问 1 详解】

解: $\because AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 6$, $AC = 4\sqrt{3}$,

$$\therefore AC^2 = 48, AB^2 = 12, BC^2 = 36,$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because AB = \frac{1}{2}AC$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ;$$

【小问 2 详解】

$\because DE$ 垂直平分 AC , $AC = 4\sqrt{3}$,

$$\therefore \angle DEA = 90^\circ, AE = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{3}, DA = DC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle C,$$

$$\text{又} \because \angle C = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DAE = 30^\circ,$$

$$\because \angle DEA = 90^\circ$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD,$$

$$\because AE^2 + DE^2 = AD^2,$$

$$\therefore (2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{1}{2}AD\right)^2 = AD^2$$

$$\therefore 12 + \frac{1}{4}AD^2 = AD^2,$$

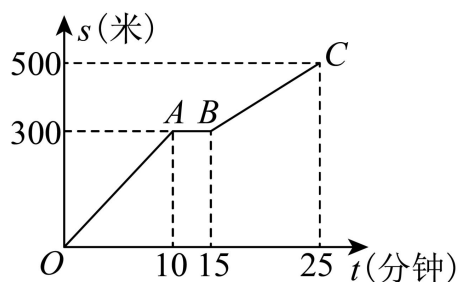
$$\therefore \frac{3}{4}AD^2 = 12,$$

$$\therefore AD^2 = 16$$

$$\therefore AD = 4, AD = -4 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore AD = 4.$$

22. 小明外出爬山, 他从山脚爬到山顶的过程中, 中途休息了一段时间. 从山脚出发后小明所走路程 s (米) 和所用时间 t (分钟) 之间的函数关系如图所示, 请根据图中信息填空.



- (1) 小明中途休息用了____分钟；
- (2) 小明休息后爬山的平均速度是____米/分钟；
- (3) 小明休息前所走的路程 s 与时间 t 之间的函数关系式是____ (无需写出定义域).

【答案】 (1) 5 (2) 20

(3) $s = 30t$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的实际应用、平均速度的计算方法:

- (1) 根据图像可得小明休息的时间;
- (2) 根据图像得到小明休息后所用的时间以及路程, 即可得到平均速度;
- (3) 根据图像得到小明休息前所用的时间以及路程, 然后求得平均速度, 即可得到关系式;

数形结合, 熟练掌握是解题的关键.

【小问 1 详解】

解: 由图可得在 AB 段为小明休息的时间,

此时时间为 $15 - 10 = 5$ 分钟,

故答案为: 5;

【小问 2 详解】

解: 由图可得小明休息后爬上的阶段为 BC 段,

这段所走的路程为: $500 - 300 = 200$ 米,

这段所用的时间为: $25 - 15 = 10$ 分钟,

$\therefore$ 平均速度为: $\frac{200}{10} = 20$ 米/分钟,

故答案为: 20;

【小问 3 详解】

解: 由图可得小明休息前所走的路程为: 300 米,

小明休息前所走路程所用的时间为: 10 分钟,

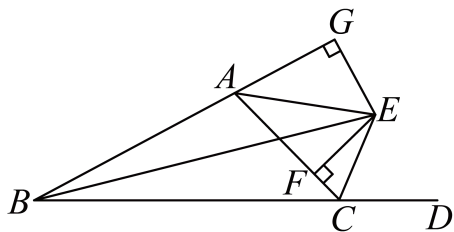
$\therefore$ 小明休息前的平均速度为: $\frac{300}{10} = 30$ 米/分钟,

∴根据路程=速度×时间可得：小明休息前所走的路程 s 与时间 t 之间的函数关系式是 $s = 30t$ ，

故答案为： $s = 30t$.

四、解答题：（本大题共 3 题，共 26 分）

23. 如图， $\angle ABC$ 和 $\angle ACD$ 的平分线交于点 E ，过 E 作 $EG \perp BA$ 交 BA 的延长线于点 G ， $EF \perp AC$ 交 AC 于点 F .



(1) 求证： $EG = EF$ ；

(2) AE ，求证： $\angle AEG = \angle AEF$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

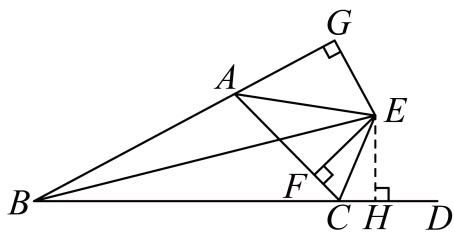
【分析】 本题主要考查角平分线的性质、全等三角形的判定与性质，解题关键是熟练掌握角平分线的性质：角的平分线上的点到角的两边的距离相等.

(1) 过点 E 作 $EH \perp BD$ 于点 H ，利用角平分线的性质即得证；

(2) 通过 HL 证明 $\text{Rt}\triangle AGE \cong \text{Rt}\triangle AFE$ 即可.

【小问 1 详解】

作 $EH \perp BD$ ，垂足为点 H



∵ BE 平分 $\angle ABC$ ， $EG \perp BA$ ， $EH \perp BD$ （已知）

∴ $EG = EH$ （在角平分线上的任意一点到这个角的两边的距离相等）

∵ CE 平分 $\angle ACD$ ， $EF \perp AC$ ， $EH \perp BD$ （已知）

∴ $EF = EH$ （在角平分线上的任意一点到这个角的两边的距离相等）

∴ $EG = EF$ （等量代换）

【小问 2 详解】

∵ $EG \perp BA$ ， $EF \perp AC$ （已知）

$\therefore \angle G = 90^\circ$, $\angle AFE = 90^\circ$ (垂直的意义)

在 $\text{Rt}\triangle AGE$ 和 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中,

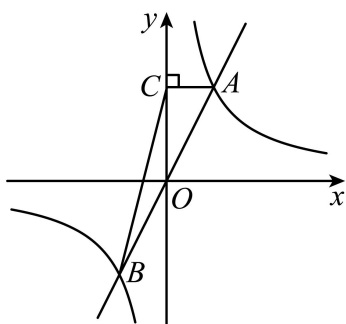
$$\begin{cases} EG = EF \\ AE = AE (\text{公共边}) \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle AGE \cong \text{Rt}\triangle AFE (\text{HL})$

$\therefore \angle AEG = \angle AEF$ (全等三角形对应角相等)

24. 如图, 直线 $y = mx (m > 0)$ 的图像与双曲线 $y = \frac{n}{x} (n > 0)$ 交于 A 、 B 两点, 且点 A 的坐标为 $(2, 4)$,

过 A 作 $AC \perp y$ 轴, 垂足为点 C .



(1) 求 m 和 n 的值;

(2) 连接 BC , 直接写出点 B 的坐标, 并求出 $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 如果在双曲线 $y = \frac{n}{x} (n > 0)$ 上有一点 D , 点 D 在第一象限且满足 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$, 求点 D 的坐标.

【答案】 (1) $m = 2$, $n = 8$

(2) $S_{\triangle ABC} = 8$, $B(-2, -4)$

(3) 点 D 的坐标为 $\left(\frac{4}{3}, 6\right)$ 或 $(4, 2)$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数和反比例函数的综合应用, 以及三角形面积的计算.

(1) 将点 $A(2, 4)$ 代入直线 $y = mx (m > 0)$ 和双曲线 $y = \frac{n}{x} (n > 0)$, 即可得出 m , n 的值

(2) 求出直线解析式和双曲线解析式, 然后将其联立解方程组, 得点 B 与 C 的坐标, 再根据三角形的面积公式及坐标的意义求解.

(3) 设点 $D\left(x, \frac{8}{x}\right)$, 根据 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$, 求出 x 的值, 即可求出点 D 的坐标.

【小问 1 详解】

解：把点 $A(2,4)$ 分别代入 $y = mx (m > 0)$ 和 $y = \frac{n}{x} (n > 0)$,

解得 $m = 2$, $n = 8$.

【小问 2 详解】

解：∵ $m = 2$, $n = 8$,

∴ 直线的解析式为 $y = 2x$ 和双曲线的解析式为 $y = \frac{8}{x}$,

$$\therefore \text{解方程组} \begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{8}{x} \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -4 \end{cases},$$

则点 A 坐标为 $(2,4)$, 点 B 坐标为 $(-2,-4)$,

∵ $AC \perp y$ 轴,

∴ 点 C 坐标为 $(0,4)$,

$$\therefore S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times 2 \times (4+4) = 8.$$

【小问 3 详解】

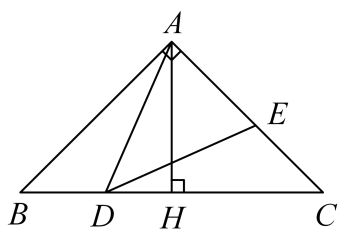
$$\text{解：} S_{\triangle ADC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = 2,$$

$$\because \text{点 } D \text{ 在双曲线 } y = \frac{8}{x} \text{ 上, 设点 } D\left(x, \frac{8}{x}\right) (x > 0), S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times 2 \cdot \left|\frac{8}{x} - 4\right| = 2,$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 4,$$

∴ 点 D 的坐标为 $\left(\frac{4}{3}, 6\right)$ 或 $(4, 2)$.

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = \sqrt{2}$, $AH \perp BC$, 垂足为 H . 点 D 为边 BC 上一点 (不与 B 、 C 重合), 连接 AD 作 $\angle ADE = 2\angle BAD$, 射线 DE 交射线 AC 于 E . 设 $BD = x$, $S_{\triangle CDE} = y$.



- (1) 求证: $AD = DE$;
- (2) 当点 E 在线段 AC 上时, 求 y 关于 x 的函数解析式并写出定义域;
- (3) 当 $\angle DAH = \frac{1}{2}\angle BAH$ 时, 请直接写出 y 的值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, 定义域为 $0 \leq x \leq 1$

(3) $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2$

【解析】

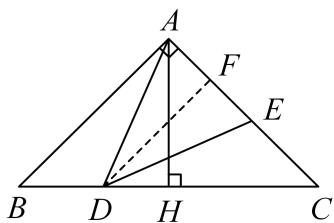
【分析】(1) 作辅助线, 构造出全等三角形, 即可得到结果;

(2) 作出三角形面积的高, 证明两个三角形全等, 找到三角形的底和高, 根据面积公式得到关系式以及定义域;

(3) 根据点 E 在线段 AC 上, 点 E 在直线 AC 上, 分两种情况求得 y 的值.

【小问 1 详解】

证明: 作 DF 平分 $\angle ADE$ 交 AC 于点 F , 如图所示:



得 $\angle ADF = \angle EDF = \frac{1}{2}\angle ADE$,

即 $\angle ADE = 2\angle ADF$,

又 $\because \angle ADE = 2\angle BAD$,

$\therefore \angle ADF = \angle BAD$,

$\therefore AB \parallel DF$,

得 $\angle BAE + \angle AFD = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补),

$\because \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle AFD = 90^\circ$,

$\because \angle AFD + \angle EFD = 180^\circ$,

$\therefore \angle EFD = 90^\circ$,

即 $\angle AFD = \angle EFD$,

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle EDF$ 中,

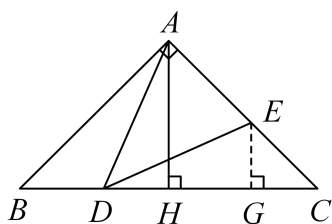
$$\begin{cases} \angle AFD = \angle EFD \\ DF = DF \\ \angle ADF = \angle EDF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle EDF$ (ASA),

$\therefore AD = DE$;

【小问 2 详解】

解: 作 $EG \perp BC$, 垂足为点 G , 如图所示:



由题意可得, $BH = AH = 1$, $BC = 2$, $\angle CAH = \angle C = 45^\circ$,

由 $BD = x$, 可得 $DH = 1 - x$, $CD = 2 - x$,

$\therefore \angle AED = \angle EDG + \angle C$,

$\therefore \angle EDG = \angle DEA - 45^\circ$,

$\therefore \angle DAH = \angle DAE - \angle HAC = \angle DAE - 45^\circ$,

又 $\because AD = DE$,

$\therefore \angle DAE = \angle DEA$,

得 $\angle DAH = \angle EDG$,

$\because AH \perp BC$, $EG \perp BC$,

$\therefore \angle AHD = \angle DGE = 90^\circ$,

在 $\triangle ADH$ 和 $\triangle DEG$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAH = \angle EDG \\ \angle AHD = \angle DGE, \\ AD = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle EDF$ (AAS),

$\therefore EG = DH = 1 - x$ (全等三角形对应边相等),

$$\therefore S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot EG,$$

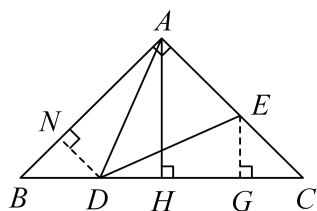
$$\therefore y = \frac{1}{2}(2-x)(1-x),$$

$$\text{即 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1,$$

定义域为 $0 \leq x \leq 1$;

【小问3 详解】

解：①当点 E 在线段 AC 上时，过点 D 作 AB 的垂线，交 AB 于一点 N ，如图所示：



$$\therefore \angle DAH = \frac{1}{2} \angle BAH,$$

则 AD 是 $\angle BAH$ 的角平分线，

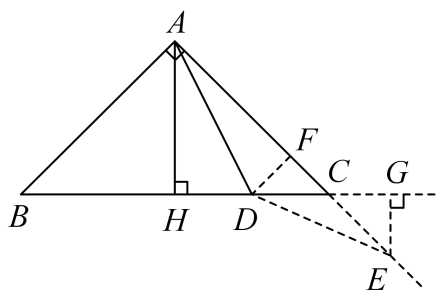
$$\text{故 } DN = DH = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\text{则 } BH = 2 = BD + DH = x + \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\text{解得： } x = 2 - \sqrt{2},$$

$$\text{将 } x \text{ 的值代入 } y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1, \text{ 可得 } y = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

②当点 E 在直线 AC 上时，过点 E 作 BC 的垂线，交 BC 的延长线于一点 G ，作 DF 平分 $\angle ADE$ 交 AC 于点 F ，如图所示：



$$\therefore \angle DAH = \frac{1}{2} \angle BAH, \quad \angle BAH = \angle CAH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HAD = \angle FAD = 22.5^\circ,$$

由 (1) 同理证得 $\triangle ADF \cong \triangle EDF$,

$$\therefore \angle FAD = \angle FED = 22.5^\circ, \quad AD = DE,$$

$$\therefore \angle ACH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GDE = 22.5^\circ,$$

在 $\triangle AHD$ 和 $\triangle DGE$ 中,

$$\begin{cases} \angle AHD = \angle DGE = 90^\circ \\ \angle HAD = \angle GDE = 22.5^\circ, \\ AD = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AHD \cong \triangle DGE \quad (\text{AAS}),$$

$$\therefore BD = x,$$

$$\therefore HD = GE = x - 1,$$

$$\therefore DC = 2 - x,$$

$$\therefore S_{\triangle CDE} = y = \frac{1}{2} DC \cdot GE = \frac{1}{2} (2 - x)(x - 1),$$

$\therefore AD$ 是 $\angle HAF$ 的角平分线,

$$\therefore HD = DF = x - 1,$$

$$\text{即 } FC = x - 1,$$

$$\text{根据 } DF^2 + FC^2 = DC^2, \text{ 解得: } x = \sqrt{2},$$

$$\text{将 } x = \sqrt{2} \text{ 代入 } y = \frac{1}{2} (2 - x)(x - 1),$$

$$\text{得: } y = \frac{3}{2} \sqrt{2} - 2,$$

$$\therefore y \text{ 的值是 } 1 - \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ 或者 } \frac{3}{2} \sqrt{2} - 2.$$

【点睛】 本题考查了三角形综合题, 等腰直角三角形的性质、面积的计算、角平分线的性质、等腰三角形的性质, 熟练运用知识点是解题的关键.